Λογικη των Κατηγορηματων

Βασικές προτάσεις για τις συνέπειες.

- $T \models \phi$ ανν $T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι κανοποιήσιμο σύνολο τύπων
- **Θεώρημα του Συμπεράσματος.**
$$T \cup \{\phi\} \models \psi \text{ ανν } T \models \phi \to \psi.$$

Βασικοί νόμοι και θεωρήματα στην Λογική των Κατηγορημάτων.

1. Όλοι οι νόμοι που γνωρίσαμε στην Λογική των Προτάσεων ισχύουν απαράλακτα.π.χ.
$$\neg(\neg\phi) \equiv \phi \qquad \text{(νόμος διπλής άρνησης, } \phi \text{ είναι ένας τύπος)}$$
$$\phi \wedge (\psi \vee \omega) \equiv \phi \wedge (\psi \vee \omega) \qquad \text{(επιμεριστικός, } \phi, \psi, \omega \text{ τυχαίοι τύποι)}$$

2. Νόμοι Άρνησης με ποσοδείκτες
$$\neg(\exists X)\phi \equiv (\forall X)(\neg\phi), \ \ \neg(\forall X)\phi \equiv (\exists X)\neg\phi$$

3. Νόμοι εναλλαγής ποσοδεικτών
$$(\exists X)(\exists Y)\phi \equiv (\exists Y)(\exists X)\phi \text{ και όμοια } (\forall X)(\forall Y)\phi \equiv (\forall Y)(\forall X)\phi$$

Σχόλιο: Δεν ισχύει πάντα $(\forall X)(\exists Y)\phi \equiv (\exists Y)(\forall X)\phi$. Για παράδειγμα, αν $\phi : Y > X$, τότε
$$(\forall X)(\exists Y)(Y > X) \not\equiv (\exists Y)(\forall X)(Y > X)$$
στην δομή $\mathscr{A} = \mathbb{N}$ όπου το διμελές σύμβολο κατηγορήματος $>$ ερμηνεύεται κατά τα γνωστά ως "μεγαλύτερο του".

4. Νόμοι απορρόφησης ποσοδεικτών.
Έστω η μεταβλητή X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή ο ϕ είναι πάντα αληθής, τότε $(\forall X)\phi \equiv \phi$ και όμοια $(\exists X)\phi \equiv \phi$

5. Νόμοι κατανομής ποσοδεικτών
$$(\forall X)(\phi \wedge \psi) \equiv \big[(\forall X)\phi\big] \wedge \big[(\forall X)\psi\big]$$
και
$$(\exists X)(\phi \vee \psi) \equiv \big[(\exists X)\phi\big] \vee \big[(\exists X)\psi\big]$$

Σχόλιο: Δεν ισχύει πάντα ότι $(\forall X)(\phi \vee \psi) \equiv \big[(\forall X)\phi\big] \vee \big[(\forall X)\psi\big]$ και δεν ισχύει πάντα ότι $(\exists X)(\phi \wedge \psi) \equiv \big[(\exists X)\phi\big] \wedge \big[(\exists X)\psi\big]$ (υπάρχουν πολλά αντιπαραδείγματα τέτοιων ϕ, ψ).

6. Νόμοι Μετακίνησης Ποσοδεικτών
Έστω οτι η X **δεν** εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο ϕ τότε:
$$\left.\begin{array}{l} \big[(\forall X)\psi\big] \vee \phi \equiv (\forall X)[\psi \vee \phi]\Big(\equiv \big[(\forall X)\psi\big] \vee \big[(\forall X)\phi\big]\Big) \\ \big[(\exists X)\psi\big] \wedge \phi \equiv (\exists X)[\psi \wedge \phi]\Big(\equiv \big[(\exists X)\psi\big] \wedge \big[(\exists X)\phi\big]\Big) \end{array}\right\}$$ και όμοια αν αντί $\vee$ βάλουμε $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

Σχόλια: Αν η X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο ϕ τότε ισχύει και $(\forall X)\phi \equiv (\exists X)\phi$ όσο περίεργο και να φαίνεται. Με άλλα λόγια η (ποσοδεικτημένη) εμφάνιση της X μπροστά από τον ϕ δεν παιζει κανένα ρόλο!

Έστω οτι η X εμφανίζεται ελεύθερα στον ϕ και ότι η μεταβλητή X_1 δεν εμφανίζεται ούτε στον ψ ούτε στον ϕ. Τότε μπορούμε να κάνουμε μετονομασία της X σε X_1 και να πάρουμε $(\forall X)\psi \vee \phi \equiv (\forall X_1)\psi^X_{X_1} \vee \phi \equiv (\forall X_1)(\psi^X_{X_1} \vee \phi)$.

Στα επόμενα, με $\phi^{X_1}_t$ παριστάνουμε τον τύπο που παίρνουμε όταν αντικαταστήσουμε συγχρόνως όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της X_1 στον ϕ(αν βέβαια υπάρχουν) με τον όρο t.

7. Νόμοι για τις ισοδυναμίες.

- $\phi_1 \equiv \phi_2$ ανν η $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ είναι πάντοτε λογικά αληθής (δηλ. έγκυρος τύπος)

- Έστω οτι ο τύπος ϕ περιέχει κάποια μεταβλητή X και επιθυμούμε για κάποιο λόγο(π.χ. για να βρούμε την Δ.Ε.Κ.Μ ενός τύπου που περιέχει τον ϕ) να μετονομάσουμε το $(\forall X)$ στα αριστερά του τύπου $(\forall X)\phi$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε μια μεταβλητή Z που δεν εμφανίζεται πουθενά στο ϕ, και θα έχουμε:

$$(\forall X)\phi \equiv (\forall Z)\phi^X_Z \text{ και όμοια αντί } \forall \text{ το } \exists$$

Γενικά όμως δεν είναι σωστό οτι $\exists X_1\phi \equiv \exists X_2\phi^{X_1}_{X_2}$ και $\forall X_1\phi \equiv \forall X_2\phi^{X_1}_{X_2}$. (Αντι)παράδειγμα: $\phi : X_2 \neq X_1$, οπότε προφανώς $(\exists X_1)\phi \not\equiv (\exists X_2)\phi^{X_1}_{X_2}$.

- **Θεώρημα Αλφαβητικών Παραλλαγών** (το οποίο βασικά είναι πόρισμα του προηγούμενου.) Έστω οτι ο τύπος ϕ περιέχει κάποιες μεταβλητές που εμφανίζονται και ελεύθερες και δεσμευμένες μέσα του. Τότε, υπάρχει ένας τύπος ϕ^* και $\phi \equiv \phi^*$, στον οποίο καμμία μεταβλητή του δεν εμφανίζεται συγχρόνως ελεύθερη και δεσμευμένη.

8. Νόμοι Αντικατάστασης Μεταβλητών με άλλες μεταβλητές ή άλλους όρους.

- $\models (X = Y) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi^*)$ όπου με ϕ παριστάνουμε ένα οποιοδήποτε *ατομικό τύπο*[1] και με ϕ^* τον τύπο που προκύπτει από τον ϕ αν αντικαταστήσουμε μερικές μόνο (δεν είναι ανάγκη όλες) από τις εμφανίσεις της X με Y.

[1] Αυτός που αποτελείται από ένα μόνο κατηγόρημα.

- Αν στην δομή $\mathscr{A}$ και για την αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ αληθεύει οτι: $\mathscr{A} \models \phi\big[v(X_2/\alpha)\big]$ όπου α ένα στοιχείο του σύμπαντος $|\mathscr{A}|$ και X_2 μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται πουθενά στον τύπο ϕ τότε αληθεύει οτι $\mathscr{A} \models \phi^{X_1}_{X_2}\big[v(X_2/\alpha)\big]$ και αντίστροφα.
- Ισχύει ότι $(\forall X)\phi \models \phi^X_t$ όπου t είναι ένας οποιοσδήποτε όρος, τέτοιος που ο t **να μπορεί να αντικαταστήσει την X στον τύπο ϕ** (δηλ. αν η Y είναι μια οποιαδήποτε μεταβλητή του t, τότε δεν υπάρχει υποτύπος ϕ_1 του ϕ που ξεκινά με $(\forall Y)\ldots$ ή $(\exists X)\ldots$ και στον οποίο εμφανίζεται η X ελεύθερη.)

Σχόλιο. Θα πρέπει ο t να μπορεί να αντικαταστήσει την X στον τύπο ϕ διότι αλλιώς μπορεί να έχουμε πρόβλημα. Παράδειγμα: ας πάρουμε $\phi = (\exists Y)(Y \neq X)$ οπότε $(\forall X)\phi = (\forall X)(\exists Y)(Y \neq X)$. Αν αντικαταστήσουμε το X με $t = Y$ θα πάρουμε $(\exists Y)(Y \neq Y)$!!!

Ορισμός (της ελεύθερης και δεσμευμένης μεταβλητής).

- Η X εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο ϕ ανν
  ο ϕ είναι ατομικός και η X εμφανίζεται κάπου στον ϕ ή
  αν ο ϕ της μορφής $\neg\psi$ και η X εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ ή
  ο ϕ είναι της μορφής $\tau \vee \psi$ και η X εμφανίζεται ελεύθερη στους τύπους ψ και τ ή
  αν ο ϕ είναι όπως προηγουμένως αλλά αντι $\vee$ υπάρχει ένας άλλος σύνδεσμος και η η X εμφανίζεται ελεύθερη στους τύπους ψ και τ ή
  αν ο ϕ ξεκινάει με ποσοδείκτη δηλ. είναι της μορφής $(\forall Y)\psi$ ή $(\exists Y)\psi$ και η Y δεν είναι η X και η X εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.
- Η X είναι δεσμεύμενη στον ϕ ανν η X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ.

Σχόλιο. Αν η X δεν είναι εμφανίζεται καθόλου στον ϕ τότε απο τον παραπάνω ορισμό η X είναι δεσμευμένη σ΄ αυτόν.

Ορισμοί. Με $\mathscr{O}(\mathscr{L})$ συμβολίζουμε το σύνολο των όρων της γλώσσας $\mathscr{L}$. Τότε αν έχουμε μια δομή $\mathscr{A}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$, τότε μέσω της v μπορούμε να δώσουμε τιμές όχι μόνο σε μεταβλητές αλλα και σε κάθε όρο $t \in \mathscr{O}(\mathscr{L})$. Η τιμή αυτή συμβολίζεται με $v(t)$ αν και ίσως θα έπρεπε να γράφουμε $v_{\mathscr{A}}(t)$ για να τονίσουμε το γεγονός ότι η $v(t)$ ανήκει στο σύμπαν $|\mathscr{A}|$ της δομής.

(Ορισμός αληθείας του Tarski) Αν έχουμε μια δομή $\mathscr{A}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ τότε μπορούμε να δώσουμε μια αληθοτιμή(αλήθεια ή ψέματα) σε κάθε τύπο της γλώσσας μας. Τον ορισμό τον έχουμε δει αναλυτικά στο μάθημα αλλά εδώ θα αναφέρουμε μόνο δύο περιπτώσεις. Ο τύπος $\forall X\psi$ είναι αληθινός για την v στην $\mathscr{A}$ και γράφουμε $\mathscr{A}, v \models \forall X\psi$ ανν (για κάθε $a \in |\mathscr{A}|)\mathscr{A}, v(X/a) \models \psi$. Όμοια $\mathscr{A}, v \models \exists X\psi$ ανν (υπάρχει ένα τουλάχιστον $a_0 \in |\mathscr{A}|)\mathscr{A}, v(X/a_0) \models \psi$. Η $v(X/a)$ είναι ακριβώς η ίδια η v με μόνη διαφορά ότι στην X δίνει τιμή a.

Πρόταση(για δεσμευμένες μεταβλητές και ερμηνείες). Η αλήθεια ενός τύπου ϕ δεν εξαρτάται απ΄ τις τιμές που δίνει η αποτίμηση v στις δεσμευμένες μεταβλητές του τύπου ϕ ή με άλλα λόγια για κάθε δομή $\mathscr{A}$ και τυχούσες αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathscr{A}$, αν οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον ϕ(δηλ. δίνουν την ίδια τιμή σε αυτές), τότε

$$\mathscr{A}, v_1 \models \phi \text{ ανν } \mathscr{A}, v_2 \models \phi.$$

Πόρισμα(η αλήθεια για προτάσεις). Αν έχουμε μια δομή $\mathscr{A}$ και μια πρόταση ϕ(δηλ. ένα τύπο χωρίς ελεύθερες μεταβλητές), τότε είτε θα αληθεύει για οποιαδήποτε αποτίμηση v είτε θα είναι ψευδής για όλες τις v. Στην πρωτη περίπτωση γράφουμε απλά $\mathscr{A} \models \phi$ και λέμε ότι ο ϕ αληθεύει στην δομή $\mathscr{A}$ και στην δεύτερη γράφουμε $\mathscr{A} \not\models \phi$ και λέμε ότι είναι ψευδής στην $\mathscr{A}$.

Ορισμοί. Έστω T ένα σύνολο τύπων σε μια γλώσσα $\mathscr{L}$ και $\mathscr{A}$ μια δομή στην $\mathscr{L}$.

- Θα λέμε ότι η αποτίμηση v ικανοποιεί το T ανν για κάθε $\phi \in T$ ισχύει $\mathscr{A}, v \models \phi$. Τότε γράφουμε απλά $\mathscr{A}, v \models T$.
- Ένα σύνολο τύπων T λέγεται ικανοποιήσιμο ανν υπάρχει $\mathscr{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ έτσι ώστε $\mathscr{A}, v \models T$.
- Το T συνεπάγεται λογικά δηλ. έχει **συνέπεια** τον τύπο ψ ανν για κάθε δομή $\mathscr{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ ισχύει

  $$\text{αν } \mathscr{A}, v \models T, \text{ τότε αναγκαστικά, } \mathscr{A}, v \models \psi.$$

  Τότε γράφουμε απλά $T \models \psi$.
- Αν $T = \emptyset$ και $T \models \psi$ τότε προφανώς είναι ένας **έγκυρος τύπος** δηλ. πάντα αληθινός ανεξάρτητα από τις υποθέσεις ή την δομή που δουλεύομαι. Θα γράφουμε απλά $\models \psi$. Οπότε $\models \psi$ ανν για κάθε $\mathscr{A}$ και v ισχύει $\mathscr{A}, v \models \psi$.
- Θα γράφουμε $\phi \models \psi$ αν $\{\phi\} \models \psi$ δηλ. αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\mathscr{A}, v \models \phi$ τότε αναγκαστικά $\mathscr{A}, v \models \psi$.
- Θα γράφουμε $\phi \equiv \psi$ και θα λέμε ότι είναι ισοδύναμοι τύποι ανν $\models \phi \leftrightarrow \psi$ ή ισοδύναμα αν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$ ή ισοδύναμα αν αληθεύουν ή διαψεύδονται από τις ίδιες δομές και για τις ίδιες ακριβώς αποτιμήσεις! Παραπάνω είδαμε αρκετές τέτοιες ισοδυναμίες.