

Θέματα στην Μαθηματική Λογική
Εξεταστική Εαρινού Εξαμήνου 2008

1. Ποιοί απο τους παρακάτω ισχυρισμούς ισχύουν και γιατί;

Το B είναι συνέπεια του A .
Το B είναι συνέπεια του $\{A, A \rightarrow B\}$.
Το $A \wedge B$ είναι συνέπεια του $A \vee B$.
Το Γ είναι συνέπεια του $\{A \wedge B, A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)\}$.

2. Να αποδειχθεί με την μέθοδο των σημαντικών πινάκων (δηλ. με μια Beth απόδειξη) η πρόταση:

$$(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow \Gamma).$$

3. Να γραφτεί η παρακάτω πρόταση Q σε συνολοθεωρητική μορφή. Στην συνέχεια να δείξετε με δυαδική επίλυση ότι $Q \vdash_R \Gamma$.

$$Q : ((A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \wedge A \wedge (\neg B \rightarrow \Gamma).$$

4. Να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση της Λογικής των Κατηγορημάτων:

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y).$$

Δείξτε επίσης ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει πάντα κατασκευάζοντας μια κατάλληλη διμελή σχέση που ερμηνεύει το σύμβολο κατηγορήματος P μέσα σε μια κατάλληλη δομή(ερμηνεία).

5. Έστω $L = \{=, \leq, +, \cdot, 0, 1\}$ είναι η γλώσσα της αριθμητικής. Τότε να εκφράσετε με ένα τύπο της παραπάνω γλώσσας τα παρακάτω:

- (α) το γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης(για κάθε δύο αριθμούς υπάρχουν δυο μοναδικοί αριθμοί -το πηλίκο και το υπόλοιπο- για τους οποίους ισχύει...).
- (β) Μεταξύ του 0 και του 1 δεν υπάρχουν αριθμοί.
- (γ) Για κάθε αριθμό υπάρχει ο επόμενος του και το τετράγωνό του.

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Ο Διδάξας

Κορνάρος Χ.