I
Συνδυαστική

1 Λυμένες Ασκήσεις στην Συνδυαστική

Άσκηση 1 *Πόσες διαφορετικές διατάξεις είναι δυνατές σε μια ομάδα ποδοσφαίρου που αποτελείται από 11 παίχτες;*

Λύση: Υπάρχουν $11!$ δυνατές διατάξεις των παικτών. $\square$

Άσκηση 2 *Κάποιος αγόρασε 10 βιβλία τα οποία πρόκειται να τοποθετήσει σε ένα ράφι. Από αυτά τα 4 είναι βιβλία μαθηματικών, τα 3 βιβλία χημείας, τα 2 βιβλία ιστορίας και ένα βιβλίο γραμματικής. Αν θέλει να τοποθετήσει τα βιβλία έτσι ώστε τα βιβλία με κοινό θέμα να είναι μαζί πόσες διαφορετικές αναδιατάξεις των βιβλίων είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχουν 4! 3! 2! 1! διατάξεις τέτοιες ώστε μαθηματικά βιβλία να είναι τα πρώτα στη σειρά, μετά τα τα βιβλία χημείας, μετά τα βιβλία ιστορίας και τελευταίο το βιβλίο γραμματικής. Όμοια για κάθε άλλη διάταξη των αντικειμένων θα υπάρχουν 4! 3! 2! 1! δυνατές αναδιατάξεις. Συνεπώς αφού υπάρχουν 4! διατάξεις των αντικειμένων η ζητούμενη απάντηση είναι $4!\,4!\,3!\,2!\,1! = 6912$. $\square$

Άσκηση 3 *Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων 7 θέσεων μπορούμε να φτιάξουμε ώστε οι τρεις πρώτες θέσεις πρέπει να έχουν κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και οι τέσσερεις τελικές με αριθμούς;*

Λύση: Αφού υπάρχουν 24 λατινικά γράμματα (A, B, C, ..., Y, W, Z) για τις τρεις πρώτες θέσεις και 10 ψηφία ($\{0, 1, \ldots, 9\}$) για τις υπόλοιπες, από την βασική αρχή μέτρησης η απάντηση είναι : $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175{,}760{,}000$. $\square$

Άσκηση 4 *Πόσες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα σύνολο με n στοιχεία υπάρχουν αν οι δυνατές τιμές της κάθε συνάρτησης είναι είτε 0 είτε 1;*

Λύση: Ας θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f είναι τα $1, 2, \ldots, n$. Αφού το $f(i)$ πρέπει να είναι είτε 0 είτε 1 για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, θα έχουμε ότι υπάρχουν 2^n δυνατές συναρτήσεις. $\square$

Άσκηση 5 *Θεωρείστε μια ομάδα από n κεραίες από τις οποίες οι m είναι ελαττωματικές και οι $n-m$ είναι λειτουργικές Υποθέστε επιπλέον ότι όλες οι ελαττωματικές και όλες οι λειτουργικές είναι πανομοιότυπες μεταξύ τους (δηλαδή δεν ξεχωρίζουμε δύο ελαττωματικές ή δύο λειτουργικές). Πόσες δυνατές διατάξεις σε γραμμή των n κεραιών είναι δυνατές ώστε να μην εμφανίζονται δύο διαδοχικές ελαττωματικές;*

Λύση: Φανταστείτε σε μια γραμμική διάταξη των κεραιών τις $n-m$ λειτουργικές κεραίες μόνον με τα πιθανά κενά μεταξύ τους όπου βρίσκονται οι ελαττωματικές . Αν δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές ελαττωματικές κεραίες τότε τα κενά μεταξύ δύο λειτουργικών κεραιών είναι το πολύ 1. Συνεπώς στις $n-m+1$ δυνατές κενές θέσεις στο σχήμα:

$\_1\_1\_1\_1\_\ldots\_1\_$

$1 =$ λειτουργική

$\_ =$ θέση όπου θα τοποθετηθεί το πολύ μια ελαττωματική

μεταξύ των $n-m$ λειτουργικών κεραιών, πρέπει να επιλέξουμε m από αυτές στις οποίες θα το τοποθετήσουμε τις ελαττωματικές κεραίες. συνεπώς υπάρχουν συνολικά $\binom{n-m+1}{m}$ δυνατές γραμμικές διατάξεις στις οποίες υπάρχει τουλάχιστον μια λειτουργική κεραία μεταξύ δύο ελαττωματικών. $\square$

Άσκηση 6 *Σε ένα διαγωνισμό μετέχουν 6 άντρες και 4 γυναίκες. Σε μια γραπτή εξέταση οι διαγωνιζόμενοι μπαίνουν σε μια σειρά κατάταξης ανάλογα με τον βαθμό που πήραν. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο διαγωνιζόμενοι που να πήραν ακριβώς τον ίδιο βαθμό.*

(α) Πόσες δυνατές κατατάξεις μπορούν να γίνουν;

(β) Αν οι άντρες και οι γυναίκες κατατάσσονται σε ξεχωριστές λίστες πόσες δυνατές κατατάξεις μπορούν να γίνουν;

Λύση: (α) Αφού κάθε κατάταξη αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη αναδιάταξη 10 ανθρώπων, η απάντηση είναι στο πρώτο ερώτημα $10! = 3.628.800$.

(β) Αφού υπάρχουν 6! δυνατές κατατάξεις των αντρών και 4! δυνατές κατατάξεις των γυναικών προκύπτει -από την Βασική Αρχή - ότι είναι δυνατές $(6!)(4!) = (720)(24) = 17.280$ κατατάξεις σε αυτή την περίπτωση. $\square$

Άσκηση 7 *Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις γραμμάτων (λέξεις) μπορούμε να φτιάξουμε χρησιμοποιώντας τα $PEPPER$;*

Λύση: Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 6! μεταθέσεις των γραμμάτων $P_1E_1P_2P_3E_2R$ όπου τα 3 P καθώς και τα 2E δεν ξεχωρίζονται μεταξύ τους.

Θεωρείστε, τώρα οποιαδήποτε από αυτές τις μεταθέσεις για παράδειγμα την $P_1P_2E_1P_3E_2R$. Αν μεταθέσουμε τα P μεταξύ τους και τα E μεταξύ τους τότε το αποτέλεσμα της διατάξης θα παραμένει στη μορφή $PPEPER$. Θα έχουμε συνολικά 3! 2! τέτοιες μεταθέσεις

$$\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}$$

που είναι της μορφής $PPEPER$. Συνεπώς υπάρχουν $6!/(3!\ 2!) =$ 60 δυνατές αναδιατάξεις των γραμμάτων $PEPPER$. $\square$

Άσκηση 8 *Σε ένα τουρνουά σκακιού υπάρχουν 10 παίκτες από τους οποίους οι 4 είναι από την Ρωσία, οι 3 από τις Ηνωμένες Πολιτείες, από την Μεγάλη Βρετανία και 1 από την Βραζιλία. Αν τα αποτελέσματα αναφέρουν μόνο την εθνικότητα των παικτών στην διάταξη κατάταξης, πόσες τέτοιες λίστες αποτελεσμάτων είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχουν

$$\frac{10!}{4!\ 3!\ 2!\ 1!} = 12{,}600$$

δυνατές λίστες. $\square$

Άσκηση 9 *Μια επιτροπή από 3 άτομα θα σχηματιστεί μέσα από μια ομάδα 20 ατόμων. Πόσες διαφορετικές επιτροπές είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχουν $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ δυνατές επιτροπές. $\square$

Άσκηση 10 *Από μια ομάδα από 5 γυναίκες και 7 άντρες πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται αό 2 γυναίκες και 3 άντρες μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες στην περίπτωση που δύο συγκεκριμμένοι άντρες δεν δέχονται να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή;*

Λύση: Αφού υπάρχουν $\binom{5}{2}$ δυνατές ομάδες από 2 γυναίκες], και $\binom{7}{3}$ δυνατές ομάδες από 3 άντρες , προκύπτει από τη βασική αρχή μέτρησης ότι υπάρχουν $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \left(\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}\right)\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350$ δυνατές επιτροπές 2 γυναικών και 3 αντρών. Τώρα ας υποθέσουμε ότι 2 άντρες αρνούνται να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή.

Τότε αφού μπορούν να σχηματιστούν συνολικά $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$ από τα $\binom{7}{3} = 35$ δυνατά σύνολα 3 αντρών που να περιέχουν αυτούς τους δύο άντρες προκύπτει ότι $35-5=30$ δεν τους περιέχουν. Αφού υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ τρόποι να επιλεχτούν οι δύο γυναίκες, προκύπτει από τη βασική αρχή μέτρησης ότι υπάρχουν $30\cdot 10 = 300$ δυνατές επιτροπές. $\square$

Άσκηση 11 *Να βρεθεί ο συντελεστής του x^8 στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{11}$*

Λύση: Θα είναι

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{11-8} = \binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165.$$

$\square$

Άσκηση 12 *Να βρεθεί ο συντελεστής του x^8y^3 στο ανάπτυγμα του $(y+x)^{11}$*

Λύση: Θα είναι

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{11-8} = \binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165.$$

$\square$

Άσκηση 13 *Πρόκειται να διαιρέσουμε 10 άτομα σε τρείς ομάδες με πέντε στην πρώτη, δύο στη δεύτερη και τρεις στην τρίτη. Πόσες διαφορετικές διαιρέσεις των 10 ατόμων στις 3 ομάδες είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχουν $\dfrac{10!}{5!\ 2!\ 3!} = 2520$ δυνατές διαιρέσεις. $\square$

Άσκηση 14 *Πρόκειται να διαιρέσουμε δέκα παιδιά στην ομάδα A και στην ομάδα B που θα έχει 5 μέλη η κάθε μια. Η ομάδα A θα παίξει σε ένα τουρνουά και η ομάδα B σε διαφορετικό. Πόσες δυνατές τέτοιες διαιρέσεις είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχουν $\dfrac{10!}{5!\ 5!} = 252$ δυνατές διαιρέσεις. $\square$

Άσκηση 15 *Για να οργανωθεί ένα παιχνίδι μπάσκετ , 10 παιδιά θα φτιάξουν δύο ομάδες από 5 παίκτες η κάθε μια. Πόσες διαφορετικές διαιρέσεις είναι δυνατές;*

Λύση: Υπάρχει μια διαφορά με την προηγούμενη άσκηση , όπου δεν υπάρχει τώρα A και B ομάδα αλλά απλώς μια διαίρεση 10 ατόμων σε 2 ομάδες από 5 μέλη η κάθε μία. Η ζητούμενη απάντηση είναι

$$\frac{10!/(5!\ 5!)}{2!} = \frac{252}{2} = 126$$

$\square$

2 Ασκήσεις για Εξάσκηση

1. (α΄) Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας είναι δυνατές αν η κάθε μία έχει 7 θέσεις συμβόλων από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι για κεφαλαία λατινικά γράμματα και οι υπόλοιπες 5 για αριθμούς;

   (β΄) Πόσες είναι δυνατές με την επιπλέον υπόθεση ότι κανένα ψηφίο αριθμού ή γράμμα δεν πρέπει να εμφανίζεται δύο φορές στην πινακίδα;

2. (α΄) Με πόσους τρόπους 3 αγόρια και 3 κορίτισα μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά;

   (β΄) Με πόσους τρόπους 3 αγόρια και 3 κορίτισα μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά αν τα αγόρια και τα κορίτσια κάθονται μαζί;

   (γ΄) Με πόσους τρόπους 3 αγόρια και 3 κορίτισα μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά αν μόνο τα αγόρια κάθονται όλα μαζι;

   (δ΄) Και τέλος με πόσους τρόπους αν δεν επιτρέπεται δύο άτομα του ίδιου φύλου να καθήσουν μαζί;

3. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι δυνατά όταν ρίξουμε ένα ζάρι 4 φορές, όπου λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι $(3, 4, 3, 1)$ αν στην πρώτη ριξιά φέραμε 3, στην δεύτερη 4, την τρίτη 3 και την τέταρτη 1;

4. Είκοσι εργαζόμενοι πρόκειται να εκτελέσουν 20 διαφορετικές δουλειές, ο κάθένας και μια δουλειά. Πόσες διαφορετικές περιπτώσεις είναι δυνατές;

5. Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:

   (α΄) ΚΡΙΜΑ

   (β΄) ΚΑΛΗΜΕΡΑ

   (γ΄) ΠΑΠΑΚΙ

   (δ΄) ΑΓΓΑΡΕΙΑ;

6. Ένα αγόρι έχει 12 βόλους από τους οποίους οι 6 είναι μαύροι, οι τέσσερεις είναι κόκκινοι, 1 λευκός και 1 μάυρος.

   Αν το παιδί βάλει τους βόλους στη σειρά, πόσες διαφορετικές τέτοιες διατάξεις των βόλων είναι δυνατές;

7. Με πόσους τρόπους 8 άνθρωποι μπορούν να καθήσουν σε μια σειρά αν

   (α΄) δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς το πως θα κάτσουν,

   (β΄) Οι A και B πρέπει να κάτσουν ο ένας δίπλα στον άλλον,

   (γ΄) είναι 4 άντρες και 4 γυναίκες και δεν επιτρέπεται 2 άντρες ή δύο γυναίκες να κάτσουν δίπλα, (δ΄) υπάρχουν 5 άντρες που πρέπει να κάτσουν όλοι μαζί,

(ε΄) υπάρχουν 4 παντρεμένα ζευγάρια και κάθε ζευγάρι πρέπει να κάτσουν μαζι ;

8. Με πόσους τρόπους 3 μυθιστορήματα, 2 βιβλία μαθηματικών και 1 βιβλίο χημείας μποροο να τοποθετηθούν στο ράφι μιας βιβλιοθήκης αν

   (α΄) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο πως θα τοποθετηθούν τα βιβλία,

   (β΄) τα μαθηματικά βιβλία πρέπει να μπουν μαζί και τα μυθισορήματα μαζι,

   (γ΄) τα μυθιστορήματα πρέπει να μπουν μαζί και για τα υπόλοιπα δεν υπάρχει περιορισμός ;

9. Πέντε διαφορετικά βραβεία (καλύτερου μαθητή, καλύτερου αθλητή κλπ) θα δοθούν σε κάποιους μαθητές μιας σχολικής τάξης με 30 μαθητές. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα βράβευσης είναι δυνατά αν

   (α΄) ένας μαθητής μπορεί να πάρει και διαφορετικά βραβεία (και όλα πιθανόν)

   (β΄) ένας μαθητής μπορεί να πάρει το πολύ ένα βραβείο ;

10. Θεωρείστε μια ομάδα 20 ατόμων. Αν ο καθένας δώσει το χέρι με κάθε άλλον, πόσες χειραψίες θα γίνουν ;

11. Πόσα διαφορετικά χαρτιά 5 φύλλων μπορούν να μοιραστούν στο πόκερ σε ένα άτομο ;

12. Πόσα διαφορετικά χαρτιά 5 φύλλων μπορούν να μοιραστούν στο πόκερ σε ένα άτομο που να περιέχουν 3 άσσους ;

13. Πόσα διαφορετικά χαρτιά 5 φύλλων μπορούν να μοιραστούν στο πόκερ σε ένα άτομο που να περιέχουν ένα ζευγάρι ;

14. Μια τάξη χορού έχει 22 μαθητές, 10 γυναίκες και 12 άντρες. Αν 5 άντρες και 5 γυναίκες πρέπει να επιλεχτούν σαν ζευγάρια χορού πόσες δυνατές επιλογές υπάρχουν ;

15. ένας φοιτητής θέλει να πουλήσει 2 βιβλία από μια συλλογή 6 μαθηματικών βιβλίων, 7 επιστημονικά και 4 οικονομικών. Πόσες επιλογές είναι δυνατές αν

   (α΄) τα βιβλία που θα πωληθούν πρέπει να ανήκουν στην ίδια κατηγορία,

   (β΄) τα βιβλία πρέπει να έχουν διαφορετικό αντικείμενο ;

16. Ένα πακέτο με 7 διαφορετικά δώρα πρόκειται να μοιραστεί σε 10 παιδιά. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι δυνατά αν κανένα παιδί δεν μπορεί να πάρει παραπάνω από ένα δώρο;

17. Από μια ομάδα από 8 γυναίκες και 6 άντρες πρόκειται να γίνει μια επιτροπή που θα απαρτίζεται από 3 άντρες και 3 γυναίκες. Πόσες διαφορετικές επιτροπές είναι δυνατές αν

    (α΄) δύο από τους άντρες αρνούνται να συμμετάσχουν στην ίδια επιτροπή,

    (β΄) δύο από τις γυναίκες αρνούνται να συμμετάσχουν στην ίδια επιτροπή,

    (γ΄) 1 από τους άντρες και μία από τις γυναίκες αρνούνται να συμμετάσχουν;

18. Κάποιος έχει 8 φίλους από τους οποίους θα προσκαλέσει τους 5 σε δείπνο.

    (α΄) Πόσες δυνατότητες υπάρχουν αν δύο από τους φίλους του είναι μαλλωμένοι και δεν μπορεί να τους καλέσει και τους δυο;

    (β΄) Πόσες δυνατότητες υπάρχουν αν δύο από τους φίλους του αν δύο απο τους φίλους του πρέπει να προσκαλεστούν μαζί;

19. Πόσες διαφορετικές γραμμικές διατάξεις υπάρχουν για τα γράμματα A, B, C, D, E, F στις οποίες

    (α΄) Τα A και B είναι το ένα δίπλα στο άλλο,

    (β΄) Το A είναι πριν από το B,

    (γ΄) Το A είναι πριν από το B και το B είναι πριν από το C,

    (δ΄) Το A είναι πριν από το B και το C είναι πριν από το D,

    (ε΄) Τα A και B είναι διπλανά καθώς και τα C και D,

    (ϛ΄) Το E δεν είναι το τελευταίο στη σειρά;

20. Αν 4 Αμερικανοί, 3 Γάλλοι και 3 Βρετανοί πρόκειται να καθήσουν σε μια σειρά πόσες διατάξεις θέσεων είναι δυνατές αν τα άτομα της ίδιας εθνικότητας πρέπει να κάτσουν όλοι ο ένας δίπλα στον άλλο;

21. Ένας πρόεδρος, ταμίας και γραμματέας, διαφορετικοί σαν πρόσωπα, πρόκειται να επιλεγούν να υπηρετήσουν ανάμεσα στα μέλη ενός συλλόγου 10 ατόμων που ας ονομάσουμε $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$. Πόσοι διαφορετιικοί τρόποι επιλογής είναι δυνατοί αν

    (α΄) δεν υπάρχει περιορισμός,

    (β΄) Οι A και B δεν μπορούν να υπηρετήσουν μαζί, (γʹ) Οι C και D πρέπει είτε να υπηρετήσουν μαζί είτε δεν υπηρετούν.

(δʹ) Ο E πρέπει να επιλεχτεί σε κάποια θέση,

(εʹ) Ο F δέχεται να υπηρετήσει σαν πρόεδρος και μόνο;

22. Μια μαθήτρια πρέπει να απαντήσει 7 στις 10 ερωτήσεις σε μια εξέταση. Πόσες επιλογές έχει; Πόσες επιλογές έχει επίσης αν πρέπει να απαντήσει τουλάχιστον 3 από τις πρώτες 5 ερωτήσεις;

23. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 7 δώρα σε 3 παιδιά αν ο μεγαλύτερος πρέπει να πάρει 3 δώρα και όλα τα υπόλοιπα 2 το καθένα;

24. Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας με 7 σύμβολα είναι δυνατές αν τα 3 από αυτά είναι γράμματα και 4 ψηφία; Υποθέσετε ότι η επανάληψη γραμμάτων ή αριθμών επιτρέπεται και ότι δεν υπάρχει περιορισμός σε ποιες θέσεις θα είναι γράμματα ή ορισμοί.

25. Να δώσετε μια συνδυαστική εξήγηση των ταυτοτήτων:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

26. Θεωρείστε τους αριθμούς με n-ψηφία όπου κάθε ψηφίο είναι κάποιο από τους 10 ακέραιους, $0, 1, \ldots, 9$. Πόσοι τετοιοι αριθμοί υπάρχουν αν

(αʹ) δύο διαδοχικά ψηφία είναι διαφορετικά,

(βʹ) Το 0 εμφανίζεται σαν ψηφίο συνολικά i φορές με , $i = 0, \ldots, n$;

27. Θεωρείστε τρεις τάξεις η κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από n μαθητές. Από αυτή την ομάδα των $3n$ μαθητών μια ομάδα από 3 μαθητές πρόκειται να επιλεχτεί.

(αʹ) Πόσες επιλογές είναι δυνατές;

(βʹ) Πόσες επιλογές είναι δυνατές όταν ζητήσουμε και οι 3 μαθητές να ανήκουν στην ίδια τάξη;

(γʹ) Πόσες επιλογές είναι δυνατές όταν ζητήσουμε 2 από τους 3 να ανήκουν στην ίδια τάξη και ο άλλος μαθητής σε διαφορετική;

(δʹ) Πόσες επιλογές είναι δυνατές όταν ζητήσουμε και 3 μαθητές να ανήκουν σε διαφορετικές τάξεις;

(εʹ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (α) μέχρι το (δ), να γράψετε μια συνδυαστική ταυτότητα.

28. Πόσοι 5-ψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστού με τα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$ αν κανένα ψηφίο δε μπορεί να εμφανίζεται περισσότερο από δύο φορές; (για παράδειγμα, οι αριθμοί 41534, 12388, 12361, 111111, δεν επιτρέπονται.)

29. Στε ένα τουρνουά τένις συμμετέχουν $2n$ αθλητές. Σο πρώτο γύρο, οι παίκτες μοιράζονται σε n ζευγάρια και κάθε ζευγάρι παίζει ένα παιχνίδι. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα πρώτου γύρου είναι δυνατά; Κάθε αποτέλεσμα θα αναφέρει τα n ζευγάρια καθώς και το νικητή σε καθένα από αυτά.

30. Μια 6μελής επιτροπή πρόκειται να σχηματιστεί και τα μέλη της θα επιλεχθούν από μια ομάδα 7 γυναικών και 8 αντρών. Αν η επιτροπή θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 3 γυναίκες και τουλάχιστον 2 άντρες πόσες επιτροπές μπορούν να σχματιστούν;

31. Σε μια τάξη από n φοιτητές θα δοθεί ένα τεστ στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Τα αποτελέσματα θα ανακοινωθούν αναγράφοντας τα ονόματα αυτών που πέρασαν το τεστ σε φθίνουσα διάταξη ως προς το βαθμό. Για παράδειγμα αν ανακοινωθεί « Παπαδόπουλος, Φελουζής» αυτό σημαίνει ότι πέρασαν μόνον οι Παπαδόπουλος και Φελουζής και ο Παπαδόπουλος πήρε καλύτερο βαθμό από τον Φελουζή. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν δύο φοιτητές με τον ίδιο ακριβώς βαθμό πόσες δυνατές λίστες αποτελεσμάτων μπορεί να αναρτηθούν;

32. Πόσα υποσύνολα με 4 στοιχεία του συνόλου $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$ περιέχουν τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία $1, 2, 3, 4, 5$;

33. Να αποδείξετε με αναλυτικό τρόπο την ταυτότητα:

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Να βρείτε ένα συνδυαστικό επιχείρημα για αυτήν την ταυτότητα.