

ΥΠΕΝΟΤΥΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός: Δύο τ.ρ. X και Y θα καλούνται ανεξάρτητες αν διακάθε ζεύγος συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} P\{Y \in B\}$$

Αποδεικνύεται ότι ο παραπάνω ορισμός ισοδυναμεί με τη σχέση: $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad \forall x, y$. Στη συνεχή περίπτωση η σχέση ανεξαρτησίας ισοδυναμεί με τη σχέση $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y$. Στη διακριτή περίπτωση η σχέση ανεξαρτησίας γίνεται $P(x, y) = P_X(x) P_Y(y) \quad \forall x, y$. Ισχύει η ανόλογη πρόταση:

Πρόταση: Αν X, Y τ.ρ. και g μία συνάρτηση των X, Y έχουμε ότι:

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) P(x, y), & \text{αν } X, Y \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, & \text{αν } X, Y \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η $E[g(X, Y)]$.

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τότε για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $h(x)$ και $g(y)$ ισχύει ότι: $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ με την προϋπόθεση ότι οι μέσες τιμές υπάρχουν.

Ορισμός: Αν X, Y είναι διακριτές τ.ρ. ορίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y=y$

$$\text{ως: } P_{X|Y}(x|y) = P\{X=x|Y=y\} = \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} = \frac{P(x, y)}{P_Y(y)}$$

$$\forall y: P_Y(y) > 0.$$

Ομοίως, αν X, Y συνεχείς τ.ρ. με από κοινού συνάρτηση

πυκνότητας $f(x,y)$, η δεσφρευμένη συνάρτηση πυκνότητας ⁻²⁻
 πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y=y$ ορίζεται $\forall y: f_Y(y) > 0$
 ως: $f_{X|Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

Η δεσφρευμένη συνάρτηση κατανομής της X δοθέντος ότι $Y=y$ ορίζεται $\forall y: f_Y(y) > 0$ ως:

$$F_{X|Y}(x/y) = \sum_{a \leq x} f_{X|Y}(a/y) \text{ στη διακριτή περίπτωση}$$

και αν $A = (-\infty, a]$ η δεσφρευμένη συνάρτηση κατανομής της X δοθέντος ότι $Y=y$ ορίζεται ως:

$$F_{X|Y}(a/y) = P(X \leq a | Y=y) = \int_{-\infty}^a f_{X|Y}(x/y) dx$$

#1 Οι χρόνοι ζωής (σε 100-άδες ώρες) δύο μηχανοοργανισμών σε μία ποδυομένη περιοχή περιγράφονται από δύο συνεχείς τ.ρ. X, Y με από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x,y) = (1 - xe^{-x} - e^{-x})(1 - e^{-y^2})$, $x > 0, y \geq 0$

(α) Να εξεταστεί αν οι τ.ρ. X και Y είναι ανεξάρτητες.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο μηχανοοργανισμούς να ζήσει στη συγκεκριμένη περιοχή το πολύ 2000 ώρες.

Λύση (α) Η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.ρ. X δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x,y) = (1 - xe^{-x} - e^{-x}) \lim_{y \rightarrow \infty} (1 - e^{-y^2})$$

$$= 1 - e^{-x} x - e^{-x}, \quad x \geq 0 \text{ ενώ της } Y \text{ δίνεται από:}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x,y) = (1 - e^{-y^2}) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - xe^{-x} - e^{-x}) = 1 - e^{-y^2}, \quad y \geq 0.$$

$$\text{Είναι } F_X(x) F_Y(y) = (1 - xe^{-x} - e^{-x})(1 - e^{-y^2}) = F(x, y) \quad -3-$$

$\forall x, y$ συνεπώς οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

(β) Αν ορίσουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο χρόνος ζωής του πρώτου μικοοργανισμού είναι το πολύ 2000 ώρες

B: ο χρόνος ζωής του δεύτερου μικοοργανισμού είναι το πολύ 2000 ώρες, η ζητούμενη πιθανότητα

$$\text{Θα είναι ίση με: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Όπως } P(A) = P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - 2e^{-2} - e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \approx 0.59$$

$$P(B) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = 1 - e^{-4} \approx 0.98$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των τ.ρ. X, Y

$$P(A \cap B) = P(X \leq 2, Y \leq 2) = P(X \leq 2) P(Y \leq 2) \\ = (1 - 3e^{-2})(1 - e^{-4}) \approx 0.58$$

$$\text{Άρα } P(A \cup B) \approx 0.59 + 0.98 - 0.58 = 0.99$$

#2 Ένας άνδρας και μία γυναίκα έχουν συμφωνήσει να συναντηθούν σε ένα φαχαροπλαστείο κάποια χρονική στιγμή μεταξύ 12:00 και 13:00 το μεσημέρι. Υποθέτουμε ότι ο άνδρας φθάνει στο φαχαροπλαστείο στις $12 + X$ και η γυναίκα φθάνει στις $12 + Y$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι τ.ρ. X και Y είναι ανεξάρτητες και ότι ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο άνδρας να περιμένει τη γυναίκα ή αντίστροφα για περισσότερο από δέκα λεπτά, δηλαδή να υπολογιστεί

η πιθανότητα $P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\}$.

Λύση Το ενδεχόμενο $\{ |X-Y| > \frac{1}{6} \}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\{ |X-Y| > \frac{1}{6} \} = \{ X-Y > \frac{1}{6} \} \cup \{ X-Y < -\frac{1}{6} \}$$

και τα δύο ενδεχόμενα είναι ζένα μεταξύ τους. Άρα

$$P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\} = P\{Y + \frac{1}{6} < X\} + P\{X + \frac{1}{6} < Y\}$$

Λόγω
συμμετρίας

$$2 P\{X + \frac{1}{6} < Y\} = 2 \iint_A f(x,y) dx dy$$

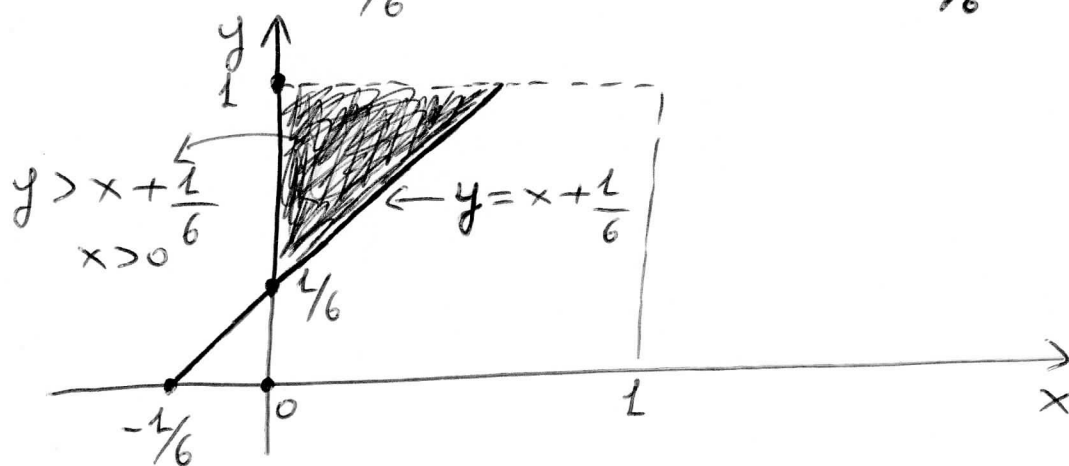
$$A = \{(x,y) | x + \frac{1}{6} < y\}$$

όπου $f(x,y)$ είναι η πυκνότητα της (X,Y) . Λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y έχουμε:

$$P\{|X-Y| > \frac{1}{6}\} = 2 \iint_A f_X(x) f_Y(y) dx dy = 2 \iint_A dx dy$$

Βλέπε
Σχήμα

$$2 \int_{\frac{1}{6}}^1 \left(\int_0^{y-\frac{1}{6}} dx \right) dy = 2 \int_{\frac{1}{6}}^1 (y - \frac{1}{6}) dy = 2 \frac{25}{72} = \frac{25}{36}$$



#3 Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διαμετρητικής τ.ρ. (X,Y) είναι $p(x,y) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y}$, $x,y=0,1,2,\dots$. Να εξεταστεί αν οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες και να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\{X \geq 2\} \cup \{Y \leq 2\})$.

Λύση Για τη περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τ.ρ. X έχουμε:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^x \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^y \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, x=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

Για τη περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τ.ρ. Y έχουμε:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2y}, y=0,1,\dots \end{aligned}$$

Οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες διότι $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ για όλα τα $x,y=0,1,\dots$. Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των τ.ρ. X, Y έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2 \cup Y \leq 2\} &= P\{X \geq 2\} + P\{Y \leq 2\} - P\{X \geq 2, Y \leq 2\} \\ &= 1 - P\{X \leq 1\} + P\{Y \leq 2\} - [1 - P(X \leq 1)]P(Y \leq 2) \end{aligned}$$

$$\text{Όπως } P(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(Y \leq 2) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} = \frac{63}{64}$$

Συνεπώς

$$P(X \geq 2 \cup Y \leq 2) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{63}{64} - \left(1 - \frac{3}{4}\right) \frac{63}{64} = \frac{253}{256}$$

#4 Η από κοινού συνάρτηση πημανότητας πιθανότητας των τ.ρ. X, Y είναι: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{28} (4x+2y+1), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις

(β) Οι δεσφευμένες συναρτήσεις

(γ) Η πιθανότητα $P(X \leq 1, Y \leq 1)$

Λύση

$$(α) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^2 \frac{1}{28} (4x+2y+1) dy$$

$$= \frac{1}{28} \int_0^2 (4x+2y+1) dy = \frac{1}{28} \left\{ 4x[y]_0^2 + [y^2]_0^2 + [y]_0^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{28} (8x+6) = \frac{2(4x+3)}{28} = \frac{1}{14} (4x+3), 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{δηλ. } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{14} (4x+3), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^2 \frac{1}{28} (4x+2y+1) dx$$

$$= \frac{1}{28} \left\{ \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 2y[x]_0^2 + [x]_0^2 \right\} = \frac{1}{28} \left(\frac{4}{2} 2^2 + 2y \cdot 2 + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{28} (8+4y+2) = \frac{2(2y+5)}{28} = \frac{2y+5}{14}, 0 \leq y \leq 2$$

$$\text{δηλαδή } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{14} (2y+5), & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(β) \text{ Είναι } f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{28} (4x+2y+1)}{\frac{1}{14} (2y+5)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(4x+2y+1)}{(2y+5)}, \begin{matrix} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

$$\text{και } f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{28} (4x+2y+1)}{\frac{1}{14} (4x+3)} = \frac{1}{2} \frac{(4x+2y+1)}{4x+3},$$

$$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

$$(8) P(X \leq 1, Y \leq 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} \int_{-\infty}^1 f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{1/2} \int_0^1 \frac{1}{28} (4x + 2y + 1) dx dy$$

$$= \frac{1}{28} \int_0^{1/2} \left\{ 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 2y [x]_0^1 + [x]_0^1 \right\} dy$$

$$= \frac{1}{28} \int_0^{1/2} (2 + 2y + 1) dy = \frac{1}{28} \left\{ \left[\frac{2y^2}{2} \right]_0^{1/2} + [3y]_0^{1/2} \right\}$$

$$= \frac{1}{28} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{28} \frac{7}{4} = \frac{1}{16}.$$

#5 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.ρ. με $E(X^4) = 2$, $E(Y^2) = 1$, $E(X^2) = 1$ και $E(Y) = 0$ να βρεθεί η $\text{var}(X^2 Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Λύση } \text{var}(X^2 Y) &= E[(X^2 Y)^2] - [E(X^2 Y)]^2 \\ &= E(X^4 Y^2) - [E(X^2) E(Y)]^2 = E(X^4) E(Y^2) - [E(X^2) E(Y)]^2 \\ &= 2 \cdot 1 - [E(X^2) E(Y)]^2 = 2 \cdot 1 - (1 \cdot 0)^2 = 2. \end{aligned}$$

#6 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της συνεχούς τ.ρ. (X, Y) ορίζεται ως: $f(x, y) = x e^{-x(y+1)}$, $x, y > 0$ και $f(x, y) = 0$, αλλιώς.

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X, Y .

(β) Οι δεσφευμένες συναρτήσεις $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

(δ) Η δεσφενμένη συνάρτηση κατανομής $f_{X|Y}(x/y)$.

-8-

Λύση (α) Για $y > 0$ έχουμε:

$$f_X(x) = x e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = x e^{-x} \left[-\frac{1}{x} e^{-xy} \right]_0^{\infty} \\ = x e^{-x} \left[-\frac{1}{x} (0 - 1) \right] = e^{-x}, x > 0$$

Για $x > 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{y+1} \int_0^{\infty} x(y+1) e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{(y+1)^2}, y > 0. \text{ Το τελεν-}$$

ταίο ομοιόσημα είναι ίσο με τη μέση τιμή της ευθετικής κατανομής με παράμετρο $y+1$.

$$(β) \text{ Για } y > 0, f_{X|Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = x e^{-x(y+1)} (y+1)^2, x > 0$$

$$\text{και για } x > 0, f_{Y|X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = x e^{-xy}, y > 0$$

(δ) Για $y < 0$, αν $x \geq 0$ τότε $f_{X|Y}(s/y) = 0$ για κάθε $s \leq x$
άρα $f_{X|Y}(x/y) = 0$, ενώ αν $x > 0$ τότε

$$f_{X|Y}(x/y) = (y+1)^2 \int_0^x s e^{-s(y+1)} ds$$

$$= (y+1)^2 \int_0^x s \left(-\frac{1}{(y+1)} e^{-s(y+1)} \right)' ds$$

$$= (y+1)^2 \left(\left[-\frac{s}{(y+1)} e^{-s(y+1)} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{(y+1)} e^{-s(y+1)} ds \right)$$

$$= (y+1)^2 \left(-\frac{x}{(y+1)} e^{-x(y+1)} + \frac{1}{(y+1)} \int_0^x e^{-s(y+1)} ds \right)$$

$$= (y+1)^2 \left(-\frac{x}{(y+1)} e^{-x(y+1)} + \frac{1}{(y+1)} \left(-\frac{1}{(y+1)} e^{-x(y+1)} \right)^x \right)$$

$$= (y+1)^2 \left(-\frac{x}{(y+1)} e^{-x(y+1)} - \frac{1}{(y+1)^2} e^{-x(y+1)} + \frac{1}{(y+1)^2} \right)$$

$$= -x(y+1) e^{-x(y+1)} - e^{-x(y+1)} + 1$$

$$= e^{-x(y+1)} (-x(y+1) - 1) + 1$$

$$= -e^{-x(y+1)} (1 + x(y+1)) + 1$$

$$= 1 - e^{-x(y+1)} (1 + x(y+1)).$$