

Θέματα στη Μαθηματική Λογική
Εξεταστική Φεβρουαρίου 2011
Διδάξας Κορνάρος Χ.

1. Έστω A, B, Γ είναι τρεις προτάσεις της Λογικής των Προτάσεων (Λ.Π). Να γράψετε με κατάλληλες προτάσεις της Λ.Π. κάθε μια από τις παρακάτω εκφράσεις

- Αν δεν ισχύει το A τότε σίγουρα ισχύει κάποιο απ' τα B ή Γ .
- Το Γ είναι συνέπεια των A και B .
- Ισχύει ακριβώς ένα εκ των A, B και Γ .

2. Διαπιστώστε με την μέθοδο των σημαντικών πινάκων του Beth ποιά απ' τις παρακάτω δύο προτάσεις είναι αντιλογία και ποιά ταυτολογία.

$$(\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A, \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$$

3. Να δειχθεί με την μέθοδο της δυαδικής επίλυσης ότι

$$(A \wedge B \rightarrow \Gamma) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)).$$

4. Να αποδείξετε ότι ισχύει ο νόμος

$$(\forall X)(p(X) \wedge q(X)) \leftrightarrow ((\forall X)p(X) \wedge (\forall X)q(X))$$

όπου p και q είναι δυο μονομελή σύμβολα κατηγορήματος

- με τον ορισμό αληθείας του Tarski.
- με ένα πλήρη συστηματικό πίνακα του Beth.

5. Δίνεται η γλώσσα $\mathcal{L} = \{\cdot, +, 0, 1\}$ στην Λογική των Κατηγορημάτων (Λ.Κ) όπου \cdot και $+$ είναι σύμβολα διαθέσιων συναρτήσεων και $0, 1$ σταθερών. Προσπαθήστε να γράψετε με προτάσεις στην \mathcal{L} τις συνήθεις ιδιότητες των παραπάνω πράξεων και σταθερών που ισχύουν σε ένα σώμα (π.χ. ότι η πρόσθεση (+) και πολλαπλασιασμός (\cdot) είναι κλειστές πράξεις, κάθε στοιχείο έχει αντίθετο και κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει αντίστροφο, ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα κ.ο.κ.)

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Καλή επιτυχία!