

Eργασία 1h:

Στην Οαρία Αριθμών συνολίζονται με U_n το σύνολο των ακεραίων αριθμών από το 1 μέχρι το n οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με το n δηλ. έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη με το n την μονάδα. Επίσης με Q_n συνολίζουμε τα στοιχεία m του U_n τα οποία είναι τετράγωνα (mod n) δηλ. υπάρχει ένα στοιχείο $s \in \{1, \dots, n\}$ έτσι ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $m - s^2$ με το n είναι 0. Π.χ για $n=8$ έχουμε $U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$ και $Q_8 = \{1\}$. Το $1 \in Q_8$ διότι το 8 προφανώς διαιρεί το $1 - 1^2$ δηλ. το 0. Να γραφτεί δυο συνάρτησες `unit[n_Integer]` και `quadratic[n_Integer]` οι οποίες να επιστρέφουν για κάθε $n > 1$ τα παραπάνω σύνολα U_n, Q_n αντίστοιχα. Υπόδειξη: Οα σαV j ανά κρίση στη κάποια από τις εντολές `GCD`, `Mod`, `Select`, `Append` και `Do`. Κάντε αρκετές δοκιμές για να βεβαιωθείτε ότι τις υλοίσατε σωστά.

Eργασία 2h:

Απο τον Διανυσματικό Λογισμό είναι γνωστό ότι η πραγματική συνάρτησ η $f[x,y]$ δυο μεταβλητών x,y έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0, y_0) αρκεί να ισχύουν οι συνθήκες:

$$H_x(x_0, y_0) = H_y(x_0, y_0) = 0$$

$$H_{xx}(x_0, y_0) > 0$$

$$(iii) \text{ το } D = H_{xx}(x_0, y_0) \cdot H_{yy}(x_0, y_0) - (H_{xy}(x_0, y_0))^2 \text{ είναι } > 0$$

Αν στη (ii) έχουμε < 0 αντί > 0 και τα άρτα (i),(iii) να ισχύουν τότε το (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο.

Δίνεται η συνάρτησ η $f[x,y] := \text{Log}[x^2 + y^2 + 1]$. Αι ού εντοπίστε τα κρίσιμα σημεία της δηλ. εκείνα που ικανοποιούν την (i) βρείτε τα τοπικά μέγιστα, τα τοπικά ελάχιστα και τα saddle σημεία της. Saddle είναι εκείνα τα κρίσιμα σημεία για τα οποία $D < 0$. Για $D = 0$ πρέπει να γίνει περαιτέρω ανάλυση για το (x_0, y_0) . Π.χ με γραμμική παράσταση για να ελέγξουμε το είδος του σημείου! Κάντε το ίδιο για την $g[x,y] := x^5 + y^5 + x \cdot y$ και για την $h[x,y] := x^2 - 2xy + y^2$. Κάντε και τις γραμμικές παραστάσεις με την `Plot3D` ή με κάποια άλλη κατάλληλη για περαιτέρω πειραματική βοήθεια.