Ασκήσεις Θεωρίας Αριθμών. 12/11/2003

1

(Είναι αλήθεια ότι η γνώση δεν μεταφέρεται από τον ένα στον άλλο αλλά κατακτιέται. Η γνώση μοιάζει σαν την πλαστελίνη που πλάθεται. Εγώ καταλαβαίνω αυτή την πρόταση έτσι, ο άλλος έτσι και κάποιος άλλος δεν την καταλαβαίνει καθόλου. Ο τελευταίος πρέπει να προσπαθήσει περισσότερο. Η γνώση απαιτεί προσπάθεια. Ειδικά η μαθηματική γνώση προσελκύει τον άνθρωπο όχι για τα χρήματα άλλα για την ανωτερότητά της. Οι ασκήσεις που σας δίνονται δεν έχουν σκοπό να σας ταλαιπωρήσουν. Συγγνώμη αν κάποιοι αισθάνονται έτσι. Σκοπός είναι να έρθετε περισσότερο σε επαφή με το αντικείμενο του μαθήματος και να αισθανθείτε την χαρά της λύσης)

1. Γράψτε αναλυτικά την απόδειξη της πρότασης:

Αλγόριθμος της διαίρεσης

Για κάθε ακέραιο a και $b \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι π και υ έτσι ώστε

$$a = b\pi + \upsilon \quad \text{και} \quad 0 \leq \upsilon < |b|$$

Υπόδειξη: Στο μάθημα αποδείξαμε ότι τα π και υ είναι μοναδικά και ότι το υ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει ένας άλλος ακέραιος π έτσι ώστε

$$a = b\pi + \upsilon \quad (*)$$

Τώρα, συνεχίστε την απόδειξη, δείχνοντας ότι αναγκαστικά αυτός ο υ θα υπακούει την σχέση $0 \leq \upsilon < |b|$. Διότι αλλιώς $\upsilon \geq |b|$ και άρα θα έπρεπε να ικανοποιεί την (*) και ο $\upsilon - |b|$, για κάποιο άλλο π, φυσικός και θα είχαμε άτοπο διότι το υ υποθέσαμε ότι είναι ο ελάχιστος τέτοιος. Γράψτε τις λεπτομέρειες προσεκτικά

2. Γράψτε αναλυτικά την απόδειξη της παρακάτω πρότασης:
Αν a είναι ακέραιος τότε ο a^5-a διαιρείται με το 5

3. Το τετράγωνο ενός ακεραίου a διαιρούμενου δια του 4 αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 (Υπόδειξη: Γράψτε με τον Αλγ. της διαίρεσης το a ως $a=2n+u$)

4. Γράψτε τον αριθμό 5216 στο 2-δικό σύστημα. Επίσης γράψτε τον 1101010011_2 στο δεκαδικό σύστημα (Απάντηση 851). Επίσης αν $162=321_g$ να βρεθεί η βάση g (Απ: 7)

5. Στο μάθημα ακούσαμε για την δεύτερη διαιρετική ταυτότητα για τους ακέραιους $a,\ b\neq 0$:

$$a=q_1 b+r_1 \quad \text{όπου} \quad -\tfrac{1}{2}|b|\leq r_1<\tfrac{1}{2}|b|$$

Δείξτε ότι το πηλίκο q_1 μπορεί να εκφραστεί ως

$$\left[\frac{a}{|b|}+\frac{1}{2}\right]\operatorname{sgn} b$$

(Υπόδειξη δουλέψτε όπως δουλέψαμε αντίστοιχα για το πηλίκο του Αλγόριθμου της διαίρεσης, μέσα στο μάθημα)

6. Βρείτε το ελάχιστο απόλυτο υπόλοιπο του a με το 7 όταν είναι γνωστό ότι ισχύει $7/(a+10)$
Απ: -3

7. Ο Αλγόριθμος της διαίρεσης δεν μπορεί να ισχύει στους πραγματικούς

Υπόδειξη: φτιάξτε αντιπαράδειγμα π.χ πάρτε $a=\pi$ και $b=6$ και δείξτε οτι υπάρχουν πολλά "πηλίκα" q και πολλά "υπόλοιπα" $0 \le \upsilon < |b|$ έτσι ώστε $\pi = 6b + \upsilon$

8. Ποιοι από τις ακόλουθες ισχυρισμούς που αναφέρονται σε ακέραιους είναι αληθείς (α) και ποιοί ψευδείς (ψ). Στην περίπτωση που είναι αληθείς να τις αποδείξετε και στην περίπτωση που είναι ψευδείς να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα

i) Αν $b/(a^2+1)$, τότε $b/(a^4+1)$ (ψ)

ii) Αν $b/(a^2-1)$, τότε $b/(a^4-1)$ (α)

iii) Αν p είναι ένας πρώτος και p/a και $p/(a^2+b^2)$ τότε p/b (α)

iv) Αν p είναι ένας πρώτος και p/a καθώς και $p/(a^2+6b^2)$ τότε p/b (ψ)

v) Αν a/m και b/m και $(a,b)=1$ τότε $(ab)/m$

Στις παρακάτω ασκήσεις το $(a_1,\dots,a_\nu)$ παριστάνει τον Μ.Κ.Δ αυτών των αριθμών και το $\langle a_1,\dots,a_\nu \rangle$ το Ε.Κ.Π

9. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ των 71383 και 8671 και να τεθεί στη μορφή $\kappa \cdot 8671 + \lambda \cdot 71383$. Όμοια για το ζεύγος 12378 και 3054

10. Θεώρημα του Μ.Κ.Δ Έστω ότι οι ακέραιοι $a_1,\dots,a_\nu$ δεν είναι όλοι μηδέν. Τότε υπάρχει ακέραιος δ που είναι ο Μ.Κ.Δ των αριθμών αυτών, και επιπλέον υπάρχουν ακέραιοι $\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_\nu$ έτσι ώστε

$$\delta = a_1\kappa_1 + \dots + a_\nu \kappa_\nu$$

Υπόδειξη: Με επαγωγή. πχ. προσπαθήστε να το αποδείξετε για $\nu=3$ χρησιμοποιώντας τις ιδέες που είδατε στην απόδειξη της πρότασης για $\nu=2$ και ίσως αν θέλετε φυσικά κάποιες άλλες γνωστές προτάσεις για τον Μ.Κ.Δ που μάθατε στο μάθημα

11. Έστω $a=12378$, $b=3054$, $\gamma=21$. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ των a, b, γ και να τεθεί στη μορφή

$$a\kappa + b\lambda + \gamma\mu$$

Ορισμός. Τα στοιχεία $a_1, \dots, a_\nu$ λέγονται πρώτα (ή ξένα) μεταξύ τους όταν ο Μ.Κ.Δ τους είναι το 1 δηλ.

$$(a_1, \dots, a_\nu) = 1$$

12. Έστω $a, b, \gamma \in \mathbb{Z}$, και $(a, b) = 1$ και $a / b\gamma$. Τότε a/γ

Παράδειγμα: $6/8 \cdot 3$ όμως ο 6 δεν διαιρεί τον 8 ούτε τον 3. Είναι αντίφαση πρός την πρόταση που μόλις αποδείξατε;

13. Εάν ο ακέραιος a διαιρεί το γινόμενο $a_1 \cdots a_\nu$ και είναι ξένος πρός τους $a_1, \dots, a_{\nu-1}$ τότε αναγκαστικά a/a_ν (Γενίκευση του 12.)

14. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των $-16, 18, 35$ δηλαδή το $<-16, 18, 35>$. Αν θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόταση (αφού βέβαια την αποδείξετε)

$$<a_1, \dots, a_\nu> = <a_1, <a_2, \dots, a_\nu>> = <a_1, <a_2, <a_3, \dots a_\nu>>>$$

κ.ο.κ

Διοφαντικές εξισώσεις. Ονομάζουμε σύστημα Διοφαντικών εξισώσεων, ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$f_1(x_1,\dots,x_\nu)=0$$
$$f_2(x_1,\dots,x_\nu)=0$$
$$\vdots$$
$$f_k(x_1,\dots,x_\nu)=0$$

όπου τα $f_1,\dots,f_k$ είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές, και ζητάμε να βρούμε όλες τις δυνατές ακέραιες τιμές των $x_1,\dots,x_\nu$ που ικανοποιούν το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων. Τέτοιες εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε εφαρμογές.

15. Δείξτε το παρακάτω θεώρημα. Έστω $a_1,\dots,a_\nu$ είναι ακέραιοι που δεν είναι όλοι 0 και $b\in\mathbb{Z}$. Η Διοφαντική εξίσωση

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_\nu x_\nu=b$$

έχει λύσεις, τότε και μόνον τότε αν

$$(a_1,\dots,a_\nu)\mid b$$

π.χ Να βρεθεί μια λύση της Διοφαντικής εξίσωσης

$$12378x+3054y+21z=15$$

16. Έστω a,b,γ ακέραιοι και $ab\neq 0$ και $(a,b)=1$. Τότε αν το ζευγάρι (x_0,y_0) είναι μια λύση της Διοφαντικής εξίσωσης

$$ax+by=\gamma$$

τότε, το σύνολο των λύσεων της παραπάνω Διοφ. εξίσωσης, περιγράφεται με τους τύπους

$$x=x_0+bk, \quad y=y_0-ak \text{ όπου } k\in\mathbb{Z} \text{ οποιοσδήποτε}$$

π.χ. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της $71383x+8671y=-39$

⑥

17. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$6x + 15y + 10z = 19$$

Υπόδειξη. Είναι $(6, 15) = 3$. Οπότε η εξίσωση γράφεται

$$3(2x + 5y) + 10z = 19$$

Θέτουμε $2x + 5y = \omega$. Λύνουμε πρώτα τη εξίσωση

$$3\omega + 10z = 19$$

18. Να βρεθούν οι ακέραιες θετικές λύσεις του συστήματος

$$x + y + z = 100$$
$$5x + 2y + \frac{z}{10} = 100$$

Υπόδειξη: Μπορείτε για παράδειγμα να λύσετε ως προς z την πρώτη και να αντικαταστήσετε στην δεύτερη

19. Να βρεθούν οι ακέραιες θετικές λύσεις του συστήματος

$$x + y + z = 20, \quad 3x + 2y + z/2 = 20$$

Όμοια, Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις του συστήματος

$$3x - 7y + 5z = 16, \quad 19x + 8y - 13z = 20$$

Ασκήσεις πάνω στην αρχή της καλής Διάταξης (ή της Αρχής Ελαχίστου όπως λέγεται αλλιώς)

Στο μάθημα μάθαμε ότι αν A είναι μια περιοχή με διάταξη τότε η αρχή της καλής διάταξης είναι το αξίωμα που λέει ότι

Εάν Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του A που αποτελείται μόνο από θετικά στοιχεία. Τότε το Y έχει ένα ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή υπάρχει το $\min Y$)

Παρατήρηση: Οι ~~ακέραιοι~~ φυσικοί αριθμοί ικανοποιούν την παραπάνω αρχή

Δείξτε τις παρακάτω γενικεύσεις της Αρχής της καλής διάταξης

20. Θεώρημα I. Έστω $x_0 \in \mathbb{Z}$ και Y ένα μη κενό σύνολο από ακεραίους που όλοι τους είναι $\geq x_0$. Τότε το Y έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήσατε την αρχή της κ. διάταξης για το σύνολο $Y^* = \{y^* \mid y^* = y - x_0 \text{ και } y \in Y\}$ $\quad y \geq x_0$, $y - x_0 \geq 0$

21. Θεώρημα II. (Αρχή μεγίστου στους ακεραίους). Έστω $x_0 \in \mathbb{Z}$ και Y ένα μη κενό σύνολο από ακεραίους πού όλοι τους είναι $\leq x_0$. Τότε το Y έχει ένα μέγιστο στοιχείο (δηλ. υπάρχει το $\max Y$)

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $Y_1 = \{y_1 \mid y_1 = -y + x_0 \text{ για κάποιο } y \in Y\}$

Ασκήσεις για το ακέραιο μέρος $[x]$ ενός πραγματικού αριθμού x.
Στις παρακάτω ασκήσεις με n συμβολίζουμε ένα ακέραιο αριθμό και με x ένα πραγματικό.

22. Δείξτε ότι $[x+n] = [x] + n$. Επίσης αν $n > 0$ τότε $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

23. Αν x είναι ένας ακέραιος τότε $[x] + [-x] = 0$. Αν δεν είναι τότε $[x] + [-x] = -1$

24. $[x+y] \geq [x] + [y]$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Η ισότητα ισχύει εάν $x+y < [x] + [y] + 1$)

25. Εάν $n > 1$ τότε

$$[x] + [x + \tfrac{1}{n}] + [x + \tfrac{2}{n}] + \dots + [x + \tfrac{n-1}{n}] = [nx]$$

Υπόδειξη: Θέστε $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] - [nx]$
και δείξτε $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ και εάν $0 \leq x < \frac{1}{n}$ τότε $f(x) = 0$

Ασκησεις

1) Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι προσθετικές, ποιές πολλαπλασιαστικές και ποιές τίποτα απ' αυτές; Κάντε απόδειξη ή δώστε αντιπαράδειγμα

α. $d(x) = \sum_{\substack{0<d\le x \\ d|x}} 1$ (πολ/στική όχι προσθετική)

β. $\sigma(x) = \sum_{\substack{0<d\le x \\ d|x}} d$ (όμοια)

γ. $f(x) = \sum_{\substack{0<d\le x \\ (d,x)=1}} d$ (τίποτα εξ' αυτών)

δ. $\Lambda(x)$ (όμοια) ε. $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ (όμοια)

στ. $\pi(x) = \sum_{\substack{1\le p\le x \\ \text{πρώτος}}} 1$ (όμοια)

ζ. $\theta(x) = \sum_{\substack{1\le p\le x \\ \text{πρώτος}}} \ln p$ η. $\Omega(x) = \sum_{\substack{z|x \\ z=\text{δύναμη πρώτου}}} 1$ (προσθετική όχι πολ/στική)

2) Δείξτε ότι αν η f είναι πολ/στική τότε αναγκαστικά και η $\sum_{d|r} f(d)$ είναι πολ/στική

Εφαρμογή: Δείξτε ότι $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{για } n=1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} = \left[\frac{1}{n}\right]$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η δεξιά πλευρά είναι μια πολλ/στική συνάρτηση.
Οπότε για να ελέγξτε την ισοτητα αρκεί να εξετάσετε την περίπτωση $n =$ δύναμη κάποιου πρώτου.

3) Δείξτε ότι το $\sum_{\substack{m \mid n \\ m \le n-1}} \phi(m)$ παριστάνει το πλήθος των αριθμών $\le n$ οι οποίοι δεν είναι σχετικοί πρώτοι με το n
(Υπόδειξη Χρησιμοποιείστε την σχέση $\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$)

4) Έστω f και g δυο πολλ/στικές αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις τότε δείξτε ότι ~~τα~~ και οι παρακάτω συναρτήσεις είναι πολλ/στικές.
α. το γινόμενο τους $h(n) = f(n) \cdot g(n)$
b. το Dirichlet γινόμενο τους $r(n) = \sum_{1 \le d \cdot e = n} f(d)\, g(e)$

γ. Εάν υποθέσουμε ότι για κάθε n το $g(n) \neq 0$ το κλάσμα τους f/g

5) Δείξτε ότι αν $f \neq 0$ είναι πολλ/στική τότε $f(1) = 1$ και αν είναι προσθετική τότε $f(1) = 0$

6) Δείξτε ότι αν $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ η κανονική παράσταση του $n > 1$
τότε $d(n) = \prod_{1 \le i \le k} (1 + n_i)$

Υπόδειξη Η d είναι πολλ/στική. Οπότε θα χρειαστείτε το $d(p_i^{n_i})$

7) Όμοια δείξτε ότι: $\sigma(n) = \prod_{1 \le i \le k} \frac{p_i^{n_i+1} - 1}{p_i - 1}$

8) Βρείτε το άθροισμα $\sum_{(d,n)=1} d$

(Υπόδειξη: Αν $(m,n)=1$ τότε δείξτε ότι $(n-m,n)=1$ και συμπεράνετε από εδώ ότι το ζητούμενο άθροισμα μας κάνει $\frac{1}{2} n \phi(n)$)

9) Δείξτε ότι αν η $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ είναι πολ/κή τότε αναγκαστικά και η f είναι πολ/στική

(Υπόδειξη Χρησιμοποιείστε τον τύπο της αντιστροφής του Möbius

10) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της αντιστροφής του Möbius δείξτε ότι $\sum_{q|n} \mu(q) d\left(\frac{n}{q}\right)=1$ και $\sum_{d|n} \mu(d)\, \sigma\left(\frac{n}{d}\right)=n$

Ασκήσεις για τη ϕ

11) Μια άλλη απόδειξη του γεγονότος $\phi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$

Ας συμβολίσουμε με $|B|$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B. Από την θεωρία συνόλων είναι γνωστή η παρακάτω ισότητα:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{1\le i\le m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots +$$

$$+ (-1)^{m+1} |A_1 \cap \dots \cap A_m|$$

Έστω $n=p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$ η κανονική παράσταση του n σε πρώτους αριθμούς με $n_i>0$. Τότε ορίζουμε για $i\le k$: A_i = οι αριθμοί $\le n$ που δεν είναι σχετικά πρώτοι με το n και διαιρούνται με το p_i

Τότε $\phi(n)=n-|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \dots$ κ.ο.κ.

12) Δείξτε ότι για κάθε $m \geq 1$ και $n \geq 1$ ισχύει η ισότητα

$$\phi(mn) = \frac{(m,n)}{\phi((m,n))}\phi(m)\phi(n)$$

Υπόδειξη: Έστω $m = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ και $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ με $m_i \geq 0$ και $n_i \geq 0$. Τότε $\phi((m,n)) = (m,n) \prod_{\substack{m_i \neq 0 \\ n_i \neq 0}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ κ.ο.κ αντικαθιστούμε στον τύπο

Τέλειοι αριθμοί

Ένας ακέραιος $n > 0$ λέγεται τέλειος αν είναι το άθροισμα όλων των μικρότερων διαιρετών του. Π.χ $28 = 1+2+4+7+14 =$
$1 + (2+14) + (4+7)$. Άρα το 28 είναι τέλειος

13) Δείξτε ότι n είναι τέλειος ανν $\sigma(n) = 2n$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $n = \sigma(n) - n$ ανν n είναι τέλειος

(Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος)

14) Άσκηση: Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί

(Υπόδειξη: Έστω $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ οι πρώτοι αριθμοί που έχουμε βρεί μέχρι το βήμα k. Τότε στο βήμα $k+1$ μπορούμε να βρούμε άλλο ένα πρώτο p_{k+1} μεγαλύτερο απ' αυτούς. Πράγματι Δείξτε ότι ο $P = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$ διαιρείται αναγκαστικά με κάποιο πρώτο q μεγαλύτερο απ' όλους τους $p_1, \dots, p_k$. Ορίστε $p_{k+1} =$ ο μικρότερος πρώτος q μεγαλύτερος απ' όλους τους $p_1, \dots, p_k$)

15) Άσκηση: Οι πρώτοι του Mersenne.

Ένας πρώτος της μορφής $2^p - 1$, με p πρώτος λέγεται πρώτος του Mersenne. Δείξτε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος τότε το n είναι πρώτος

Υπόδειξη: Για κάθε $n_1, n_2 > 0$ ισχύει

$$(2^{n_1}-1) / (2^{n_1 n_2}-1)$$

Άσκηση. Οι πρώτοι του Fermat.

Ένας πρώτος της μορφής $2^{2^n}+1$ λέγεται πρώτος του Fermat.

16) Δείξτε ότι αν το 2^n+1 είναι πρώτος τότε είναι αναγκαστικά πρώτος του Fermat δηλαδή το n είναι μια δύναμη του 2

Υπόδειξη: Για κάθε $k, r \geq 0$ ισχύει

$$(2^{2^r}+1) / (2^{2^r(2k+1)}+1)$$

19)

Ασκήσεις με το γινόμενο Dirichlet

Ως γνωστό αν f και g είναι δύο αριθμοθεωρητικές συναρτήσεις ορίζουμε το γινόμενο Dirichlet τους να είναι το

20)

$$f*g(n) = \sum_{de=n} f(d)f(e)$$

Ακόμα ορίζουμε τις συναρτήσεις $I(x) = [\frac{1}{x}]$ για x ακέραιο και $u(n) = 1$ (σταθερή συνάρτηση ίση με 1) και $T(n)=n$ (η ταυτοτική συνάρτηση)

γ 17) Δείξτε ότι το γινόμενο του Dirichlet έχει τις παρακάτω ιδιότητες

a. $f*g = g*f$

β. $(f*g)*h = f*(g*h)$

γ. $f*I = I*f = f$ (δηλ. η I παίζει το ρόλο του ουδέτερου στοιχείου)

d_1

18) Δείξτε ότι αν η f είναι μια αριθμοθεωρητική συνάρτηση με

$f(1) \neq 0$ τότε υπάρχει μια αριθμοθεωρητική συνάρτηση g (που την λέμε αντίστροφη της f ως προς $*$) έτσι ώστε

$$g(1) = \frac{1}{f(1)} \quad \text{και} \quad f * g = I = g * f$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε επαγωγικά την g:

$$g(1) = \frac{1}{f(1)} \quad \text{και} \quad g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < n}} g(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Δείξτε με επαγωγή (στο n) ότι αυτή είναι η αντίστροφη δηλ. ισχύει $g * f(n) = I(n)$ για κάθε $n \geq 1$

19) Ποιες είναι οι συναρτήσεις $\tau * \mu$ και $\sigma * \mu$; Ποια είναι η αντίστροφη μ^{-1} της μ ως πρός το γινόμενο $*$ του Dirichlet;

20) Δείξτε ότι αν η f είναι πολλαπλασιαστική και όχι ταυτοτικά μηδέν τότε η αντίστροφή της (ως προς το γινόμενο του Dirichlet) είναι πολλαπλασιαστική

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Έστω ότι ισχύει $f^{-1}(d_1 d_2) = f^{-1}(d_1) \cdot f^{-1}(d_2)$ για κάθε $d_1 d_2 < mn$ και $(d_1, d_2) = 1$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(mn) = f^{-1}(m) f^{-1}(n)$ εάν $(m,n) = 1$.

Πράγματι $f^{-1}(mn) = - \sum_{\substack{d < mn \\ \text{και } d \mid mn}} f^{-1}(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)$ Οπότε υπάρχουν

$d_1 \mid m$ και $d_2 \mid n$ έτσι ώστε $d_1 \cdot d_2 = d$ και $f^{-1}(d) = f^{-1}(d_1) f^{-1}(d_2)$ κ.ο.κ

Άλλες ασκήσεις

21) Δείξτε ότι αν η g είναι πολ/κή τότε είναι και οι
$$f(n)=\sum_{d^2/n} g(d^2) \quad \text{και} \quad h(n)=\sum_{d^2/n} g\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

22) Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών d του n οι οποίοι δεν διαιρούνται με το τετράγωνο κάποιου αριθμού.

Υπόδειξη. Έστω $p_1,\dots,p_m$ είναι οι πρώτοι αριθμοί που διαιρούν το n. Τότε το ζητούμενο πλήθος είναι $m+\binom{m}{2}+\dots+1$
$= 2^m$ δηλ. $2^{\nu(n)}$

23) Δείξτε ότι το $\mu(n)$ είναι το άθροισμα των αρχικών (μιγαδικών) n-οστών ριζών της μονάδας (Υπενθυμίζουμε ότι τα στοιχεία $z\in\mathbb{C}$ έτσι ώστε $z^n=1$ και $z^m\neq 1$ για $1\leq m<n$ λέγονται αρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας)

24) Αν a και b δοσμένοι θετικοί ακέραιοι, δείξτε ότι υπάρχουν ακέραιοι x,y: $(x,y)=a$ και $\langle x,y\rangle=b$ όταν και μόνον όταν a/b. Αν a/b δείξτε ότι ο αριθμός των διαφορετικών διατεταγμένων ζευγών από θετικούς αριθμούς x,y τέτοιους ώστε $(x,y)=a$ και $\langle x,y\rangle=b$ είναι 2^r, όπου r είναι ο αριθμός των (διαφορετικών) πρώτων στην ανάλυση του b/a σε πρώτους παράγοντες.

Ποιο είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα, αν το ζεύγος (x,y) αντικατασταθεί από την τριάδα (x,y,z);

Υπόδειξη: Ο αριθμός των διατεταγμ. τριάδων είναι $6^n \prod_{i=1} a_i$ όπου
$b/a = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$