ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
83 200 ΚΑΡΛΟΒΑΣΙ
ΣΑΜΟΣ

Καρλόβασι 28/09/2011

Θέματα στη Μαθηματική Λογική
Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2011
Διδάξας Χ. Κορνάρος.

1. Είναι γνωστές οι παρακάτω ισότητες στην θεωρία συνόλων:

- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
- $A \subseteq B \rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

Να αντικαταστήσετε τις παραπάνω ισότητες με προτάσεις της Λογικής και στην συνέχεια να τις αποδείξετε.

2. Χρησιμοποιώντας τους σημαντικούς πίνακες του Beth να απαντήσετε ποιες από τις παρκάτω προτάσεις είναι ταυτολογία:

- $((A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \Gamma)) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$
- $[(A \leftrightarrow \Gamma) \wedge (B \leftrightarrow \Delta) \wedge (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)] \rightarrow ((A \wedge B) \vee (\Gamma \wedge \Delta))$

3. Να δειχθεί με την μέθοδο της επίλυσης ότι η πρώτη πρόταση από τις παρακάτω είναι αντίφαση ενώ η δεύτερη ταυτολογία.

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma) \wedge A \wedge \neg\Gamma, \quad [(A \wedge B \rightarrow \Gamma) \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$$

4. Αποδείξτε την παρακάτω ταυτολογία χρησιμοποιώντας την μέθοδο ενοποίησης – επίλυσης.

$$[(\exists X)p(X) \rightarrow (\forall X)q(X)] \rightarrow (\forall X)[p(X) \rightarrow q(X)]$$

Να κατασκευάσετε μια (απλή) δομή στην οποία να ερμηνεύσετε κατάλληλα τα σύμβολα κατηγορημάτων p, q ώστε να διαψεύδεται η πρόταση που προκύπτει όταν πάρουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή (αντικαταστήσουμε δηλ. το δεύτερο $\rightarrow$ με $\leftarrow$).

5. Να βρεθεί η KMS(κανονική μορφή Skolem) των παρακάτω δυο προτάσεων της Λογικής των Κατηγορημάτων (τα p και q είναι σύμβολα κατηγορημάτων):

- $(\exists X)(\forall Y)(\exists Z)[(p(X,Y) \vee \neg q(X) \vee r(Z)) \wedge (\neg p(X,Y) \vee q(X)) \wedge (\neg p(X,Y) \vee r(Z))]$
- $\neg[(\forall X)p(X) \rightarrow (\exists Y)(\forall Z)q(Y,Z)]$

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία!