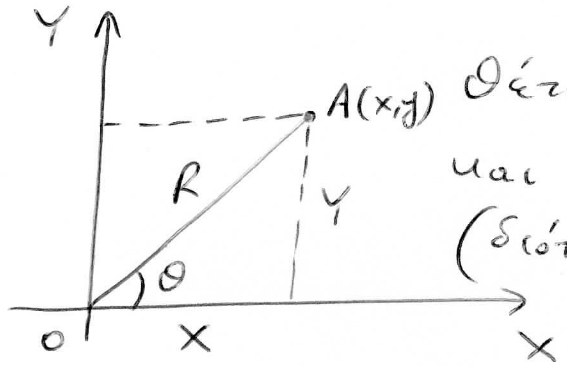
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ #7

#1 Υποθέτουμε ότι το σημείο πρόσπτωσης A μίας σφαίρας περιγράφεται από τις τ.μ. X (τετμημένη) και Y (τεταγμένη), με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y)$. Η απόσταση R της σφαίρας από την αρχή των αξόνων και η γωνία Θ που σχηματίζει αυτή η απόσταση με τον άξονα $x'x$ (βλέπε Σχήμα) είναι τυχαίες μεταβλητές. Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. R, Θ και τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των R, Θ στην ειδική περίπτωση όπου οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$.

<u>Λύση</u>



Θέτουμε $R=\sqrt{X^2+Y^2}=g(X,Y)$

και $\Theta = \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{Y}{X} = h(X,Y)$

(διότι $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$).

Λύνοντας το σύστημα ως προς x,y

$$\left.\begin{aligned} g(x,y)&=r \\ h(x,y)&=\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2}&=r \\ \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{y}{x}&=\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2 \\ \varepsilon\varphi\theta&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2 \\ \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2+x^2\varepsilon\varphi^2\theta&=r^2 \\ \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2(1+\varepsilon\varphi^2\theta)&=r^2 \\ \varepsilon\varphi\theta&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2&=\frac{r^2}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}=r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ \varepsilon\varphi\theta&=y/x \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} &\boxed{x=r\sigma\upsilon\nu\theta} \\ &\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς $r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + y^2 = r^2$

$$\Rightarrow y^2 = r^2 - r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$
$$= r^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)$$
$$= r^2\eta\mu^2\theta \overset{y>0}{\Rightarrow} \boxed{y=r\eta\mu\theta}$$

Άρα, $x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$ με αντίστοιχη Ιακωβιανή ορίζουσα
$y = r\,\eta\mu\theta$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + r\,\eta\mu^2\theta = r(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = r.$$

Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. R, Θ θα είναι:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f(x,y)\,|J| = f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)\,|J|$$

$= r f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$, $r \geq 0$, $0 < \theta < 2\pi$. Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, τότε θα έχουμε:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \; x,y \in \mathbb{R}.$$

Αντικαθιστώντας στον τελευταίο τύπο βρίσκουμε:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = r\frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)}{2}\right\}$$

$= \frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$, $r \geq 0$ και $0 < \theta < 2\pi$. Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. Θ θα δίνεται από τον τύπο: $f_\Theta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr = \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{1}{2\pi}$,

$0 < \theta < 2\pi$ δηλαδή η τ.μ. $\Theta \sim U(0, 2\pi)$. Αντίστοιχα, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. R θα είναι:

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{R,\Theta}(r,\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}},\ r\geq 0.$$ Η κατανομή της τ.μ. R καλείται κατανομή Rayleigh. Προκύπτει ότι: $f_{(R,\Theta)}(r,\theta)=f_R(r)f_\Theta(\theta),\ r\geq 0,\ 0<\theta<2\pi$, κάτι που σημαίνει ότι οι τ.μ. R, Θ είναι ανεξάρτητες.

#2 Έστω ότι οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)=e^{-x},\ x>0$. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. $U=X_1+X_2$, $V=X_1/X_2$. Να δειχτεί ότι U,V είναι ανεξάρτητες και να βρεθεί η κατανομή τους.

<u>Λύση</u> Θέτουμε $\left.\begin{array}{l}u=x_1+x_2\\ v=x_1/x_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=u-x_2\\ v=\dfrac{u-x_2}{x_2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=u-x_2\\ v=\dfrac{u}{x_2}-1\end{array}\right\}$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=u-x_2\\ \dfrac{u}{x_2}=1+v\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=u-x_2\\ x_2=\dfrac{u}{1+v}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=u-\dfrac{u}{1+v}\\ x_2=\dfrac{u}{1+v}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{u+uv-u}{1+v}=\frac{uv}{1+v}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}x_1=\dfrac{uv}{1+v}\\ x_2=\dfrac{u}{1+v}\end{array}}$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\\ \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix},$$ διότι

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2}=\frac{u+\cancel{uv}-\cancel{uv}}{(1+v)^2}=\frac{u}{(1+v)^2}$$

Μετά από πράξεις, για την Ιακωβιανή ορίζουσα J, έχουμε:

$$J = -\frac{vu}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3} = \frac{-u(1+v)}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2}$$

$\Rightarrow |J| = \frac{u}{(1+v)^2}$ Άρα, $g(u,v) = e^{-\left(\frac{uv}{1+v}\right)-\left(\frac{u}{1+v}\right)} \frac{u}{(1+v)^2}$

$= ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2}$, $u>0$, $v>0$ και οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των U, V είναι

$$g_U(u) = \int_0^\infty ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2}dv = ue^{-u}\int_0^\infty \frac{1}{(1+v)^2}dv =$$

$$= ue^{-u}\left[-\frac{1}{1+v}\right]_0^\infty = ue^{-u}(0+1) = ue^{-u}, u>0$$

και

$$g_V(v) = \int_0^\infty ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2}du = \frac{1}{(1+v)^2}\int_0^\infty ue^{-u}du$$

$$= \frac{1}{(1+v)^2}\int_0^\infty u(-e^{-u})'du = \frac{1}{(1+v)^2}\left[\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}du\right]$$

$$= \frac{1}{(1+v)^2}\left[-e^{-u}\right]_0^\infty = \frac{1}{(1+v)^2}(0+1) = \frac{1}{(1+v)^2}, v>0. \boxtimes$$

Η μέθοδος του μετασχηματισμού γενικεύεται κατάλληλα για την περίπτωση που έχουμε $n \geq 2$ συνεχείς τ.μ. και θέλουμε να υπολογίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας n νέων τυχαίων μεταβλητών που είναι συναρτήσεις των αρχικών.

#3 Έστω X, Y, Z τρεις συνεχείς τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y,z)$ και U, V, W οι τ.μ. που ορίζονται από τους τύπους: $U=X+Y$, $V=Y+Z$, $W=Z+X$. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. U, V, W και στην ειδική περίπτωση όπου $X, Y, Z \sim$ Εκθετική(1), με X, Y, Z ανεξάρτητες.

<u>Λύση</u> Το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u \ (1) \\ y+z=v \ (2) \\ z+x=w \ (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1)-(3) \Rightarrow y-z=u-w \\ (2)\ y+z=v \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2y = u-w+v \Rightarrow y=\frac{1}{2}(u-w+v)$$

Ομοίως $2x = u-v+w \Rightarrow x=\frac{1}{2}(u-v+w)$ και

$$z=\frac{1}{2}(v+w-u)$$

Η Ιακωβιανή είναι:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}.$$ Άρα, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των U, V, W δίνεται από τον τύπο:

$$f_{(U,V,W)}(u,v,w) = \frac{1}{2} f\left(\frac{u-v+w}{2}, \frac{u+v-w}{2}, \frac{-u+v+w}{2}\right)$$

Αν οι $X, Y, Z \sim$ Εκθετική(1) δηλ. $f_X(x)=e^{-x}$, $f_Y(y)=e^{-y}$,

$f_Z(z)=e^{-z}$, $x,y,z>0$ και οι X,Y,Z ανεξάρτητες, τότε:

$$f_{(U,V,W)}(u,v,w)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{u-v+w}{2}-\frac{u+v-w}{2}-\frac{v+w-u}{2}} & \text{αν } u\le v+w,\ v\le u+w,\ w\le v+u\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{u+v+w}{2}}, & \text{αν } u\le v+w,\ v\le u+w,\ w\le v+u\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Η μέθοδος της ροπογεννήτριας συνάρτησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε ορισμένες περιπτώσεις και στηρίζεται στην ιδιότητα σύμφωνα με την οποία η ροπογεννήτρια μίας τ.μ. X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της. Είδαμε σχετικά παραδείγματα στο Φροντιστήριο #3.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Κατανομή αθροίσματος και διαφοράς τ.μ. Έστω X,Y δύο ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ. με συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$, αντίστοιχα. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $U=X+Y$ είναι:

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(u-y)f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(u-x)\,dx$$

και της τ.μ. $W=X-Y$ είναι:

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(x-w)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(y+w)f_Y(y)\,dy$$

Αντίστοιχα, για τις διακριτές τ.μ. X,Y οι τύποι είναι:

$$f_U(u)=\sum_{y\in R_Y}f_X(u-y)f_Y(y)=\sum_{x\in R_X}f_X(x)f_Y(u-x)$$

$$f_W(w) = \sum_{x \in R_X} f_X(x)\, f_Y(x-w) = \sum_{y \in R_Y} f_X(y+w)\, f_Y(y)$$

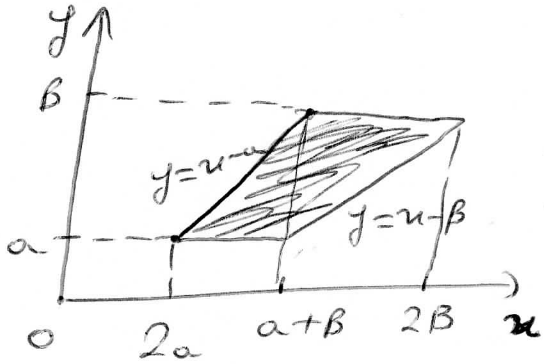
#4 Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (α, β). Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $U = X+Y$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

<u>Λύση</u> Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $U = X+Y$ με $R_U = (2\alpha, 2\beta)$ δίνεται από τον τύπο:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y)\, f_Y(y)\, dy$$

Για να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις των $f_X(u-y)$, $f_Y(y)$ θα πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες:

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha < u < 2\beta \\ \alpha < u-y < \beta \\ \alpha < y < \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\alpha < u < 2\beta \\ u-\beta < y < u-\alpha \\ \alpha < y < \beta \end{array}$$

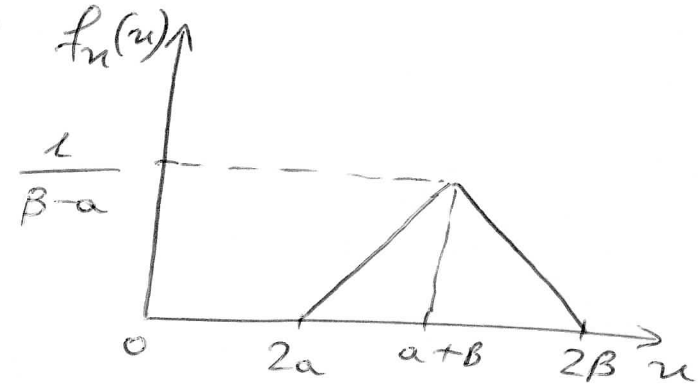


Το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο παίρνει τιμές το ζεύγος (u, y) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Άρα,

$$f_U(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha}^{u-\alpha} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\, dy = \frac{u-2\alpha}{(\beta-\alpha)^2}, & 2\alpha < u \leq \alpha+\beta \\ \displaystyle\int_{u-\beta}^{\beta} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\, dy = \frac{2\beta-u}{(\beta-\alpha)^2}, & \alpha+\beta < u < 2\beta. \end{cases}$$

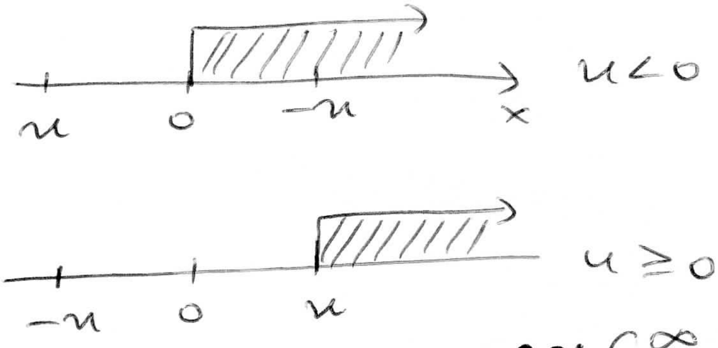
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας της τ.μ. Z δίνεται στο σχήμα (η κατανομή της Z είναι γνωστή ως τριγωνική κατανομή).



#5 Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$ και $f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y}, y>0$, αντίστοιχα. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της διαφοράς $Z=X-Y$.

Λύση Πρέπει $x\geq 0$ και $x-z\geq 0$ δηλαδή $x\geq 0$ και $x\geq z$. Άρα, αν $z<0$ τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από την ανισότητα $x\geq 0$ ενώ αν $z\geq 0$ τα όρια θα καθορίζονται από την ανισότητα $x\geq z$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-z)\,dx$$



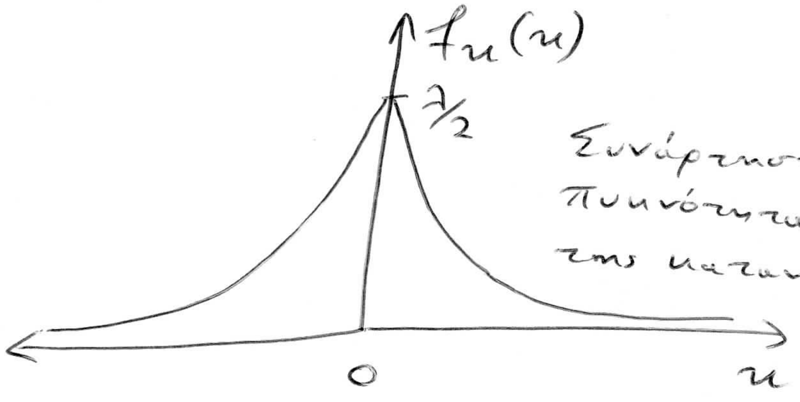
Είναι $f_Z(z)=\lambda^2 e^{\lambda z}\int_0^{\infty} e^{-2\lambda x}dx=\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}, z<0$

και $f_Z(z)=\lambda^2 e^{\lambda z}\int_z^{\infty} e^{-2\lambda x}dx=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, z\geq 0$

οι οποίες μπορούν να γραφούν σε ενιαία μορφή ως εξής:

$f_Z(z)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|}, z\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της τελευταίας συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα.

Για την κατανομή της $u = X - Y$ χρησιμοποιείται συνήθως η ονομασία κατανομή Laplace ή διπλή εκθετική.



Συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Laplace.