

Θέματα στην Μαθηματική Λογική

1. Ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες και ποιές αντιλογίες:

$$(\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$$

$$[(A \wedge B) \rightarrow \Gamma] \leftrightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)]$$

Για τις προτάσεις που διαπιστώσετε ότι πρόκειται για ταυτολογίες τότε δοκιμάστε να τις αποδείξετε και με κάποιο άλλο τρόπο.

2. Έστω ϕ, ψ, α είναι τρεις προτάσεις. Να δείξετε χρησιμοποιώντας κατάλληλα τους ορισμούς ότι ο τύπος α είναι (ταυτολογική) συνέπεια του συνόλου $\{\phi, \psi\}$ εαν και μόνον εαν ο τύπος $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha)$ είναι ταυτολογία.

3. Στην καθημερινή μας ομιλία χρησιμοποιούμε πολλούς συνδέσμους. Όμως όπως γνωρίζουμε, τα σύμβολα \neg, \wedge, \vee επαρκούν για να εκφράσουμε όλους τους άλλους συνδέσμους. Να γραφτούν οι παρακάτω προτάσεις σε συζευκτική κανονική μορφή, αφού τις μεταγράψετε κατάλληλα σε προτάσεις της Προτασιακής Λογικής: (α) Ένας φοιτητής θα περάσει το μάθημα εκτός εάν δεν γράψει καλά ή έχει αντιγράψει.

(β) Τα δόντια χαλάνε είτε από έλλειψη ασθεστίου είτε όταν δεν τα πλένουμε καλά.

4. Να αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση της Λογικής των Κατηγορημάτων:

$$(\forall x)\phi(x) \rightarrow (\exists x)\phi(x).$$

Δείξτε επίσης ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει πάντα κατασκευάζοντας μια κατάλληλη ϕ και μια κατάλληλη δομή(ερμηνεία).

5. Να γράψετε τους παρακάτω τύπους σε Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή(ΔΕΚΜ) αναφέροντας και τους νόμους της Κατηγορηματικής Λογικής που χρησιμοποιήσατε σε κάθε βήμα της απάντησής σας.

$$(\alpha) (\forall x)(\forall y)[(\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z)) \rightarrow (\exists u)R(x, y, u)]$$

$$(\beta) (\forall x)(\forall y)[(\exists z)P(x, y, z) \wedge [(\exists u)Q(x, u) \rightarrow (\exists u)Q(y, u)]]$$

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Ο διδάξας

Χαράλαμπος Κορνάρος