

ΥΠΕΝΟΤΗΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θα μελετήσουμε τις κατανομές συναρτήσεων τ.ρ. Θα ξεκινήσουμε με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Έστω X τ.ρ. με γνωστή κατανομή και $Y=h(X)$ μία συνάρτηση της X . Θέλουμε να βρούμε την κατανομή της Y . Αρχικά, για τις διακριτές τ.ρ. μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού που μας επιτρέπει να βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας μετασχηματιζόμενων διακριτών τ.ρ. Η μέθοδος του μετασχηματισμού με συνάρτηση πιθανότητας για τη διακριτή περίπτωση δίνεται από τη σχέση:

$$P_Y(y) = P[Y=y] = P[h(X)=y] = \sum_{\{x | h(x)=y\}} P\{X=x\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_Y(y) = \sum_{\{x | h(x)=y\}} P_X(x)}$$

#1 Η τ.ρ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον πίνακα:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

Να βρεθεί η κατανομή της τ.ρ. $Y=(X-1)^2$

Λύση Η τ.ρ. έχει σύνολο τιμών $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Η τ.ρ. Y παίρνει τις τιμές 0, 1, 4. Για την εύρεση της κατανομής της

$$Y \text{ έχουμε: } P\{Y=0\} = P\{(X-1)^2=0\} = P\{X=1\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y=1\} = P\{(X-1)^2=1\} = P\{X=0\} + P\{X=2\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y=4\} = P\{(X-1)^2=4\} = P\{X=3\} = \frac{2}{8}$$

-2-

Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.ρ. Y δίνεται στον πίνακα:

y	0	1	4
$P\{Y=y\}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Για τη συνεχή περίπτωση, αν X συνεχής τ.ρ. και ο μετασχηματισμός $Y=h(X)$ είναι "1-1", ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα (για τη συνεχή περίπτωση). Αν η τ.ρ. X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και η συνάρτηση $y=h(x)$ είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη, τότε η τ.ρ. $Y=h(X)$ είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|$.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί: $f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$, διότι $y=h(x)$ και συνεπώς $x=h^{-1}(y)$.

#2 Η τ.ρ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \text{ Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. } Y=X^3.$$

Λύση Είναι $y=h(x)=x^3, 0 < x < 3 \Rightarrow x=y^{1/3}=\sqrt[3]{y}, 0 < y < 27$

και $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$. Άρα, $f_Y(y) = \frac{1}{9} (y^{1/3})^2 \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{1}{27}$

Συνεπώς $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{27}, & 0 < y < 27 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$.

Το Θεώρημα που αναφέραμε μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να καλύπτει και την περίπτωση κατά την

οποία ο μετασχηματισμός $y=h(x)$ είναι "1-1", κατά τμήματα. -3-

#3 Έστω ότι η τ.ρ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{2}{9}(x+1), -1 < x < 2 \text{ και } f_X(x) = 0, \text{ αλλού. Υπολογί-}$$

στε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. $Y = X^2$.

Λύση Είναι $y=h(x)=x^2 = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \end{cases}$ Η $h(x)$ είναι
κατά τμήματα
"1-1",

και $x=h^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y}, & 0 < y < 1 \\ \sqrt{y}, & 0 < y < 4 \end{cases}$ και $\frac{dx}{dy} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 4 \end{cases}$

Για το διάστημα $(0,1)$ έχουμε, αν

$$0 < y < 1, \text{ τότε } f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2}{9}(-\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2}{9}(1-\sqrt{y}+1+\sqrt{y}) = \frac{2}{9\sqrt{y}}, 0 < y < 1$$

και αν $1 < y < 4$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{9}(\sqrt{y}+1) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}},$$

$$1 < y < 4. \text{ Επομένως, } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{\sqrt{y}+1}{9\sqrt{y}}, & 1 < y < 4 \end{cases} \text{ και } f_Y(y) = 0, \text{ αλλού.}$$

#4 Έστω ότι η τ.ρ. X ακολουθεί την $N(0,1)$, δηλαδή

$$\text{έχει συνάρτηση πυκνότητας } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. $Y=|X|$.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. $Y=X^2$.

Λύση (α) Είναι $y = h(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ Η $h(x)$ είναι "1-1" κατά τμήματα.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει:

$$x = h^{-1}(y) = \begin{cases} -y, & y > 0 \\ y, & y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d h^{-1}(y)}{dy} = \begin{cases} -1, & y > 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

Άρα για $y > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-y) |-1| + f_X(y) |1| \\ &= f_X(-y) + f_X(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y > 0. \end{aligned}$$

(β) Είναι $y = h(x) = x^2$ Αν διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x \geq 0$ και $x < 0$ η $h(x)$ είναι κατά τμήματα "1-1".

$$x = h^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y} \\ \sqrt{y} \end{cases}, y > 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d h^{-1}(y)}{dy} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}, y > 0$$

Συνεπώς, για $y > 0$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0. \end{aligned}$$

Η Μέθοδος της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής είναι μία εναλλακτική μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{h(X) \leq y\} = \begin{cases} \int_{\{x|h(x) \leq y\}} f(x) dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής} \\ \sum_{\{x|h(x) \leq y\}} P_X(x), & \text{αν } X \text{ διακριτή} \end{cases}$$

#5 Έστω $X \sim N(0,1)$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = e^X$.

Λύση Είναι $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P\{X \leq \log(y)\}, & y \geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_X(\log(y)), & y \geq 0 \end{cases}$$

Άρα $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\log(y)) = \frac{1}{y} f_X(\log(y))$

$$= \frac{1}{y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log(y))^2}, y > 0.$$

Η κατανομή της τ.μ. Y

καλείται λογαριθμοκανονική (log-normal).

#6 Αν X είναι συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $Y = X^2$ βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y .

Λύση Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y είναι:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας ως προς y

Έχουμε:

$$f_Y(y) = f_Y'(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) (-1) \frac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

#7

Μία εφαρμογή της #6, έχουμε στην απόλυτη τιμή άσυνια (την έχουμε γύσει και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού για τη συνεχή περίπτωση, #4, (B)).

Αν $X \sim N(0, 1)$ τότε $Y = X^2 \sim \chi_1^2$.

Λύση

Είναι: $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})]$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{1/2-1} e^{-y/2}, y > 0. \text{ Η τελευταία ισότητα}$$

δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.ρ. X που αντιστοιχεί την κατανομή χ_1^2 , όπως $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

#8 Η τ.ρ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \text{ δηλαδή } X \sim \text{Ομοιόμορφη}[0, 1].$$

Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.ρ. $Y = -\ln X$.

Λύση Όταν $0 < x \leq 1$ τότε $y = -\ln x > 0$. Έτσι για $y > 0$ -7-

έχουμε $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(\ln X \geq -y)$

$$= P(X \geq e^{-y}) = 1 - P(X < e^{-y}). \text{ Όπως } e^{-y} < 1 \text{ αφού } y > 0$$

συνεπώς $F_Y(y) = 1 - \int_0^{e^{-y}} dx = 1 - e^{-y}$

Για $y \leq 0$ από τον ορισμό της Y , $F_Y(y) = 0$ Άρα

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y \leq 0 \\ 1 - e^{-y}, & \text{αν } y > 0 \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας ως προς y για $y \neq 0$ (η $F_Y(y)$ δεν έχει παράγωγο στο σημείο $y=0$) έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y < 0 \\ e^{-y}, & \text{αν } y > 0 \end{cases}. \text{ Άρα η τ.μ. } Y \sim \text{Ευθετική}(1).$$

#9 Έστω X συνεχής τ.μ. με $f_X(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{4}}$, $x \geq 0$ και $f_X(x) = 0$, αλλιώς. Αν $Y = X^2$ βρείτε την συνάρτηση κατανομής της Y και την συνάρτηση πυκνότητάς της. Ποια η μέση τιμή της;

Λύση $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \stackrel{x \geq 0}{=} P(X \leq \sqrt{y})$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{y}} x e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 1 - e^{-y/4}$$

και $f_Y(y) = \frac{1}{4} e^{-y/4} \Rightarrow Y \sim \text{Ευθετική}(1/4) \Rightarrow \underline{E(Y) = 4}$

}