

ΥΠΕΝΟΤΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (ή αντίστοιχα, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) των X, Y ορίζεται ως η συνάρτηση P τέτοια ώστε: $P_{XY} \equiv P(x, y) \equiv P(X=x, Y=y)$, αν X, Y διακριτές

(ή ως η συνάρτηση f , αν X, Y συνεχείς, τέτοια ώστε, για κάθε $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $P[(X, Y) \in G] = \iint_{(x, y) \in G} f(x, y) dx dy$).

Παράδειγμα για τη συνεχή περίπτωση: Αν $G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = A \times B$ τότε αν $A = (-\infty, a]$, $B = (-\infty, b]$ ισχύει ότι:

$$P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\} = P[X \leq a, Y \leq b] = F(a, b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy$$

Η συνάρτηση F ονομάζεται από κοινού συνάρτηση κατανομής ή συχνοκατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y . Οι συναρτήσεις P_{XY} και f ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$P_{XY} \geq 0, f(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \text{ και}$$

$$\sum_x \sum_y P_{XY} = 1, \text{ αν } X, Y \text{ διακριτές}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1, \text{ αν } X, Y \text{ συνεχείς.}$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς a και b έχουμε: $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b) = f(a, b)$.

Η τελευταία σχέση ^{συνδέει την} από κοινού ^{συνάρτηση πυκνότητας} πιθανότητας και την από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y στην περίπτωση που η $F(a, b)$ είναι συνεχής.

Αποδεικνύεται ότι: $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x,y)$ και $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x,y)$.

Οι συναρτήσεις $F_X(x)$, $F_Y(y)$ καλούνται περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X , Y αντίστοιχα. Αν X, Y διακριτές τ.ρ. οι περιθώριες κατανομές πιθανότητας των X και Y υπολογίζονται ως εξής:

$$P_X(x) = P(X=x) = \sum_y P(x,y) \text{ και } P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x P(x,y)$$

Αν X, Y συνεχείς, οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας είναι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \text{ και } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx.$$

#1 Έστω η διακριτή διανυσματική τυχαία μεταβλητή (X, Y) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(x,y) = \frac{8}{3^x 5^y}$, $x=1, 2, \dots$

και $y=1, 2, \dots$. (α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τ.ρ. X και Y . (β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 2, Y \geq 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Λύση (α) Είναι } P_X(x) &= \sum_{y=1}^{\infty} p(x,y) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{8}{3^x 5^y} = \frac{8}{3^x 5} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{y-1} \\ &= \frac{8}{5 \cdot 3^x} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{3^x}, x=1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{8}{3^x 5^y} = \frac{8}{5^y} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{4}{5^y}, y=1, 2, \dots$$

(β) Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{X < 2\}$ και $B = \{Y < 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } P(X \geq 2, Y \geq 2) &= 1 - P((X < 2) \cup (Y < 2)) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(X \leq 1) - P(Y \leq 1) + P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - f_X(1) - f_Y(1) + f(1,1) \end{aligned}$$

όπου $f_X(x), f_Y(y)$ είναι οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των τ.ρ. X, Y και $F(x,y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) .

$$F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X=1) = p_X(1) = \frac{2}{3}$$

$$F_Y(1) = P(Y \leq 1) = P(Y=1) = p_Y(1) = \frac{4}{5}$$

$$F(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X=1, Y=1) = p(1,1) = \frac{8}{15}$$

$$\text{Άρα, } P(X \geq 2, Y \geq 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$$

#2 Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των χρόνων ζωής X, Y δύο λαμπτήρων A, B σε χιλιάδες ώρες δίνεται από τον τύπο:
 $F(x,y) = (1 - e^{-4x^2})(1 - e^{-3y})$, $x, y > 0$ και $F(x,y) = 0$, αλλιώς.

(α) Να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X και Y .

(β) Ποια είναι η πιθανότητα (i) και οι δύο λαμπτήρες να ζήσουν περισσότερο από 500 ώρες (ii) τουλάχιστον ένας από τους δύο λαμπτήρες να ζήσει περισσότερο από 500 ώρες;

(γ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τ.ρ. X και Y . Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διανυσματικής τ.ρ. (X, Y) ;

Λύση (α) Είναι $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x,y) = (1 - e^{-4x^2}) \lim_{y \rightarrow \infty} (1 - e^{-3y})$
 $= 1 - e^{-4x^2}, x > 0$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x,y) = (1 - e^{-3y}) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-4x^2}) = 1 - e^{-3y}, y > 0$$

(β) (i) Έστω τα ενδεχόμενα A : ο λαμπτήρας A ζει λιγότερο από 500 ώρες, δηλαδή $X < \frac{1}{2}$ και B : ο λαμπτήρας B ζει λιγότερο από 500 ώρες δηλαδή $Y < \frac{1}{2}$; Ζητάμε

την πιθανότητα: $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$ -4-
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

Είναι $P(A) = P(X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = 1 - e^{-4(\frac{1}{2})^2} = 1 - e^{-1} \approx 63\%$

$P(B) = P(Y < \frac{1}{2}) = F_Y(\frac{1}{2}) = 1 - e^{-3/2}$

$P(A \cap B) = P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1 - e^{-1})(1 - e^{-3/2})$

(ii) Ζητάρε την πιθανότητα: $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$
 $= 1 - P(A \cap B)$.

(δ) Είναι $f_X(x) = F_X'(x) = (1 - e^{-4x^2})' = 8x e^{-4x^2}, x > 0$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = (1 - e^{-3y})' = 3e^{-3y}, y > 0$

και $f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-4x^2}) 3e^{-3y}$

$= 3e^{-3y} 8x e^{-4x^2} = 24x e^{-3y} e^{-4x^2}$.

#3 Λαμβάνουμε έναν από τους αμέραιους 1, 2, 3, 4, 5. Εξαιρούμε κατόπιν, αν υπάρχουν, όλους τους μικρότερους ή ίσους αμέραιους ρ' αυτόν και παίρνουμε έναν από αυτούς που απέμειναν. (π.χ. αν στην αρχή πάρουμε τον 2 θα πάρουμε κατόπιν έναν από τους αμέραιους 2, 3, 4, 5). Έστω X και Y οι τ.ρ. που εκφράζουν τους αριθμούς που λαμβάνουμε κατά την πρώτη και κατά τη δεύτερη φορά, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.ρ. X, Y .

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τ.ρ. X, Y .

Λύση (α), (β) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των -5-

X, Y και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας δίνονται από τον πίνακα:

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	$P_Y(y)$
1	$\frac{1}{25}$	0	0	0	0	$\frac{1}{25} = \frac{12}{300}$
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{27}{300}$
3	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{47}{300}$
4	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{77}{300}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{137}{300}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

π.χ. $P(X=1, Y=1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ $P(X=3, Y=3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$
 $P(X=2, Y=2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ 42π.

#4 Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο διακριτών τ.ρ.

X, Y είναι $P(x, y) = \begin{cases} c(2x+y), & x=0, 1, 2, y=0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά c . (β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X=2, Y=1)$ και $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.

Λύση (α) Θα πρέπει $P(x, y) \geq 0 \forall x, y \Rightarrow c \geq 0$

Επιπλέον θα πρέπει $\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$ δηλ.

$$\sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^3 P(x, y) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^2 c(2x + 2x+1 + 2x+2 + 2x+3) = 1$$

$$\Rightarrow c \sum_{x=0}^2 (8x+6) = 1 \Rightarrow c(6 + 14 + 22) = 1 \Rightarrow c \cdot 42 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{42}}$$

Άρα $P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{42}(2x+y), & x=0,1,2, y=0,1,2,3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(β) $P(X=2, Y=1) = \frac{1}{42}(2 \cdot 2 + 1) = \frac{5}{42}$

$$P(X \geq 1, Y \leq 2) = \sum_{x \geq 1} \sum_{y \leq 2} P(x,y) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=0}^2 P(x,y)$$

$$= \sum_{x=1}^2 \frac{1}{42}(2x + 2x + 1 + 2x + 2) = \frac{1}{42} \sum_{x=1}^2 (6x + 3)$$

$$= \frac{1}{42}(9 + 15) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

#5 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας δια-
νυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \frac{3x(x+y)}{5}, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2 \text{ και } f(x,y) = 0, \text{ αλλού.}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2)$

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x), f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$.

(δ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_X(x), F_Y(y)$.

Λύση (α) $P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_1^2 \frac{3x(x+y)}{5} dy dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{5} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{5} \left(2 + 2x - x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3x^2}{5} + \frac{9x}{10} \right) dx$$

$$= \left[\frac{3x^3}{5 \cdot 3} + \frac{9x^2}{2 \cdot 10} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^3}{5} + \frac{9}{20} x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{80}$$

$$(b) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \frac{3x}{5} \int_0^2 (x+y) dy = \frac{3x}{5} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{3x}{5} (2x+2) = \frac{6x(x+1)}{5}, 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 \frac{3x(x+y)}{5} dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{5} + \frac{3xy}{5} \right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{5} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{5} y \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{5} \frac{1}{3} + \frac{3}{5} y \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} y, 0 < y < 2.$$

$$(c) F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{3t(t+s)}{5} ds dt$$

$$= \int_0^x \left[\frac{3t^2}{5} s + \frac{3t}{5} \frac{s^2}{2} \right]_0^y dt = \int_0^x \frac{3}{5} \left(t^2 y + t \frac{y^2}{2} \right) dt$$

$$= \frac{3}{5} \left[\frac{t^3}{3} y + \frac{t^2}{2} \frac{y^2}{2} \right]_0^x = \frac{3}{5} \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2}{2} \frac{y^2}{2} \right)$$

$$= \frac{yx^3}{5} + \frac{3x^2 y^2}{20}, 0 < x < 1, 0 < y < 2.$$

$$(d) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_0^x \frac{6s(s+1)}{5} ds = \int_0^x \left(\frac{6s^2}{5} + \frac{6s}{5} \right) ds$$

$$= \left[\frac{6}{5} \frac{s^3}{3} + \frac{6}{5} \frac{s^2}{2} \right]_0^x = \frac{6}{5} x^2 \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \right), 0 < x < 1$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(s) ds = \int_0^y \left(\frac{1}{5} + \frac{3s}{10} \right) ds = \frac{1}{5} y + \frac{3}{20} y^2, 0 < y < 2.$$

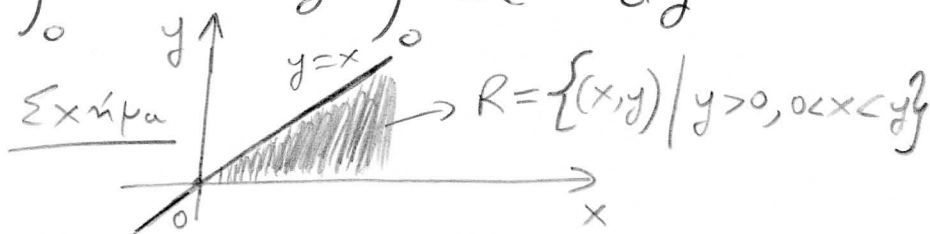
#6 Η από κοινού συνάρτηση πηνότητας της διανυσματικής τ.ρ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο: $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & x,y \in (0,\infty) \\ 0, & \text{αλλως} \end{cases}$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) $P(X > 1, Y < 1)$

(β) $P[X < Y]$ και (γ) $P[X < a]$

$$\begin{aligned} \text{Λύση (α)} \quad P[X > 1, Y < 1] &= \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x} e^{-2y} dx dy = \int_0^1 2e^{-2y} [-e^{-x}]_1^\infty dy \\ &= e^{-1} \int_0^1 2e^{-2y} dy = 2e^{-1} \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^1 = e^{-1} [-e^{-2y}]_0^1 \\ &= e^{-1} (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad P[X < Y] &= \iint_{\{(x,y) | x < y\}} 2e^{-x} e^{-2y} dx dy = \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x} e^{-2y} dx dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y} (1 - e^{-y}) dy = \int_0^\infty 2e^{-2y} dy - \int_0^\infty 2e^{-3y} dy \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



$$\text{(γ)} \quad P[X < a] = \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-2y} e^{-x} dy dx = \int_0^a e^{-x} dx = 1 - e^{-a}.$$

#7 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διανοσρατικής τ.ρ. (X, Y) δίνεται από τον τύπο $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y \in (0, \infty) \\ 0, & x, y \notin (0, \infty) \end{cases}$.
Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. X/Y .

$$\begin{aligned} \text{Λύση} \quad &\text{Υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της τ.ρ. } X/Y. \text{ Για } a > 0, \\ F_{X/Y}(a) &= P[X/Y \leq a] = \iint_{X/Y \leq a} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-ay}) e^{-y} dy = \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{(a+1)} \right]_0^\infty = 1 - \frac{1}{(a+1)}. \end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς a , θα βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. X/Y .

$$f'_{X/Y}(a) = f_{X/Y}(a) = (a+1)^{-2}, \quad a > 0.$$

