

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εισαγωγή. Οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι ένα από τα ισχυρά εργαλεία για μια ενοποιημένη αντιμετώπιση πολλών κατηγοριών προβλημάτων απαρίθμησης. Ο Laplace έθεσε πρώτος τις βάσεις για μία γενική θεώρηση και συστηματική εξέταση των γεννητριών συναρτήσεων.

5.1 Γεννήτριες συναρτήσεις

Έστω $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ καλείται γεννήτρια συνάρτηση ή απλά γεννήτρια της ακολουθίας $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$. Αν η ακολουθία $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ είναι πεπερασμένη δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε $a_m \neq 0$ και $a_k = 0$, για κάθε $k > m$, τότε η συνάρτηση $A(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m , δηλαδή, $A(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ και ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής t . Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς, η ύπαρξη της γεννήτριας $A(t)$ προϋποθέτει την απόλυτη σύγκλιση της δυναμοσειράς σε μία περιοχή γύρω από το μηδέν ή για $|t| \leq R$. Έστω $A(t), B(t)$ οι γεννήτριες των ακολουθιών $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ και $\{b_k\}_{k=0,1,\dots}$ αντίστοιχα. Τότε οι $A(t), B(t)$ είναι ίσες αν και μόνο αν $a_k = b_k$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 5.1 (α) Από τον τύπο του Νεύτωνα μπορούμε να γράψουμε: $(1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$. Η

γεννήτρια των αριθμών $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ ή ισοδύναμα της πεπερασμένης

ακολουθίας $\{a_k\}_{k=0,1,\dots,n}$ με γενικό όρο $a_k = \binom{n}{k}, k=1, \dots, n$ είναι η συνάρτηση $A(t) = (1+t)^n$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}, (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k, |t| < 1$, δηλαδή η γεννήτρια της ακολουθίας πραγματικών

αριθμών $a_k = \binom{x}{k}, k=0, 1, \dots$ είναι η συνάρτηση $A(t) = (1+t)^x$.

(β) Ισχύει $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k, |t| < 1$. Άρα, η συνάρτηση $A(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = (1-t)^{-n}, |t| < 1$,

είναι η γεννήτρια της ακολουθίας $a_k = \binom{n+k-1}{k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, k = 0, 1, \dots$, που εκφράζει τον αριθμό

των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k . $\square$

Παράδειγμα 5.2 Να βρεθεί η γεννήτρια των ακόλουθων ακολουθιών αριθμών:

$$(\alpha) a_k = \frac{1}{k!}, k = 0, 1, \dots, (\beta) b_k = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, m-1 \\ \frac{1}{(k-m)!}, & k = m, m+1, \dots \end{cases}$$

Λύση. (α) Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για όλες τις πραγματικές τιμές της μεταβλητής t .

$$(\beta) B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{(k-m)!} t^k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} t^{m+r} = t^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = t^m e^t.$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το μετασχηματισμό $k - m = r$. $\square$

Ερώτημα. Πως μπορούμε να βρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ αν μας δίνεται η γεννήτριά της $A(t)$;

Αρκεί να γράψουμε την $A(t)$ σε μορφή αθροίσματος δυνάμεων του t . Ο συντελεστής του όρου t^k μας δείχνει ποιος είναι ο γενικός όρος της ακολουθίας $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$.

Παράδειγμα 5.3 Να βρεθούν οι ακολουθίες των οποίων οι γεννήτριες δίνονται από τους τύπους:

$$(\alpha) A(t) = \frac{1}{1-5t}, (\beta) B(t) = (2t^2 + 3)^{30}$$

$$\textbf{Λύση.} (\alpha) A(t) = \frac{1}{1-5t} = \sum_{k=0}^{\infty} (5t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k t^k.$$

Η ζητούμενη ακολουθία είναι η $a_k = 5^k, k = 0, 1, 2, \dots$ δηλαδή η $1, 5, 5^2, 5^3, \dots$

(β) Από το διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε:

$$B(t) = (2t^2 + 3)^{30} = \sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} (2t^2)^r 3^{30-r} = \sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} 3^{30-r} 2^r t^{2r},$$

οπότε για την αντίστοιχη ακολουθία $\{b_k\}_{k=0,1,\dots}$ έχουμε:

$$b_r = \begin{cases} 0, & r = 2k + 1, k = 0, 1, \dots \\ \binom{30}{r} 3^{30-r} 2^r, & r = 2k, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad \square$$

5.2 Πράξεις μεταξύ γεννητριών

$$\text{Αν } A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

οι γεννήτριες των ακολουθιών $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ και $\{b_k\}_{k=0,1,\dots}$ αντίστοιχα,

$$\text{τότε } A(t) + B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad A(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k, \quad \text{όπου } c_k = a_k + b_k, k = 0, 1, \dots \text{ και}$$

$$d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r} = \sum_{r=0}^k a_{k-r} b_r, k = 0, 1, 2, \dots$$

Η ακολουθία $\{c_k\}_{k=0,1,\dots}$ καλείται άθροισμα των ακολουθιών $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ και $\{b_k\}_{k=0,1,\dots}$ ενώ η

$\{d_k\}_{k=0,1,\dots}$ καλείται γινόμενο Cauchy ή συνέλιξη των ακολουθιών $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ και $\{b_k\}_{k=0,1,\dots}$. Αν

$c \in \mathfrak{R}$, τότε η $cA(t)$ θα είναι η γεννήτρια της ακολουθίας $\{ca_k\}_{k=0,1,\dots}$ δηλαδή

$$cA(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) t^k. \quad \text{Η συνέλιξη ακολουθιών είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό συνδυαστικών}$$

αθροισμάτων.

Παράδειγμα 5.4 Έστω $A(t)$ η γεννήτρια της ακολουθίας αριθμών $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$.

(α) Σε ποια ακολουθία αριθμών αντιστοιχεί η συνάρτηση $A^2(t)$;

(β) Θεωρώντας την ακολουθία αριθμών $a_k = \binom{x}{k}, k = 0, 1, \dots, x \in \mathfrak{R}$ και χρησιμοποιώντας το (α),

δείξτε ότι:
$$\binom{2x}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{x}{r} \binom{x}{k-r}.$$

Λύση. (α) Από τον τύπο της συνέλιξης για $b_k = a_k, k = 0, 1, 2, \dots$, έπεται ότι:

$$A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \text{ όπου } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r} = \sum_{r=0}^k a_r a_{k-r}.$$

(β) Για $a_k = \binom{x}{k}, k = 0, 1, \dots$, βρίσκουμε:

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k = (1+t)^x \text{ οπότε } A^2(t) = (1+t)^{2x}.$$

Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος με το διωνυμικό τύπο, βρίσκουμε: $A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2x}{k} t^k$ ή

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2x}{k} t^k \Rightarrow \binom{2x}{k} = c_k = \sum_{r=0}^k a_r a_{k-r} = \sum_{r=0}^k \binom{x}{r} \binom{x}{k-r}. \quad \square$$

Αν η ακολουθία $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει φυσικός m τέτοιος ώστε

$a_m \neq 0$ και $a_k = 0$, για κάθε $k > m$, τότε η αντίστοιχη γεννήτρια $A(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$ είναι ένα

πολυνώνιο βαθμού m και ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής t . Η συνάρτηση $A(t)$ είναι παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη σε όλο το $\mathfrak{R}$. Μπορούμε να γράψουμε:

$$A'(t) = 0 + a_1 + 2a_2 t + \dots + m a_m t^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) a_{k+1} t^k$$

$$t A'(t) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \dots + m a_m t^m = \sum_{k=0}^m k a_k t^k$$

$$\int_0^t A(x) dx = a_0 \int_0^t dx + a_1 \int_0^t x dx + a_2 \int_0^t x^2 dx + \dots + a_m \int_0^t x^m dx$$

$$= a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \dots + a_m \frac{t^{m+1}}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_{k-1}}{k} t^k.$$

Άρα, η συνάρτηση $A'(t)$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ma_m$, η συνάρτηση

$tA'(t)$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $0, a_1, 2a_2, \dots, ma_m$ ενώ η συνάρτηση $B(t) = \int_0^t A(x)dx$

είναι γεννήτρια της ακολουθίας $0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_m}{m+1}$.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται και για γεννήτριες μη πεπερασμένων ακολουθιών, αν κάθε φορά οι συνθήκες ομαλότητας που επιτρέπουν την εναλλαγή της παραγωγίσης και της άθροισης ή της ολοκλήρωσης και της άθροισης πρέπει να εξασφαλίζεται ότι ικανοποιούνται. Οι γεννήτριες συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στη Συνδυαστική έχουν συνήθως όλες αυτές τις επιθυμητές ιδιότητες.

Η ακόλουθη πρόταση σχετίζεται με παραγωγή και ολοκλήρωση γεννητριών.

Πρόταση 5.2.1 Έστω $A(t)$ η γεννήτρια της ακολουθίας $\{a_k\}_{k=0,1,\dots}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Η γεννήτρια της ακολουθίας $\{(k+1)a_{k+1}\}_{k=0,1,\dots}$ είναι η $A'(t)$.

(β) Η γεννήτρια της ακολουθίας $\{ka_k\}_{k=0,1,\dots}$ είναι η $tA'(t)$.

(γ) Η γεννήτρια της ακολουθίας $\left\{\frac{a_{k-1}}{k}\right\}_{k=1,2,\dots}$ είναι η $B(t) = \int_0^t A(x)dx$.

Παράδειγμα 5.5 Να βρεθεί η γεννήτρια των ακολουθιών $\{k\}_{k=0,1,\dots}$ και $\{k^2\}_{k=0,1,\dots}$.

Λύση. Η σταθερή ακολουθία $a_k = a, k = 0, 1, \dots$ έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} at^k = a(1 + t + t^2 + \dots) = a \frac{1}{1-t}, |t| < 1.$$

Για $a = 1$, $A(t) = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$. Συνεπώς, η γεννήτρια $B(t)$ της ακολουθίας με γενικό όρο:

$$b_k = k = k \cdot 1 = k \cdot a_k, a_k = 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Θα δίνεται από τον τύπο: } B(t) = tA'(t) = t \left(\frac{1}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Ομοίως η γεννήτρια $C(t)$ της ακολουθίας με γενικό όρο $c_k = k^2 = k \cdot k = kb_k, k = 0, 1, 2, \dots$ θα

$$\text{δίνεται από τον τύπο: } C(t) = tB'(t) = t \left(\frac{t}{(1-t)^2} \right)' = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}. \quad \square$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευαστούν αναδρομικές σχέσεις για τις αντίστοιχες ακολουθίες αριθμών.

Παράδειγμα 5.6 Έστω n ένας θετικός ακέραιος και $\{H_k(n)\}_{k=0,1,\dots}$ η ακολουθία αριθμών που

ορίζεται από τη γεννήτρια: $A_n(t) = \sum_{k=0}^{3n} H_k(n)t^k = (1+t+t^2+t^3)^n$. Αφού διαπιστωθεί ότι ισχύει

η σχέση: $A_n'(t) = nA_{n-1}(t) + 2ntA_{n-1}(t) + 3nt^2A_{n-1}(t)$ να δειχτεί ότι για τους αριθμούς $H_k(n)$

ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$H_k(n) = \frac{n}{k} \{H_{k-1}(n-1) + 2H_{k-2}(n-1) + 3H_{k-3}(n-1)\}, 3 \leq k \leq 3n-2.$$

Λύση. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $A_n(t) = (1+t+t^2+t^3)^n$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_n'(t) &= n(1+t+t^2+t^3)^{n-1}(1+t+t^2+t^3)' = nA_{n-1}(t)(1+2t+3t^2) \\ &= nA_{n-1}(t) + 2ntA_{n-1}(t) + 3nt^2A_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο δεξιό μέλος την $A_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{3(n-1)} H_k(n-1)t^k$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
& nA_{n-1}(t) + 2ntA_{n-1}(t) + 3nt^2A_{n-1}(t) \\
&= n \sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^k + 2n \sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^{k+1} + 3n \sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^{k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{3n-3} nH_k(n-1)t^k + \sum_{r=1}^{3n-2} 2nH_{r-1}(n-1)t^r + \sum_{r=2}^{3n-1} 3nH_{r-2}(n-1)t^r \\
&= nH_0(n-1) + \{nH_1(n-1) + 2nH_0(n-1)\}t + \sum_{k=2}^{3n-3} \{nH_k(n-1) + 2nH_{k-1}(n-1) + 3nH_{k-2}(n-1)\}t^k \\
&+ \{2nH_{3n-3}(n-1) + 3nH_{3n-4}(n-1)\}t^{3n-2} + 3nH_{3n-3}(n-1)t^{3n-1}.
\end{aligned}$$

Όμως, $A'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)H_{k+1}(n)t^k$ οπότε:

$$k=0: H_1(n) = nH_0(n-1)$$

$$k=1: 2H_2(n) = n\{H_1(n-1) + 2H_0(n-1)\}$$

$$k=k: (k+1)H_{k+1}(n) = n\{H_k(n-1) + 2H_{k-1}(n-1) + 3H_{k-2}(n-1)\}, 2 \leq k \leq 3n-3$$

$$k=3n-2: (3n-1)H_{3n-1}(n) = n\{2H_{3n-3}(n-1) + 3H_{3n-4}(n-1)\}$$

$$k=3n-1: H_{3n}(n) = H_{3n-3}(n-1).$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την τρίτη ισότητα αν θέσουμε k το $k-1$. $\square$