

### Θέματα στην Μαθηματική Λογική

1. Ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες και ποιές αντιλογίες;

$$(\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A$$

$$(A \wedge \neg A) \rightarrow A$$

$$[(A \wedge B) \rightarrow \Gamma] \leftrightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)]$$

2. Στην καθημερινή μας ομιλία χρησιμοποιούμε πολλούς συνδέσμους. Όμως όπως γνωρίζουμε, τα σύμβολα  $\neg, \wedge, \vee$  επαρκούν για να εκφράσουμε όλους τους άλλους συνδέσμους. Να γραφτούν οι παρακάτω προτάσεις σε συζευκτική κανονική μορφή, αφού τις απλοποιήσετε:

(α) Ένας φοιτητής θα περάσει το μάθημα εκτός εάν δεν γράψει καλά ή έχει αντιγράψει.

(β) Τα δόντια χαλάνε είτε από έλλειψη ασβεστίου είτε όταν δεν τα πλένουμε καλά.

3. Να γράψετε τους παρακάτω τύπους σε Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή(ΔΕΚΜ):

$$(\alpha) (\forall x)(\forall y)[(\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z)) \rightarrow (\exists u)R(x, y, u)]$$

$$(\beta) (\forall x)(\forall y)[(\exists z)P(x, y, z) \wedge [(\exists u)Q(x, u) \rightarrow (\exists u)Q(y, u)]]$$

4. Έστω  $L = \{=, \leq, +, *, 1, 0\}$  είναι μια γλώσσα της αριθμητικής. Τότε

(α) Να εκφράσετε με ένα τύπο  $\varphi$  της παραπάνω γλώσσας ότι κάθε αριθμός είναι άρτιος ή περιττός

(β) Να φτιάξετε μια ερμηνεία στην οποία δεν ισχύει ο τύπος  $\varphi$ .

5. Να αποδειχθεί με την μέθοδο ενοποίησης - επίλυσης η πρόταση  $\psi$ :

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y).$$

(Υπόδειξη: Φέρνουμε την  $\neg\psi$  σε ΔΕΚΜ και αφού την μετατρέψουμε σε κανονική Μορφή Skolem την γράφουμε τελικά σε συνολοθεωρητική μορφή στην οποία εφαρμόζουμε την μέθοδο)

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

**Καλή επιτυχία!**

**Ο διδάξας**

**Χαράλαμπος Κορνάρος**