

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ #6

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μία ακόμη μέθοδος για την εύρεση των κατανομών συνάρτησεων τ.ρ. είναι η μέθοδος της ροπογεννήτριας συνάρτησης. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος στη πολυδιάστατη περίπτωση. Βασίζεται στην ιδιότητα του μονοσήμαντου της ροπογεννήτριας, δηλαδή στο γεγονός ότι η ροπογεννήτρια μιας τ.ρ. X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της τ.ρ. X . Η ιδέα της μεθόδου είναι: Έστω X τ.ρ. και $Y = h(X)$ ο μετασχηματισμός της. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.ρ. Y είναι:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{th(X)}) = \begin{cases} \sum_x e^{th(x)} p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} f_X(x) dx, & \text{αν } X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Η συνάρτηση που προκύπτει δίνει την κατανομή της τ.ρ. Y . Όπως έχουμε δει, η μέθοδος έχει εφαρμοστεί (βλέπε Φροντιστήριο #3) για την εύρεση της κατανομής αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.ρ.

#1 Έστω $X \sim N(0,1)$ και $Y = X^2$.

$$\text{Τότε } M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)} dx$$

$$\frac{y^2 = x^2(1-2t)}{1-2t > 0 \Rightarrow t < 1/2} \quad \frac{1}{(1-2t)^{1/2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

$$\begin{aligned} x(1-2t)dx &= y dy \\ \text{Όμως, } x^2 &= \frac{y^2}{1-2t} \xRightarrow{x>0} x = \frac{y}{\sqrt{1-2t}} \text{ και } dx = \frac{y}{x(1-2t)} dy \end{aligned}$$

$$dx = \frac{y}{\sqrt{1-2t}} dy = \frac{y \sqrt{1-2t}}{y(1-2t)} dy = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} dy$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς, } M_Y(t) &= \frac{1}{(1-2t)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= (1-2t)^{-1/2}, \text{ διότι } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}, \text{ για } t < 1/2 \end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας της Gamma ($a = 1/2, b = 2$) δηλαδή της χ^2_1 . Συνεπώς, $Y \sim \text{Gamma}(a = 1/2, b = 2)$ δηλαδή $Y \sim \chi^2_1$. $\square$

Αλλαγή μεταβλητών για την πολυδιάστατη περίπτωση

Υποθέτουμε ότι δίνεται η από κοινού κατανομή n τ.ρ. $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ και βρίσκουμε την κατανομή k συνάρτησεων $Y_1 = h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, Y_k = h_k(X_1, \dots, X_n), k \geq 1$ των τ.ρ. $X_1, \dots, X_n$. Το πρόβλημα αυτό είναι θεμελιώδες στη Μαθηματική Στατιστική διότι η Στατιστική Συμπερασματολογία στηρίζεται στην γνώση της κατανομής μετασχηματισμένων τ.ρ. Για σταθερά $(y_1, \dots, y_k)$ η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.ρ. $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_k)$ είναι:

$$\begin{aligned} F_{\underline{Y}}(y_1, \dots, y_k) &= P(\underline{Y} \leq y_1, \dots, Y_k \leq y_k) \\ &= P(h_1(\underline{X}) \leq y_1, \dots, h_k(\underline{X}) \leq y_k), \text{ όπου } \\ \underline{X} &= (X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Κατά κανόνα, αυτή η πιθανότητα δεν υπολογίζεται εύκολα. Σ' αυτή την αιτία έγκειται και η δυσκολία του προβλήματος. Όπως είδαμε στη μονοδιάστατη περίπτωση, τρεις μέθοδοι προσφέρονται για τη λύση του προβλήματος.

- (α) Η Μέθοδος της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
- (β) Η Μέθοδος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ή του μετασχηματισμού (εφαρμόζεται βασικά για συνεχείς τ.μ.) και
- (γ) Η Μέθοδος της ροπογεννήτριας συνάρτησης (που είδαμε και στο Φροντιστήριο #3).

Οι παραπάνω μεθοδολογίες γενικεύονται **κατάλληλα** και για τη πολυδιάστατη περίπτωση.

- (α) Για $n=2$, έστω $\underline{X} = (X_1, X_2)$ μία διδιάστατη τ.μ. και $Y = h(X_1, X_2)$. Τότε, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Y , όπως η πραγματική συνάρτηση είναι:

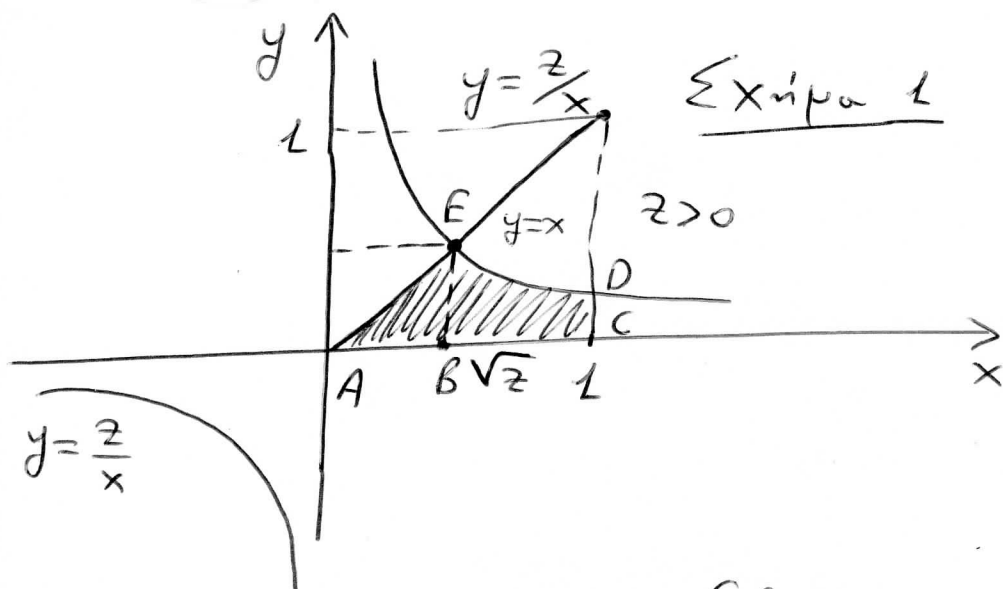
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[h(X_1, X_2) \leq y]$$

$$= \iint_{\{x_1, x_2 \mid h(x_1, x_2) \leq y\}} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \text{ αν } \underline{X} \text{ συνεχής,}$$

$$\sum_{\{x_1, x_2 \mid h(x_1, x_2) \leq y\}} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2), \text{ αν } \underline{X} \text{ διακριτή.}$$

#2 Έστω (X, Y) τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας: $f_{X, Y}(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και

$Z = XY$. Ζητείται η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Z . -4-



$$\text{Είναι } F_Z(z) = P(XY \leq z) = \iint_{\{xy \leq z\}} f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \iint_{ABCDE} 3x dx dy = \iint_{ABE} 3x dx dy + \iint_{BCDE} 3x dx dy \quad \left(\begin{array}{l} \text{βλέπε} \\ \text{Σχήμα 1} \\ \text{για το} \\ \text{πεδίο τιμών} \\ \text{της τ.μ. } Z \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^x 3x dy dx + \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^{\frac{z}{x}} 3x dy dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{z}} 3x^2 dx + \int_{\sqrt{z}}^1 3x \frac{z}{x} dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} + 3z(1 - \sqrt{z})$$

$$= [x^3]_0^{\sqrt{z}} + 3z(1 - \sqrt{z}) = (\sqrt{z})^3 + 3z - 3z\sqrt{z}$$

$$= z^{3/2} + 3z - 3z\sqrt{z} = 3z - 2z\sqrt{z}, \quad 0 < z < 1. \quad f_Z(z) = F_Z'(z),$$

$$\text{Συνεπώς, } f_Z(z) = 3(1 - \sqrt{z}), \quad 0 < z < 1. \quad \square \quad 0 < z < 1.$$

(β) Η μέθοδος του μετασχηματισμού μας επιτρέπει να βρίσκουμε τη συνάρτηση πιθανότητας ή τη συνάρτηση

πυκνότητας πιθανότητας μετασχηματισμένων τ.ρ. Η ουσία της μεθόδου αφορά συνεχείς τ.ρ. Έστω (X_1, X_2) μία διδιάστατη συνεχής τ.ρ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$. Έστω τ.ρ. Y_1, Y_2 τ.ω. οι συναρτήσεις $h_1(y_1, y_2)$ και $h_2(y_1, y_2)$ να είναι παραγωγίσιμες ως προς y_1, y_2 τότε:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = |J(y_1, y_2)| f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \quad (1)$$

όπου

$$J(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} \right) \left(\frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \right) - \left(\frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} \right) \left(\frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \right)$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού $x_1 = h_1(y_1, y_2), x_2 = h_2(y_1, y_2)$. Εναλλακτικά, ο τύπος (1) μπορεί να γραφεί ως:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = |J(x_1, x_2)|^{-1} f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \quad (2)$$

όπου

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$$

όπου $g_1(x_1, x_2) = y_1, g_2(x_1, x_2) = y_2$.

#3 Αν X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τ.ρ. που υποχρυσόουν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ να βρεθεί η από κοινού κατανομή των τ.ρ. $U = X^2 + Y^2$ και $V = X/Y$. Επίσης να βρεθούν οι κατανομές των U, V και να εξεταστεί αν είναι ανεξάρτητες τ.ρ.

Λύση Αφού $X, Y \sim N(0,1)$ και X, Y ανεξάρτητες, ισχύει ότι:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\ = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $u = x^2 + y^2, u > 0$ και $v = \frac{x}{y}, v \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Είναι } x &= vy \\ u &= v^2 y^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= vy \\ y^2(v^2 + 1) &= u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= vy \\ y^2 &= \frac{u}{v^2 + 1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow x = \pm v \sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}} \quad \text{Άρα, οι λύσεις είναι:}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}} \quad (i) \quad x = v \sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}}, y = \sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}}$$

$$(ii) \quad x = -v \sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}}, y = -\sqrt{\frac{u}{v^2 + 1}}$$

Για το (i), μετά από πράξεις, έχουμε:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \frac{\sqrt{u}}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & -\frac{v\sqrt{u}}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} \end{vmatrix} \\ = -\frac{1}{2(1+v^2)}$$

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{v}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & -\frac{\sqrt{u}}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \frac{v\sqrt{u}}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2(1+v^2)}$$

Συνεπώς, $|J| = \frac{1}{2(1+v^2)}$

και

$$h(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2 u}{1+v^2} + \frac{u}{1+v^2}\right)} \frac{1}{2(1+v^2)}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2 u}{1+v^2} + \frac{u}{1+v^2}\right)} \frac{1}{2(1+v^2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{1+v^2}$$

Επίσης

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+v^2} dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \left[\arctan v \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}, u > 0 \Rightarrow u \sim \text{Ευθετική}(\frac{1}{2})$$

και

$$h(v) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{1+v^2} du = \frac{1}{2\pi(1+v^2)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+v^2)} \left[-2e^{-\frac{u}{2}} \right]_0^\infty = -\frac{1}{\pi(1+v^2)} \left[e^{-\frac{u}{2}} \right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{\pi(1+v^2)} (0-1) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}, \quad V \sim \text{Cauchy}(1,0), \quad v \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον

$$h(u)h(v) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{\pi(1+v^2)} = h(u,v) \text{ και } u, v \text{ ανεξάρτητες.}$$

#4 Αν $X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$, $Y \sim \text{Gamma}(b, \lambda)$ και X, Y ανεξάρτητες τ.ρ. υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης συνεχούς τ.ρ. (u, v) , όπου $u = X+Y$ και $v = \frac{X}{X+Y}$.

Λύση Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης συνεχούς τ.ρ. (X, Y) είναι:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)} \frac{\lambda^b y^{b-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(b)}$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1} y^{b-1}$$

Έστω $g_1(x,y) = x+y$, $g_2(x,y) = \frac{x}{x+y}$

$$\text{Τότε } \frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Άρα $J(x,y) = -\frac{1}{x+y}$. Οι εξισώσεις $u = x+y$, $v = \frac{x}{x+y}$ έχουν ως λύση $x = uv$, $y = u(1-v)$.

Επομένως, από τον ώπο (2), έχουμε:

$$f_{(u,v)}(u,v) = u \cdot f_{(x,y)}(uv, u(1-v)) \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ = \frac{\lambda e^{-\lambda u} (\lambda u)^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{v^{a-1} (1-v)^{b-1} \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

Συνεπώς, οι τ.μ. $U = X+Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$ είναι ανεξάρτητες

και επιπλέον ισχύει ότι:

$$X+Y \sim \text{Gamma}(a+b, \lambda), \quad \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}(a, b). \quad \square$$

