ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2010 ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ GALOIS

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΡΚΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

1. Να διατυπώσετε χωρίς απόδειξη
   (i) Το κριτήριο Eisenstein
   (ii) Το θεώρημα βαθμών επεκτάσεων σωμάτων
   (iii) Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας αριθμός κατασκευάσιμος
   (iv) Την αναγκαία και ικανή συνθήκη επί του n για να είναι η συμμετρική ομάδα S_n επιλύσιμη
   (v) Το θεμελιώδες θεώρημα επίλυσης με ριζικά.

2. Δεδομένου ομομορφισμού ομάδων $\phi : G \to H$, να δείξετε ότι η ευθεία εικόνα $\phi(G)$ είναι υποομάδα της H και $\phi(G)' \subset \phi(G')$.

3. Να δείξετε ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι αδύνατον.

4. Να δείξετε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{11})$ και να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.

5. Έστω ότι οι αριθμοί $m = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ και $n = [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]$ είναι σχετικά πρώτοι. Να δείξετε ότι $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}] = mn$.
   Βρείτε τους βαθμούς $[\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{5}}, 5^{\frac{1}{2}}) : \mathbb{Q}]$ και $[\mathbb{Q}(7^{\frac{1}{7}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}) : \mathbb{Q}]$.

6. (i) Βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$, όπου $a = i + \sqrt{5}$.
   (ii) Είναι το $\mathbb{Q}(a)$ σώμα διάσπασης κάποιου $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$;
   (iii) Βρείτε όλα τα στοιχεία της ομάδας $Gal(\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q})$, ως μεταθέσεις της S_4.
   (iv) Βρείτε το $\phi(a)$ για κάθε $\phi \in Gal(\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q})$.

7. Να δείξετε ότι το $f(x) = 7x^5 - 42x + 21$ δεν επιλύεται με ριζικά πάνω από το $\mathbb{Q}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Χ. Κορνάρος και Μ. Χαραλάμπους

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ