

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣΑθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Αν η τ.ρ. X αναπαριστά το εισόδημα του άνδρα σε μία οικογένεια και Y η τ.ρ. που αναπαριστά το εισόδημα της γυναίκας συχνά μας ενδιαφέρει η κατανομή του αθροίσματος $X+Y$ δηλαδή η κατανομή του οικογενειακού εισοδήματος. Με τη χρήση των ροπογεννητριών υπάρχει η δυνατότητα να καθορίσουμε αυτή την κατανομή αν οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.ρ. για τις οποίες οι ροπογεννήτριες $M_{X_i}(t)$, $i=1, \dots, n$ υπάρχουν για κάποιο κοινό διάστημα Δ των τιμών $t \in \mathbb{R}$. Τότε, για τη ροπογεννήτρια του αθροίσματος $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ ισχύει ότι:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t), \quad \forall t \in \Delta.$$

Συνεπώς, αν $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.ρ. και $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, τότε: $M_Y(t) = [M_X(t)]^n$ (1)

Το Θεώρημα παρέχει μία μέθοδο καθορισμού της κατανομής ενός γραμμικού συνδυασμού ανεξάρτητων τ.ρ. $X_1, \dots, X_n$ διότι, η ροπογεννήτρια καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή μιας τ.ρ. X . Προφανώς, στη σχέση (1) παραπάνω, η τ.ρ. X είναι εκείνη που ακολουθεί την κοινή κατανομή των ισόνομων τ.ρ. $X_1, \dots, X_n$. Αντίστοιχα Θεωρήματα ισχύουν για $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.ρ. με τη χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων και ροπογεννητριών πιθανοτήτων.

Αντίστοιχα, $\phi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(a_i t)$ και $G_Y(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(a_i t)$,

για ευθείες τις τιμές του t για τις οποίες $G_{X_i}(a_i t) < \infty$.

-2-

#1 Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ και οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες τότε δείξτε ότι $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Λύση Η λύση θα δοθεί με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Έστω $\phi_X, \phi_Y, \phi_{X+Y}$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των τ.ρ. $X, Y, X+Y$, αντίστοιχα. Τότε, αφού οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες ισχύει ότι $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως } \phi_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^x}{x!} = e^{-\lambda_1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 e^{it})^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 e^{it}} = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Ομοίως, } \phi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}. \text{ Άρα, } \phi_{X+Y}(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)e^{it} - (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2ος τρόπος. Το ενδεχόμενο $\{X+Y=i\}$, $i=0,1,\dots$ μπορεί να γραφεί ως η κοινή των ζένων μεταξύ τους ενδεχομένων $\{X=k\}$ και $\{Y=i-k\}$, $k=0,\dots,i$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X+Y=i\} &= \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\} \underset{\substack{\uparrow \\ X, Y \text{ ανεξάρτητες}}}{=} \sum_{k=0}^i P\{X=k\} P\{Y=i-k\} \\ &= \sum_{k=0}^i e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^i \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{i-k}}{k! (i-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^i \frac{i!}{k! (i-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{i!} (\lambda_1 + \lambda_2)^i \end{aligned}$$

Συνεπώς, $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

#2 Αν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και X, Y ανεξάρτητες

τυχαίες μεταβλητές, τότε $aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$ -3-
όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση Έστω M_X, M_Y, M_{aX+bY} οι ροπογεννήτριες των τ.μ.
 $X, Y, aX+bY$, αντίστοιχα. Αφού X, Y ανεξάρτητες τ.μ. διαδο-
χικά έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{aX+bY}(t) &= E(e^{t(aX+bY)}) = E(e^{taX+tbY}) \\ &= E(e^{taX}) E(e^{tbY}) = M_X(ta) M_Y(tb) \end{aligned}$$

Όπως, αν $Z \sim N(0,1)$ τότε

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2-2tz}{2}\right\} dz \stackrel{+t^2}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(z-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right\} dz = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{\frac{t^2}{2}} \text{όπου} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \\ &\uparrow \\ y &= z-t \end{aligned}$$

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Θέτουμε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } M_X(t) &= E(e^{tX}) = E(e^{t(\sigma Z + \mu)}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma Z}) \\ &= e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} = \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + t\mu\right\} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$M_{aX+bY}(t) = \exp\left\{\frac{\sigma_1^2 (ta)^2}{2} + t\mu_1 a\right\} \exp\left\{\frac{\sigma_2^2 (tb)^2}{2} + t\mu_2 b\right\} =$$

$$= \exp \left\{ \frac{(a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2) t^2}{2} + (a \mu_1 + b \mu_2) t \right\}, t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

#3 Αν $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ και X, Y είναι ανεξάρτητες τ.ρ. τότε $X + Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$.

Λύση Έστω G_X, G_Y, G_{X+Y} οι ροπογεννήτριες πιθανοτήτων των τ.ρ. $X, Y, X+Y$, αντίστοιχα. Αφού οι τ.ρ. X, Y είναι ανεξάρτητες, ισχύει ότι $G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$.

$$\text{Όπως } G_X(t) = \sum_{x=0}^n t^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (tp)^x (1-p)^{n-x} \\ = (tp + 1-p)^n. \text{ Ομοίως, } G_Y(t) = (tp + 1-p)^m$$

Συνεπώς, $G_{X+Y}(t) = (tp + 1-p)^{n+m}$ και $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$.

Σε κάθε ένα από τα τρία προηγούμενα παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε ενδεικτικά μία από τις τρεις συναρτήσεις (χαρακτηριστική συνάρτηση, ροπογεννήτρια, ροπογεννήτρια πιθανοτήτων). Είναι προφανές ότι σε κάθε παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες γεννήτριες συναρτήσεις.

Μέση τιμή και διασπορά αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών

Πρόταση Αν $X_1, \dots, X_n$ τ.ρ. όχι κατ' ανάγκην ανεξάρτητες, με $E[X_i] < \infty, i=1, \dots, n$ τότε: $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$.

Επίσης, αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.ρ. με $E(X_i) < \infty, i=1, \dots, n$

$$\text{Τότε: } E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n) \\ \text{var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n).$$

#4 Έστω ότι N άνδρες πεζάνε τα μαπέλα τους στο πάτωμα ενός δωρατίου. Τα μαπέλα ανακατεύονται και ο κάθε άνδρας διαλέγει ένα μαπέλο κατά τυχαίο τρόπο. Βρείτε την αναμενόμενη τιμή του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικιά τους μαπέλα.

Λύση Έστω η τ.φ. $X_i, i=1, \dots, N$ τέτοια ώστε $X_i=1$, αν ο άνδρας i διαλέγει το δικό του μαπέλο και $X_i=0$, αν ο άνδρας i δεν διαλέγει το δικό του μαπέλο. Έστω η τ.φ. $X = X_1 + \dots + X_N$. Ζητάμε να βρούμε την $E[X]$. Ισχύει ότι $E[X_i] = P\{X_i=1\} = \frac{1}{N}$ για κάθε $i=1, \dots, N$. Συνεπώς,
$$E[X] = E[X_1] + \dots + E[X_N] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

#5 Δέκα κυνηγοί περιμένουν να περάσει ένα σμήνος από δέκα κοτσύφια. Όταν περάσει το σμήνος, οι κυνηγοί πυροβολούν ταυτόχρονα αλλά ο καθένας διαλέγει το στόχο του τυχαία και ανεξάρτητα από τους άλλους. Αν ο κάθε κυνηγός πετυχαίνει το στόχο του με πιθανότητα, να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των κοτσυφιών που ξεφεύγουν από τους πυροβολισμούς των κυνηγών.

Λύση Έστω η τ.φ. $X_i, i=1, \dots, 10$ τέτοια ώστε $X_i=1$, αν το i -οστό κοτσύφι ξεφεύγει και $X_i=0$, αν το i -οστό κοτσύφι δεν ξεφεύγει από τους πυροβολισμούς των κυνηγών. Έστω η τ.φ. $X = X_1 + \dots + X_{10}$. Ζητάμε να βρούμε τη μέση τιμή $E(X)$. Ισχύει ότι $E(X) = E(X_1 + \dots + X_{10}) = E(X_1) + \dots + E(X_{10})$. Για κάθε $i=1, \dots, 10$ έχουμε: $E(X_i) = P\{X_i=1\}$. Ο κάθε κυνηγός, ανεξάρτητα από τους

άλλους, πετυχαίνει το i-οστό υποσέφι με πιθανότητα $\frac{p}{10}$. Άρα $P(X_i=1) = \left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$. Συνεπώς, $E(X) = 10\left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$.

#6 Ρίχνουμε ένα ζάρι. Η τ.ρ. Χ εκφράζει το διπλάσιο του αριθμού που δίνει το ζάρι και η τ.ρ. Υ παίρνει τις τιμές 1 και 3 αν ο αριθμός είναι περιττός ή άρτιος, αντίστοιχα. Να βρεθούν:

(α) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των Χ και Υ, καθώς και οι περιθώριες συναρτήσεις. (β) Η μέση τιμή και η διασπορά της τ.ρ. Χ+Υ.

Λύση(α) Ο δειγματικός χώρος είναι: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Η τ.ρ. Χ παίρνει τιμές 2, 4, 6, 8, 10, 12 και η Υ παίρνει τιμές 1, 3. Προφανώς οι τ.ρ. Χ, Υ δεν είναι ανεξάρτητες.

Ο πίνακας της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας των Χ και Υ με τις αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις δίνεται παρακάτω:

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	4	6	8	10	12	$P_Y(y)$
1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
$P_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(β) Η τ.ρ. Χ+Υ παίρνει τις τιμές 3, 5, 7, 9, 11, 13 και 15, με αντίστοιχες πιθανότητες που δίνονται στον πίνακα:

$x+y$	3	5	7	9	11	13	15
$p(x+y)$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

$$\text{Αρα } E(X+Y) = 5 \frac{1}{3} + 9 \frac{1}{3} + 13 \frac{1}{3} = 9$$

$$\text{και } E(X+Y)^2 = 25 \frac{1}{3} + 81 \frac{1}{3} + 169 \frac{1}{3} = 91,667. \text{ Σωστός}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X+Y) &= E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2 = 91,667 - 81 \\ &= 10,667. \end{aligned}$$

7