ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις στο μάθημα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Διδάσκων: Χαράλαμπος Κορνάρος

Δημιουργία του ηλεκτρονικού αρχείου
Χρήστος Πηλιχός
Φοιτητής του Τμήματος Μαθηματικών του
Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΣΑΜΟΣ
2011

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι σημειώσεις που διαβάζεται είναι από οι προσωπικές σημειώσεις του φοιτητή του τμήματος μας Χρήστου Πηλιχού από το μάθημα Μαθηματική Λογική όπως αυτό διδάχθηκε από εμένα κατά το Εαρινό Εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2009-2010. Αξίζει ένα θερμό ευχαριστώ στον παραπάνω φοιτητή διότι αφιέρωσε εθελοντικά πολύ από τον χρόνο του για να μεταφέρει τις σημειώσεις του σε pdfLaTeX. Αν δεν ξέρετε τι ακριβώς είναι το pdfLaTeX ή γενικότερα το TeX να πούμε απλά ότι είναι μια πλούσια και δωρεάν γλώσσα προγραμματισμού με είσοδο κάποιο αυστηρό κώδικα και έξοδο ένα κείμενο όπως για παράδειγμα το pdf αρχείο που αυτή την στιγμή διαβάζετε. Κάθε τι που έχει σχέση με την μορφοποίηση ή τα σύμβολα(μαθηματικά) του κειμένου είναι μια εντολή του TeX. Έτσι για να δώσουμε ένα μικρό παράδειγμα από την γλώσσα TeX, επισυνάπτουμε το κομμάτι του κώδικα που κρύβεται πίσω από τον ορισμό της σελ. 9:

```
\begin{definition}
Μια εκτίμηση αλήθειας (ή αλλιώς ερμηνεία) $\mathscr{V}$ είναι μια συνάρτηση $\mathscr{V}: S\to \{ \alpha , \psi \}$, όπου $S=$ το σύνολο όλων των προτάσεων της Προτασιακής Λογικής.\\
Για την $\mathscr{V}$ ισχύουν οι παρακάτω  \textit{κανόνες}:
\begin{enumerate}
\item Αν $\sigma$ είναι άτομο, τότε $\mathscr{V}(\sigma) \in \{ \alpha ,\psi \}$ \label{sxolio1-1@22/2}
⋮
```

Από το παραπάνω δείγμα πιστεύω να γίνεται φανερό το μέγεθος του κώδικα που απαιτείται για να πάρουμε έστω και 3 γραμμές του τελικού κειμένου. Όμως φανταστείτε τι θα γινόταν αν εκτός από τον Χρήστο μαζευόταν δυο, τρεις, ή και παραπάνω και πρόσφεραν τον χρόνο τους για το καλό όλων! Και όλα αυτά χωρίς να έχει ξοδέψει κανένας ούτε ένα λεπτό(του ευρώ) για να τις αγοράσει. Και όχι μόνο...Θα είχαμε ένα αυτοδύναμο τμήμα που οι φοιτητές θα είχαν πλήρες ηλεκτρονικό υλικό από τα μαθήματα και η παρακολούθηση θα ήταν τελειότερη διότι κανένας δεν θα είχε το άγχος να προλάβει να αντιγράψει τον πίνακα και άρα θα έμενε χρόνος για ερωτήσεις, για σχολιασμό και για εμπέδωση. Ως Μαθηματικοί έχουμε ευτυχώς αυτήν την άνεση να μην χρειαζόμαστε τίποτα περισσότερο από ένα μολύβι, ένα βιβλίο, ένα πίνακα ή ένα υπολογιστή για να κάνουμε τέχνη. Διότι τα μαθηματικά είναι τέχνη όπως η ζωγραφική και όχι μια απλή τεχνική. Και η τέχνη θέλει εμπέδωση. Ακόμα και αν απαιτείται ένας ανιαρός προγραμματισμός (π.χ. όπως για τη συγγραφή ενός βιβλίου σε $\TeX$) χρειάζεται εκτός από την στείρα γνώση και την κουραστική δακτυλογράφηση επιπλέον εμπειρία, ευαισθησία και καλλιτεχνία για να έχουμε ένα καλαίσθητο, αξιόλογο και σε βάθος χρόνου αποτέλεσμα. Πιστεύω ότι πράγματι τούτο το ξεκίνημα θα έχει συνέπειες σε βάθος χρόνου και τα κέρδη θα τα απολαύσουμε όλοι μας. Σήμερα το βιβλίο είναι 90 σελίδες, αύριο θα είναι 150, και κάθε χρόνο θα προστίθεται νέο υλικό ώστε σύντομα να έχουμε ένα πολύ σύγχρονο βιβλίο για την Μαθηματική Λογική. Κατά βάθος θα ευχόμουν να προσελκύσει νέους μαθηματικούς για να ασχοληθούν με τούτον τον πατροπαράδοτο κλάδο των μαθηματικών που οι αρχαίοι πρόγονοί μας τον είχαν στην πρώτη σειρά των ενδιαφερόντων τους και της εκτίμησης τους.

Δυστυχώς σήμερα είμαστε ανάξιοι των προγόνων μας. Μας έφαγαν κυρίως τα επαγγέλματα της οικοδομής και των δημόσιων έργων (χτίστες, αλουμινάδες, πλακατζίδες, ξυλουργοί κ.ο.κ) που έφεραν την μαζικοποίηση στην παραγωγή, τον εύκολο πλουτισμό, την «λογική» του χρήματος και κατά συνέπεια την απαξίωση όλων των κατά παράδοση τεχνών και όλων των υπόλοιπων πνευματικών επαγγελμάτων- λειτουργημάτων. Και φυσικά η τωρινή οικονομική κρίση χειροτέρεψε ακόμη περισσότερο τα πράγματα. Όμως αλίμονο αν αυτή μας κάνει (ακόμα πιο) αργολόγους και τεμπέληδες. Στα χέρια μας είναι να αλλάξουμε τις καταστάσεις έστω και τώρα που πιάσαμε «πάτο». Και φυσικά ο καλύτερος τρόπος είναι ο εθελοντισμός μας ή να το πω με απλά λόγια προσφέρω στο κοινωνικό μου περίγυρο τις γνώσεις μου, τα χέρια μου, το μυαλό μου, το χρόνο μου δωρεάν. Αυτό είναι χίλιες φορές καλύτερο από το να κάθομαι στην καφετέρια και να μην κάνω τίποτα πέρα από το να χάνω άλλη μια μέρα. Διότι σίγουρα με τον εθελοντισμό θα ανεβεί η ποιότητα της κοινωνίας. Ακόμα θα έχω σπουδαία προσωπικά οφέλη, διότι θα ψάξω, θα ρωτήσω, θα τελειοποιηθώ, θα μάθω, θα με μάθουν, θα με αγαπήσουν και πιθανότατα θα βρω και μια αξιοπρεπή δουλειά.

Όσο αφορά τη διδασκαλία του μαθήματος(και άρα και το στυλ των σημειώσεων) απέφυγα την απόδειξη των Θεωρημάτων και πρόσθεσα όσο το δυνατό περισσότερα παραδείγματα για να γίνει πιο ελκυστικό. Σε μελλοντική έκδοση των σημειώσεων θα μπουν αρκετά ιστορικά στοιχεία και αποδείξεις θεωρημάτων και αρκετές ασκήσεις όπως και πλούσια βιβλιογραφία. Θα προστεθούν εφαρμογές στην Prolog, στην θεωρία Συνόλων και στη Peano αριθμητική. Θα μπει ένα κεφάλαιο σχετικά με τον «πονοκέφαλο» των Μαθηματικών(τα γνωστά μας παράδοξα). Ο βασικός μου σκοπός όπως διαφαίνεται σε αυτές τις πρώτες σημειώσεις ήταν και είναι να γίνει κατανοητή η έννοια της αλήθειας(κατάφαση) και η έννοια του ψέματος(άρνηση). Δυστυχώς, έχω παρατηρήσει ότι ακόμα και τελειόφοιτοι φοιτητές δυσκολεύονται να κατασκευάσουν την άρνηση μιας δοσμένης πρότασης[1] και έχουν φυλακιστεί σε «παγιωμένες» γνώσεις που δεσμεύουν ασφυκτικά την φαντασία τους. Ένας άλλος σκοπός του μαθήματος είναι να οριστεί η έννοια της συνέπειας όσο το δυνατόν καλύτερα ή με άλλα λόγια πότε μια πρόταση είναι πράγματι συμπέρασμα κάποιου συνόλου υποθέσεων και πότε όχι. Και τέλος να μπορέσουμε να διακρίνουμε την έννοια ενός μοντέλου από την έννοια του σύμπαντος(δηλ. του «πεδίου ορισμού») του μοντέλου. Για παράδειγμα είναι σχεδόν αδύνατον να πείσω ένα ακροατήριο χωρίς εξοικείωση στην Λογική ότι η έννοια του συνόλου των φυσικών αριθμών $\{1, 2, 3, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητη από τον χωρισμό τους σε άρτιους και περιττούς.(Το τελευταίο έχει να κάνει με το πως ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης στους φυσικούς και όχι με τους ίδιους τους φυσικούς αριθμούς δηλ. άλλο πράγμα το πεδίο ορισμού της πράξης της πρόσθεσης και άλλο ο καθ' αυτός ορισμός και οι ιδιότητες της πρόσθεσης !)

Θα ήμουν βαθύτατα υποχρεωμένος σε όσους/ όσες[2] διαβάσουν προσεκτικά τις σημειώσεις και μου στείλουν τα λάθη, τα σχόλια και τις υποδείξεις τους. Θα είναι επίσης πολύ ευπρόσδεκτη η οποιαδήποτε εθελοντική προσφορά από τους αναγνώστες/στριες που θα ήθελαν να συνεχιστεί και να τελειοποιηθεί το έργο που ξεκίνησε ο κ. Πηλιχός.

Έγραφα 18 Ιουνίου 2011.

---

[1] Για παράδειγμα να γραφτεί η πρόταση ότι το Y δεν είναι το όριο της f καθώς το X τείνει σε κάποιο σταθερό αριθμό.

[2] Ήδη η κυρία Λουκάτου Ελένη, φοιτήτρια στο τμήματος μας, μας έστειλε τις πρώτες διορθώσεις! Την ευχαριστούμε πολύ!

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

0.1 Τα δυο μέρη της Λογικής

1. Λογική των Προτάσεων ή Προτασιακή Λογική. Στην Προτασιακή Λογική χωρίζουμε τις προτάσεις σε

   (α΄) Ατομικές προτάσεις

   (β΄) Σύνθετες προτάσεις

2. Λογική των Κατηγορημάτων (Κατηγορηματική Λογική ή Α΄ -βάθμια Λογική). Στην Κατηγορηματική Λογική εκτός από προτάσεις υπάρχουν και άλλες εκφράσεις που λέγονται τύποι. Οι τύποι είναι μια γενικότερη περίπτωση προτάσεων ή με άλλα λόγια κάποιες ειδικές περιπτώσεις τύπων θεωρούνται προτάσεις ενώ κάποιοι άλλοι τύποι δεν είναι προτάσεις. Κάποιοι τύποι όπως θα δούμε λέγονται ατομικοί διότι δεν περιέχουν άλλους (υπο)τύπους.

   Μια εφαρμογή στην Τεχνητή Νοημοσύνη της παραπάνω Λογικής είναι και ο Λογικός Προγραμματισμός με την γλώσσα Prolog (PROgramming in LOGic)

Μέρος I

Λογική των Προτάσεων (ή Προτασιακή Λογική)

1.1 Προτάσεις: Ατομικές και σύνθετες

Παράδειγμα 1.1.1. *Εάν* $\underbrace{\text{ο αριθμός } a \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 10}_{A' \text{ πρόταση}}$*,*
$\underbrace{\text{τότε ο αριθμός } a \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 5}_{B' \text{ πρόταση}}$.

Εάν A τότε B

Με κεφαλαία γράμματα όπως τα A,B συμβολίζουμε τις ατομικές προτάσεις

Από τις σύνθετες προτάσεις παίρνουμε τις ατομικές προτάσεις αναλύοντας τις σύνθετες σε μικρότερα μέρη ώσπου να καταλήξουμε στις ατομικές που είναι οι απλούστερες προτάσεις και δεν μπορεί να περιέχουν άλλες υποπροτάσεις.

1.2 Σύνδεσμοι

1. $\wedge$ σύζευξη και

2. $\vee$ διάζευξη, η (χωρίς τόνο)

   Παράδειγμα 1.2.1. *(αποκλειστική διάζευξη) Κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή περιττός. Αναλύεται σε:*
   $\underbrace{\text{Κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος}}_{A}$ *ή* $\underbrace{\text{κάθε φυσικός αριθμός είναι περιττός}}_{B}$.
   A ή B (αποκλειστικό ή)

   Η διάζευξη είναι το η όπου μπορεί να ισχύουν και τα δύο ενδεχόμενα, ενώ στην αποκλειστική ή το ένα ή το άλλο.

3. Εάν $\underbrace{a \leq 10}_{E}$ και $\underbrace{a \in \mathbb{N}}_{Z}$, τότε $\underbrace{a = 1}_{H}$ η $\underbrace{2/a}_{\Theta}$ η $\underbrace{3/a}_{I}$ η $\underbrace{5/a}_{K}$ η $\underbrace{7/a}_{\Lambda}$. Δηλαδή
   Εάν $(E \wedge Z)$, **τότε** $(\underbrace{H \vee \Theta \vee I \vee K \vee M}_{\eta})$

4. $\rightarrow$ συνεπαγωγή (εάν. . . , τότε . . .)
   $(E \wedge Z) \rightarrow (H \vee \Theta \vee I \vee K \vee M)$

Σχόλιο. Όταν γράφουμε A είτε B $(A \vee B)$ εννοούμε ότι ισχύει **τουλάχιστον** ένα από τα δύο (και **όχι** το ένα ή το άλλο). Με $A \wedge B$ εννοούμε ότι ισχύουν και τα δύο.

Παράδειγμα 1.2.2. *Έχουμε το σύστημα εξισώσεων:*
$\underbrace{2x + y = 0}_{W}$
$\underbrace{x - 3y = 4}_{Y}$
γράφεται με $W \wedge Y$ *διότι θέλουμε να ισχύουν συγχρόνως και οι δύο εξισώσεις.*

5. $\neg$ άρνηση (**ΔΕΝ**)

6. $\leftrightarrow$ διπλή συνεπαγωγή (εάν και μόνο εάν)

1.3 Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής

Η Τυπική γλώσσα της Προτασιακής Λογικής(Λογικής των Προτάσεων) αποτελείται από το

1. Αλφάβητο

   (α΄) Κεφαλαία γράμματα: Α - Ω. Με αυτά φτιάχνουμε τις ατομικές προτάσεις, για παράδειγμα
   $\underbrace{A_1, \ldots, A_n}$
   Ατομικές προτάσεις

   (β΄) ( ) δηλαδή αριστερή, δεξιά παρένθεση και τέλος

   (γ΄) συνδέσμους

2. Συντακτικό

   (α΄) Επαγωγικός ορισμός μιας πρότασης

   i. Κάθε ατομική πρόταση είναι πρόταση.
   ii. Εάν η σ είναι πρόταση, τότε και η $(\neg\sigma)$ είναι πρόταση.
   iii. Εάν σ και τ είναι δύο προτάσεις, τότε προτάσεις είναι και οι παρακάτω:

   Α΄. $\sigma \wedge \tau$

Β'. $\sigma \vee \tau$

Γ'. $\sigma \to \tau$

Δ'. $\sigma \leftrightarrow \tau$

iv. Κάθε χρησιμοποιώντας του κανόνες 1 έως 3 πεπερασμένο το πλήθος φορές.

Παράδειγμα 1.3.1 (προς αποφυγή)**.** $(\neg A \to \wedge(B \vee \Gamma))$
$\wedge$ *μέγα λάθος μπροστά από υποπρόταση άρα: δεν έχω πρόταση.*
Εάν αφήσω $((\neg A) \wedge (B \vee \Gamma))$ *τότε διορθώνεται...*

1.4 Σημαντική της Προτασιακής Λογικής

Δηλαδή, πως δίνουμε αλήθεια ή ψέματα στις προτάσεις της γλώσσας μας. Για να απαντήσουμε θα πρέπει να βρούμε πρώτα τις υποπροτάσεις που αποτελούν την πρόταση.

Παράδειγμα 1.4.1. $(\underbrace{A \vee (B \vee \Gamma)}_{\sigma_1}) \leftrightarrow (\underbrace{(A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)}_{\sigma_2})$

Απάντηση. $\sigma_1 = A \vee \underbrace{(B \vee \Gamma)}_{\sigma_3 = B \vee \Gamma} \quad \sigma_2 = \underbrace{(A \vee B)}_{\sigma_4 = A \vee B} \wedge \underbrace{(A \vee \Gamma)}_{\sigma_5 = A \vee \Gamma}$

Σχόλιο. Θα μάθουμε αργότερα ότι η αλήθεια ή το ψέμα μιας πρότασης εξαρτάται αποκλειστικά από την αλήθεια ή το ψέμα των ατομικών προτάσεων που κρύβονται μέσα στην πρόταση, όπως επίσης και το δένδρο της κατασκευής την πρότασης από τις υποπροτάσεις της.

Παράδειγμα 1.4.2. *Ας αναλύσουμε τις παρακάτω προτάσεις στα άτομα που τις αποτελούν.*

1. *Αν* $\underbrace{\text{πάμε σινεμά}}_{A}$ *τότε* $\underbrace{\text{χρειαζόμαστε χρήματα}}_{B}$ *για το εισιτήριο.*

2. *Αν δεν πάμε σινεμά, τότε δεν χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο.*

3. *Αν πάμε σινεμά, τότε δεν χρειαζόμαστε χρήματα για εισιτήριο.*

4. *Αν δεν χρειαζόμαστε χρήματα, τότε δεν πάμε σινεμά.*

Ανακαλύπτουμε στις παραπάνω προτάσεις μόνο δυο ατομικούς τύπους:

A : Εμείς θα πάμε σινεμά.
B : Εμείς χρειαζόμαστε χρήματα για εισιτήριο. Οπότε μπορούμε να τις ξαναγράψουμε ως εξής:

1. $A \to B$
2. $A \to (\neg B)$
3. $(\neg A) \to B$
4. $(\neg A) \to (\neg B)$

Η άρνηση όμως της πρότασης είναι:
Πάμε σινεμά και δεν χρειαζόμαστε χρήματα. δηλαδή

$$A \wedge (\neg B)$$

1.5 Οι ερμηνείες στην Προτασιακή Λογική

Τιμή αλήθειας σε προτασιακό τύπο.

Ορισμός 1.5.1 (Απονομή αλήθειας)**.** *Έστω Q το σύνολο όλων των ατομικών προτάσεων. Τότε μια απονομή αλήθειας είναι μια συνάρτηση από το Q στο σύνολο $\{\alpha, \psi\}$ (δηλαδή στο αλήθεια, ψέματα):*

$$F : Q \to \{\alpha, \psi\}$$

Χρησιμοποιώντας μια απονομή και τις κατάλληλες πράξεις που θα οριστούν αμέσως παρακάτω μπορούμε να δώσουμε μια αληθοτιμή(αλήθεια ή ψέματα) και σε οποιαδήποτε άλλη πρόταση.

	$\sim$
α	ψ
ψ	α

		$\sqcup$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

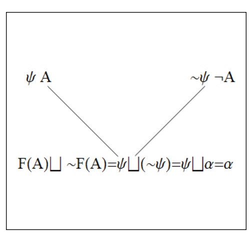
		$\sqcap$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

		-]
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

		[-]
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Η διαδικασία είναι η εξής: Δίνουμε πρώτα μια αληθοτιμή (α ή ψ) στις υποπροτάσεις της πρότασης σ με βάση τους παραπάνω πίνακες και την F και τελικά στην ίδια την σ. Η $\sim$ αντιστοιχεί στην άρνηση $\neg$, η $\sqcup$ στην διάζευξη $\vee$, η $\sqcap$ στην σύζευξη $\wedge$, η -] στην $\to$ και η [-] στην $\leftrightarrow$.

Παράδειγμα 1.5.1. *Έστω η πρόταση $\sigma = (A \vee (\neg A))$και έστω κάποια απονομή F με $F(A) = \psi$. Τότε όπως βλέπουμε και από το παρακάτω σχήμα η σ θα πάρει αληθοτιμή α(αλήθεια).*



Ορισμός 1.5.2. *Μια εκτίμηση αλήθειας (ή αλλιώς ερμηνεία) $\mathscr{V}$ είναι μια συνάρτηση $\mathscr{V} : S \to \{\alpha, \psi\}$, όπου S = το σύνολο όλων των προτάσεων της Προτασιακής Λογικής.*
Για την $\mathscr{V}$ ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

1. *Αν σ είναι άτομο, τότε* $\mathscr{V}(\sigma) \in \{\alpha, \psi\}$

2. $\sigma = \neg\tau$ *τότε* $\mathscr{V}(\sigma) = \sim \mathscr{V}(\tau)$

3. $\sigma = \tau_1 \wedge \tau_2$ *τότε* $\mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(\tau_1) \sqcap \mathscr{V}(\tau_2)$

4. $\sigma = \tau_1 \vee \tau_2$ *τότε* $\mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(\tau_1) \sqcup \mathscr{V}(\tau_2)$

5. $\sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2$ *τότε* $\mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(\tau_1) -] \mathscr{V}(\tau_2)$

6. $\sigma = \tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ *τότε* $\mathscr{V}(\sigma) = V(\tau_1)[-]\mathscr{V}(\tau_2)$

Σχόλιο.

- Κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ ορίζει ουσιαστικά και μία απονομή αλήθειας (βλ. 1.)
- Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Κάθε απονομή αλήθειας F μπορεί να επεκταθεί με ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΤΡΟΠΟ σε μια ερμηνεία $\mathscr{V}$, ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες 2-6

Παράδειγμα 1.5.2. $F(A) = \alpha,\ \ F(B) = \psi$. *Να κατασκευάσετε μία ερμηνεία $\mathscr{V}$ που επεκτείνει την F και εν συνεχεία να βρείτε* $\mathscr{V}(A \wedge B),\ \ \mathscr{V}(A \rightarrow B),\ \ \mathscr{V}(A \rightarrow \Gamma),\ \ \mathscr{V}(A \leftrightarrow B)$.

Λύση. Έστω $\mathscr{V}$ μια οποιαδήποτε ερμηνεία που ικανοποιεί τους κανόνες 2-6 και επιπλέον $\mathscr{V}(\sigma) = F(\sigma)$ για σ ατομική πρόταση. Οπότε, $\mathscr{V}(A \wedge B) = \mathscr{V}(A) \sqcap \mathscr{V}(B) = F(A) \sqcap F(B) = \alpha \sqcap \psi = \psi$. Ακόμα, $\mathscr{V}(A \rightarrow B) = \mathscr{V}(A) -] \mathscr{V}(B) = F(A) -] F(B) = \alpha -] \psi = \psi$. $\mathscr{V}(A \rightarrow \Gamma) = \mathscr{V}(A) -] \mathscr{V}(\Gamma) = F(A) -] F(\Gamma) = \alpha -] F(\Gamma) = \begin{cases} \text{εάν } F(\Gamma) = \psi \text{ τότε} & \psi \\ \text{εάν } F(\Gamma) = \alpha \text{ τότε} & \alpha \end{cases}$

1.6 Πίνακες αληθείας

Παράδειγμα 1.6.1. *Έστω σ μια οποιαδήποτε πρόταση και* $\tau = (\sigma \vee (\neg\sigma))$. *Τότε η τ είναι πάντα αλήθεια, δηλαδή με άλλα λόγια για οποιαδήποτε ερμηνεία $\mathscr{V}$ ισχύει* $\mathscr{V}(\tau) = \alpha$.

Λύση. Έστω τυχαία $\mathscr{V} : S \rightarrow \{\alpha, \psi\}$

	σ	$\neg\sigma$
$\mathscr{V}$	α	ψ
$\mathscr{V}$	ψ	α

1η κατηγορία: $\mathscr{V}(\sigma) = \alpha$
2η κατηγορία: $\mathscr{V}(\sigma) = \psi$

	σ	$\neg\sigma$	$\tau = \sigma \vee \neg\sigma$
$\mathscr{V}$	α	$\mathscr{V}(\neg\sigma) = \sim \mathscr{V}(\sigma) = \psi$	$\mathscr{V}(\tau) = \mathscr{V}(\sigma) \sqcup \mathscr{V}(\neg\sigma) = \alpha \sqcup \psi = \alpha$
$\mathscr{V}$	ψ	$\mathscr{V}(\neg\sigma) = \sim \mathscr{V}(\sigma) = \alpha$	$\mathscr{V}(\tau) = \mathscr{V}(\sigma) \sqcup \mathscr{V}(\neg\sigma) = \psi \sqcup \alpha = \alpha$

Ορισμός 1.6.1. *Μια πρόταση σ της Λογικής των Προτάσεων θα λέγεται πάντοτε αληθινή (ή ταυτολογία ή ταυτότητα ή νόμος) εάν για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ έχουμε $\mathscr{V}(\sigma) = \alpha$.*

		-]
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Παράδειγμα νόμου είναι και η παρακάτω σχέση από την Συνολοθεωρία: "$\emptyset \subseteq A$" : Εάν $\underbrace{x \in \emptyset}_{\Gamma}$ τότε $\underbrace{x \in A}_{B}$ που γράφεται απλά $\Gamma \to B$.

Η Γ είναι ως γνωστόν ψευδής. Οπότε, για κάθε $\mathscr{V}$ ισχύει $\mathscr{V}(\Gamma) = \psi$ οπότε $\mathscr{V}((\Gamma \to B)) = \mathscr{V}(\Gamma) -] \mathscr{V}(B) = \psi -] \mathscr{V}(\Gamma) = \alpha$

Παράδειγμα 1.6.2. *Έστω A,B σύνολα. Τότε,*

- $A \subseteq B$ *τότε* $B^c \subseteq A^c$*: Αν (Αν* $\underbrace{x \in A}_{\Gamma}$ *τότε* $\underbrace{x \in B}_{\Delta}$*) τότε (Αν* $\underbrace{x \notin B}_{\neg\Delta}$ *τότε* $\underbrace{x \notin A}_{\neg\Gamma}$*)*

  $(\Gamma \to \Delta) \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma)$, $\overset{\vartheta.\delta.o.}{\longrightarrow}$ $\mathscr{V}((\Gamma \to \Delta) \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma))$ *είναι νόμος.*

Γ	Δ	$\neg\Gamma$	$\neg\Delta$	$\Gamma \to \Delta$	$\neg\Delta \to \neg\Gamma$	$(\Gamma \to \Delta) \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma)$
α	α	ψ	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α

  Οπότε σε κάθε περίπτωση $\mathscr{V}((\Gamma \to \Delta) \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma)) = \alpha$

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c : (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ *ΚΑΙ* $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$
  (Αν $(x \notin A \; \eta \; B)$ *τότε (*$x \notin A$ *και* $x \notin B$*)) ΚΑΙ (Αν* $(x \notin A$ *και* $x \notin B)$ *τότε* $x \notin (A \cup B)$*)*
  $E : x \in A, \; \neg E : x \notin A$
  $Z : x \in B, \; \neg Z : x \notin B$
  $(\neg(E \vee Z) \to (\neg E \wedge \neg Z)) \wedge ((\neg E \wedge \neg Z) \to \neg(E \vee Z))$

Για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V} \overset{\vartheta.\delta.o.}{\longrightarrow} \quad \mathscr{V}(\neg(E \vee Z) \to (\neg E \wedge \neg Z)) = \alpha$

E	Z	$\neg E$	$\neg Z$	$E \vee Z$	$\neg(E \vee Z)$	$\neg E \wedge \neg Z$	$\neg(E \vee Z) \to (\neg E \wedge \neg Z)$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

Άσκηση 1.6.1. *Δίνεται η πρόταση* $[(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta$. *Βρείτε μία ερμηνεία* $\mathscr{V}_1$ *έτσι ώστε* $\mathscr{V}_1(\sigma) = \alpha$ *και μία άλλη ερμηνεία* $\mathscr{V}_2$ *έτσι ώστε* $\mathscr{V}_2(\sigma) = \psi$.

Λύση. $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \Rightarrow \mathscr{V}_2(\sigma) = \mathscr{V}_2(\sigma_1) \sqcup \mathscr{V}_2(\sigma_2) = \psi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{V}_2(\sigma_1) = \psi \\ \mathscr{V}_2(\sigma_2) = \psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{V}_2(\neg A \wedge B) = \alpha \\ \mathscr{V}_2(\Gamma) = \psi \\ \mathscr{V}_2(\Delta) = \psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{V}_2(\neg A) = \alpha \\ \mathscr{V}_2(B) = \alpha \\ \mathscr{V}_2(\Gamma) = \psi \\ \mathscr{V}_2(\Delta) = \psi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{V}(A) = \psi \\ \mathscr{V}(B) = \alpha \\ \mathscr{V}(\Gamma) = \psi \\ \mathscr{V}(\Delta) = \psi \end{array} \right\|$$

Η μοναδική ερμηνεία που διαψεύδει την πρόταση είναι $\mathscr{V}_2(A) = \mathscr{V}_2(\Gamma) = \mathscr{V}_2(\Delta) = \psi$ και $\mathscr{V}(B) = \alpha$

Για σπίτι: Δειξτε ότι ο $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ είναι νόμος.

1.7 Μαθηματική επαγωγή

Μαθηματική Επαγωγή: Πώς αποδεικνύουμε ότι ισχύει η ιδιότητα P;
($\forall$ πρόταση σ ισχύει $P(\sigma)$)
Βήμα 1ο: $\forall$ άτομο A ισχύει $P(A)$
Επαγωγικό Βήμα: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $P(\sigma_1)$ και $P(\sigma_2)$ και αποδεικνύουμε τις
$P(\neg\sigma_1)$,
$P((\sigma_1 \wedge \sigma_2))$,
$P((\sigma_1 \vee \sigma_2))$,
$P((\sigma_1 \to \sigma_2))$,
$P((\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2))$.

Παράδειγμα 1.7.1. *Ας δείξουμε ότι* ($\forall$ *πρόταση* σ)$P(\sigma)$ *όπου* $P(\sigma)$: *«το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων είναι ίσο με το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων ».*

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με $\#($ το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων μέσα σε μια πρόταση και με $\#)$ των δεξιών.
Μαθηματική Επαγωγή (στις προτάσεις):
Βήμα 1ο: ($\forall$ άτομο $A)P(A)$.
Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι
$P(\sigma_1) : {''}\#(\;=\; \#) \text{ της } \sigma_1{''}$
$P(\sigma_2) : {''}\#(\;=\; \#) \text{ της } \sigma_2{''}$
Οπότε,

$$\begin{array}{lccc} P(\neg\sigma_1): & {''}\#(\text{ της } \neg\sigma_1 & = & \#) \text{ της } \neg\sigma_1{''} \\ & \| & & \| \\ & 1+\#(\text{ της } \sigma_1 & & 1+\#) \text{ της } \sigma_1 \end{array}$$

άρα ισχύει η $P(\neg\sigma_1)$.

Άσκηση 1.7.1. *Να δείξετε όμοια ότι* $P(\sigma_1\wedge\sigma_2), P(\sigma_1\vee\sigma_2), P(\sigma_1 \to \sigma_2), P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$

Λύση: Για σπίτι . . .

Θεώρημα 1.7.2. 1. *Για κάθε απονομή αλήθειας F υπάρχει μία και μοναδική ερμηνεία $\mathscr{V}$ που την επεκτείνει.*

2. *Έστω $\mathscr{V}$ μια ερμηνεία. Τότε, η αληθοτιμή (α ή ψ) που θα πάρει η σ από την $\mathscr{V}$, εξαρτάται μόνο από τις αληθοτιμές που παίρνουν τα άτομα που βρίσκονται μέσα στην σ. ή με άλλα λόγια για κάθε πρόταση σ ισχύει η παρακάτω ιδιότητα (που την συμβολίζουμε με $P(\sigma)$):*
Εαν υποθέσουμε η σ περιέχει μόνο κάποια απ' τα (προεπιλεγμένα) άτομα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ και εαν F_1, F_2 δύο οποιεσδήποτε απονομές αλήθειας με την ιδιότητα

$$\left.\begin{array}{c} F_1(A_1) = F_2(A_2) \\ F_1(A_2) = F_2(A_2) \\ \cdots \\ F_1(A_k) = F_2(A_k) \end{array}\right\} \text{ και η } \mathscr{V}_1 \text{ επεκτείνει την } F_1 \text{ και η } \mathscr{V}_2 \text{ επεκτείνει την}$$

F_2, τότε αναγκαστικά ισχύει

$$\mathscr{V}_1(\sigma) = \mathscr{V}_2(\sigma).$$

Απόδειξη.
1. Δεχόμαστε ότι πράγματι υπάρχει μία ερμηνεία $\mathscr{V}$ που επεκτείνει την

δοθείσα $\mathscr{F}$. Θα δείξουμε ότι μία τέτοια $\mathscr{V}$ είναι μοναδική. Θα χρειαστεί το (2) κομμάτι του Θεωρήματος. Έστω, με την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, ότι $\mathscr{V}_1 \neq \mathscr{V}_2$ και $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ επεκτείνουν την $\mathscr{F}_1$ και $\mathscr{F}_2$ αντίστοιχα.

Θέτουμε $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}, \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}$ Όμως τότε για οποιαδήποτε $\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ ισχύει από (2) ότι
$$\left.\begin{array}{c} \mathscr{F}_1(A_1) = \mathscr{F}(A_1) = \mathscr{F}_2(A_1) \\ \vdots \\ \mathscr{F}_1(A_k) = \mathscr{F}(A_k) = \mathscr{F}_2(A_k) \end{array}\right\} \text{και επειδή η } \mathscr{V}_1 \text{ επεκτείνει την } \mathscr{F}_1 \text{ και η } \mathscr{V}_2$$
επεκτείνει την $\mathscr{F}_2$, θα πρέπει λόγω του (2) $\mathscr{V}_1(\sigma) = \mathscr{V}_2(\sigma)$ άρα $\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}_2$ άτοπο. $\square$

2. Με μαθηματική επαγωγή

Βήμα 1ο: Θα δείξουμε $P(A)$, με A κάποιο άτομο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η $A = A_1$. Έχουμε, εξ' υποθέσεως ότι $\mathscr{F}_1(A) = \mathscr{F}_1(A_1) = \mathscr{F}_2(A_1) = \mathscr{F}_2(A)$ και $\left.\begin{array}{c} \mathscr{V}_1(A_1) = \mathscr{F}_1(A_1) \\ \mathscr{V}_2(A_1) = \mathscr{F}_2(A_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{V}_1(A_1) = \mathscr{V}_2(A_2)$

Επαγωγικό Βήμα: Αν $P(\sigma_1), P(\sigma_2)$ τότε πρέπει να δείξουμε τα $P(\neg\sigma_1), P((\sigma_1 \wedge \sigma_2))$, $P((\sigma_1 \vee \sigma_2))$, ...

$\mathscr{V}_1(\neg\sigma_1) \stackrel{?}{=} \mathscr{V}_2(\neg\sigma_1) \Leftrightarrow \sim \mathscr{V}_1(\sigma_1) \stackrel{?}{=} \sim \mathscr{V}_2(\sigma_1) \Leftrightarrow \mathscr{V}_1(\sigma_1) \stackrel{?}{=} \mathscr{V}_2(\sigma_1)$, ισχύει λόγω της $P(\sigma_1)$.

$P((\sigma_1 \wedge \sigma_2))$: Εάν $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ είναι πρόταση που περιέχει κάποια από τα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ τότε $\mathscr{V}_1(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \stackrel{?}{=} \mathscr{V}_2(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ ανν $\mathscr{V}_1(\sigma_1) \sqcap \mathscr{V}_1(\sigma_2) = \mathscr{V}_2(\sigma_1) \sqcap \mathscr{V}_2(\sigma_2)$, που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση. Όμοια συνεχίζουμε με τις άλλες περιπτώσεις.

Ορισμός 1.7.1. *Δύο προτάσεις σ και τ λέγονται* ***λογικά ισοδύναμες*** *ανν για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ ισχύει $\mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(\tau)$. Συμβολικά θα γράφουμε $\sigma \equiv \tau$.*

Παράδειγμα 1.7.3. *Δείξτε ότι $\neg(\neg\sigma) \equiv \sigma$ (Νόμος της διπλής άρνησης)*

Απόδειξη: Έστω $\mathscr{V}$ μια τυχαία ερμηνεία. Τότε θα ανήκει σε μοα απο τις παρακάτω κατηγορίες

σ	$(\neg\sigma)$	$\neg(\neg\sigma)$
α	ψ	α
ψ	α	ψ

άρα, σε κάθε περίπτωση $\mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(\neg(\neg\sigma))$ άρα $\sigma \equiv \neg(\neg\sigma)$

Παράδειγμα 1.7.4. $\sigma_1 \to \sigma_2 \equiv (\neg\sigma_1) \vee \sigma_2$ *(Νόμος της συνεπαγωγής)*

Απόδειξη: Έστω $\mathscr{V}$ μια τυχαία ερμηνεία.

σ_1	σ_2	$\sigma_1 \to \sigma_2$	$\neg\sigma_1$	$(\neg\sigma_1) \vee \sigma_2$
α	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	α	α	α

1.8 Ταυτολογίες και αντιφάσεις

Κατηγορίες προτάσεων. Υπάρχουν οι παρακάτω κατηγορίες προτάσεων σ με βάση την ερμηνεία τους:

- σ Ταυτολογίες(ή νόμοι ή ταυτότητες ή πάντα αληθινές) για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ ισχύει $\mathscr{V}(\sigma) = a$)
- σ Αντιλογίες (ή αντιφάσεις ή μή επαληθεύσιμες ή πάντοτε ψευδείς προτάσεις) για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ ισχύει $\mathscr{V}(\sigma) = \psi$)
- σ Επαληθεύσιμες προτάσεις, οι οποίες δεν είναι ταυτολογίες, δηλ. υπάρχει μία ερμηνεία $\mathscr{V}_1(\sigma) = a$, και υπάρχει μια ερμηνεία $\mathscr{V}_2(\sigma) = \psi$

Παράδειγμα 1.8.1. ***Νόμοι De Morgan:***

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \neg[(\neg\sigma_1) \vee (\neg\sigma_2)]$$

$$\sigma_1 \vee \sigma_2 = \neg[(\neg\sigma_1) \wedge (\neg\sigma_2)]$$

που αντιστοιχούν στους εξής νόμους από την θεωρία συνόλων:

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$

Λύση. Για σπίτι.

Νόμοι συνεπαγωγής:

1. $\sigma_1 \to \sigma_2 \equiv (\neg\sigma_2) \to (\neg\sigma_1)$ (εις άτοπον απαγωγή)
2. $\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_2) \equiv (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \to \sigma_3$ (Νόμος της μεταφοράς)
3. $(\sigma_2 \to \sigma_3) \to ((\sigma_1 \to \sigma_2) \to (\sigma_1 \to \sigma_2)) = a$ ($1^{\text{ος}}$ Συλλογιστικός Νόμος του Αριστοτέλη)

4. $(\sigma_1 \to \sigma_2) \to ((\sigma_2 \to \sigma_3) \to (\sigma_1 \to \sigma_3)) = a$ (2ος Συλλογιστικός Νόμος του Αριστοτέλη)

5. $\sigma \vee (\neg\sigma) = a$ (Νόμος της του τρίτου αποκλίσεως)

Νόμος της διπλής άρνησης:

$$\neg(\neg\sigma) = \sigma$$

1ος κ΄ 2ος συλλογιστικός νόμος του Αριστοτέλη

Νόμος της μεταφοράς:

$$\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3) \equiv (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \to \sigma_3$$

Σχόλιο: $(\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_3 \not\equiv \sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3)$

Νόμος της του τρίτου αποκλίσεως: Η $\sigma \vee (\neg\sigma)$ που είναι λογικά ισοδύναμη με την $\sigma \to \sigma$ είναι τατολογία.

Επιμεριστικοί Νόμοι:

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee \sigma_3 \equiv (\sigma_1 \vee \sigma_3) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_3)$$

$$((\sigma_1 \vee \sigma_2) \wedge \sigma_3) \equiv (\sigma_1 \wedge \sigma_3) \vee (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$$

Αντιμεταθετικοί Νόμοι:

$$(\sigma_1 \vee \sigma_2) \equiv (\sigma_2 \vee \sigma_1)$$

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \equiv (\sigma_2 \wedge \sigma_1)$$

Προσεταιριστικοί Νόμοι:

$$(\sigma_1 \vee \sigma_2) \vee \sigma_3 \equiv \sigma_1 \vee (\sigma_2 \vee \sigma_3)$$

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge \sigma_3 \equiv \sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$$

Νόμοι της απορρόφησης:

$\sigma \wedge \sigma \equiv \sigma$
$\sigma \vee \sigma \equiv \sigma$

$$
\begin{array}{cc}
\sigma \wedge (\text{ταυτολογία}) \equiv \sigma & (A \wedge \Omega = A) \\
\sigma \vee (\text{ταυτολογία}) \equiv \text{ ταυτολογία} & (A \vee \Omega = \Omega) \\
\sigma \wedge (\text{αντίφαση}) \equiv \text{αντίφαση} & (A \wedge \emptyset = \emptyset) \\
\sigma \vee (\text{αντίφαση}) \equiv \sigma & (A \wedge \emptyset = A)
\end{array}
$$

Άσκηση 1.8.1. *Δείξτε ότι, $\sigma \wedge$ (ταυτολογία) $\equiv \sigma$*

Λύση. Έστω $\mathscr{V}$ τυχαία ερμηνεία. Έχουμε ότι
$\mathscr{V}(\sigma \wedge (\text{ταυτολογία})) = \mathscr{V}(\sigma) \Rightarrow \mathscr{V}(\sigma) \sqcap \mathscr{V}((\text{ταυτολογία})) = \underbrace{\mathscr{V}(\sigma) \sqcap a}_{\mathscr{V}(\sigma)} = \mathscr{V}(\sigma)$

άρα ισχύει.

Άσκηση 1.8.2. *Να δειχθεί ότι για οποιεσδήποτε προτάσεις σ_1, σ_2, η $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι ταυτολογία ανν $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.*

Λύση. Έστω $\mathscr{V}$ τυχαία ερμηνεία.
Θα δείξουμε ότι εάν $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ τότε $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ ταυτολογία.
$1^{η}$ περίπτωση: Εάν $\mathscr{V}(\sigma_1) = a$ τότε $\mathscr{V}(\sigma_2) = a$, άρα $\mathscr{V}(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) = \mathscr{V}(\sigma_1)[-]\mathscr{V}(\sigma_2) = a[-]a = a$.
$2^{η}$ περίπτωση: Εάν $\mathscr{V}(\sigma_1) = \psi$ τότε $\mathscr{V}(\sigma_2) = \psi$, άρα $\mathscr{V}(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) = \mathscr{V}(\sigma_1)[-]\mathscr{V}(\sigma_2) = \psi[-]\psi = a$.
Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι εάν $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι ταυτολογία, τότε $\sigma_1 \equiv \sigma_2$:
$\mathscr{V}(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) = a$ άρα $\mathscr{V}(\sigma_1)[-]\mathscr{V}(\sigma_2) = a$ άρα $\mathscr{V}(\sigma_1) = \mathscr{V}(\sigma_2) = a$ η ψ.

1.9 Κανονικές μορφές

Ορισμός 1.9.1. *Ένας στοιχειώδης τύπος είναι μια ατομική πρόταση (A) ή μια άρνησή της ($\neg A$).*

Ορισμός 1.9.2. ***Παράγοντα*** *ή* ***Προγραμματικό Τύπο*** *ονομάζουμε μία* ***διάζευξη*** *ενός πεπερασμένου συνόλου στοιχειωδών τύπων.*

π.χ.: $\neg A \vee B \vee \neg \Gamma$
που γράφεται ισοδύναμα σε συνολοθεωρητική μορφή $\{\neg A, B, \neg\Gamma\}$.

Ορισμός 1.9.3. ***Συζευκτική Κανονική Μορφή*** *(ΣΚΜ) ονομάζουμε μια οποιαδήποτε σύζευξη (ενός ή παραπάνω) παραγόντων.*

Παράδειγμα 1.9.1. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg\Gamma) \wedge \Delta$ *ή σε συνολοθεωρητική μορφή*

$$\{\{\neg A, B\}, \{\neg B, \neg\Gamma\}, \{\Delta\}\}.$$

Ορισμός 1.9.4. ***Διαζευκτική Κανονική Μορφή*** *(ΔΚΜ)* $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ *έτσι ώστε κάθε ένα από τα* σ_i *είναι* ***σύζευξη*** *στοιχειωδών τύπων. Με άλλα λόγια, μία ΔΚΜ είναι διάζευξη κάποιου πλήθους* $n \geq 1$ *από συζεύξεις στοιχειωδών τύπων* $\sigma_i, 1 \leq i \leq n$.

Σχόλιο. Υπάρχουν κάποιες προτάσεις οι οποίες είναι ήδη γραμμένες και σε ΣΚΜ και σε ΔΚΜ.

Παράδειγμα 1.9.2. $A \vee B \vee \neg\Gamma$ *μόνο ή* A *ή* $A \wedge \neg\Delta \wedge E$

Σχόλιο. Μπορούμε να γράψουμε κάθε πρόταση σ σε μία ισοδύναμη πρόταση σε ΣΚΜ και σε μία άλλη σε ΔΚΜ με χρήση των επιμεριστικών και άλλων νόμων που μάθαμε.

Παράδειγμα 1.9.3. *Να γράψουμε μια (τυχαία) ΔΚΜ των παρακάτω 5 στοιχειωδών τύπων* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ *σε ΣΚΜ:*
$(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3) \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)$ *(ΔΚΜ). Οπότε,*

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3) \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5) \quad &\equiv \quad (\sigma_1 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \wedge (\sigma_2 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \wedge \\
&\qquad \wedge (\sigma_3 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \\
&\equiv \quad (\sigma_1 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_5) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_5) \wedge \\
&\qquad \wedge (\sigma_3 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_3 \vee \sigma_5)
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι γραμμένη σε ΣΚΜ (προσέξτε ότι το αποτέλεσμα περιέχει το πολύ $3 \cdot 2 = 6$ *παράγοντες. Αυτή η παρατήρηση φυσικά μπορεί γενικευθεί).*

Άσκηση 1.9.1. *Να δείξετε ότι, η πρόταση* $k = [(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta$ *είναι επαληθεύσιμη, αλλά όχι ταυτολογία.*

Λύση.

$$
\begin{aligned}
[(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta &\equiv [\neg(\neg A \wedge B) \vee \Gamma] \vee \Delta \\
&\equiv ((A \vee \neg B) \vee \Gamma) \vee \Delta \\
&\equiv A \vee (\neg B) \vee \Gamma \vee \Delta = \text{ΔΚΜ}
\end{aligned}
$$

Κατασκευή μιας ερμηνείας που να επαληθεύει την k.
$\mathscr{V}(A) = a$ και στα υπόλοιπα άτομα η $\mathscr{V}$ δίνει οποιαδήποτε αληθοτιμή.
$\mathscr{V}(k) = \mathscr{V}(A \vee (\neg B) \vee \Gamma \vee \Delta) = a \sqcup \mathscr{V}(\neg B) \sqcup \mathscr{V}(\Gamma) \sqcup \mathscr{V}(\Delta) = \alpha$
Κατασκευή μιας ερμηνείας που να διαψεύδει την k. $\mathscr{V}'(B) = a$ και στα υπόλοιπα άτομα η $\mathscr{V}'$ δίνει ψ.
$\mathscr{V}'(k) = \mathscr{V}'(A \vee (\neg B) \vee \Gamma \vee \Delta) = \mathscr{V}'(A) \sqcup \mathscr{V}'(\neg B) \sqcup \mathscr{V}'(\Gamma) \sqcup \mathscr{V}'(\Delta) = \psi \sqcup \psi \sqcup \psi \sqcup \psi = \psi$.

Άσκηση 1.9.2. *Να δείξετε ότι ισχύει ο νόμος του Pierce* $((A \to B) \to A) \to A$

1. *Με αληθοπίνακες*
2. *ΣΚΜ*
3. *ΔΚΜ*

Λύση.

1. Για σπίτι. . .
2. Στην περίπτωσή μας η ΣΚΜ συμπίπτει με την ΔΚΜ, διότι έχουμε ένα και μοναδικό παράγοντα, δείτε το 3.
3.

$$
\begin{aligned}
\sigma &\equiv \neg((A \to B) \to A) \vee A \\
&\equiv \neg\Big(\neg((A \to B) \vee A) \vee A\Big) \\
&\equiv \neg\Big((\neg(\neg A \vee B) \vee A) \vee A\Big) \\
&\equiv \neg((A \wedge \neg B) \vee A) \vee A \\
&\equiv (\neg(A \wedge \neg B) \neg A) \vee A
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\equiv ((\neg A \vee B) \wedge \neg A) \vee A \\
&\equiv [(\neg A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)] \vee A \\
&\equiv (\neg A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) \vee A \\
&\equiv (\neg A) \vee (B \wedge \neg A) \vee A \\
&\equiv (\neg A) \vee A \vee (B \wedge \neg A) \\
&\equiv \text{ ταυτολογία.}
\end{aligned}$$

διότι η $(\neg A) \vee A$ είναι ταυτολογία.

Θεώρημα 1.9.4. *Κάθε πρόταση σ της Λογικής των Προτάσεων γράφεται ισοδύναμα σε μία πρόταση τ σε Σ.Κ.Μ. και σε μία πρόταση τ' σε Δ.Κ.Μ. (όχι κατ' ανάγκην $\tau \neq \tau'$) δηλαδή $\sigma \equiv \tau \equiv \tau'$.*

Από της γραμμές του αληθοπίνακα της σ στις οποίες αληθεύει (δηλ. παίρνει α από τις αντίστοιχες ερμηνείες) μπορούμε να ανακαλύψουμε την Δ.Κ.Μ. της σ.

Παράδειγμα 1.9.5. *Δίνεται ο αληθοπίνακας μίας πρότασης σ. Να βρεθεί η Δ.Κ.Μ. της σ.*

A	B	Γ	σ	$\neg\sigma$
α	α	α	α	ψ
α	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	α	ψ
ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ

Λύση. Θέλουμε $\sigma \equiv$ Δ.Κ.Μ. Ψάχνουμε τις ερμηνείες $\mathscr{V}$ που επαληθεύουν την σ.
Περιπτώσεις:

1. (από πρώτη γραμμή) $\underbrace{\mathscr{V}_1(A) = \mathscr{V}_1(B) = \mathscr{V}_1(\Gamma) = \alpha}_{\mathscr{V}_1(A \wedge B \wedge \Gamma) = \alpha} \Rightarrow \mathscr{V}_1(\sigma) = \alpha$

2. (από 5η γραμμή) $\underbrace{\mathscr{V}_2(A) = \psi,\ \ \mathscr{V}_2(B) = \mathscr{V}_2(\Gamma) = \alpha}_{\mathscr{V}_2(\neg A) = \alpha,\ \mathscr{V}_2(B \wedge \Gamma) = \alpha \Rightarrow \mathscr{V}_2(\neg A \wedge B \wedge \Gamma) = \alpha} \Rightarrow \mathscr{V}_2(\sigma) = \alpha$

3. (από 8η γραμμή) $\underbrace{\mathscr{V}_3(A) = \mathscr{V}_3(B) = \mathscr{V}_3(\Gamma) = \psi}_{\mathscr{V}_3(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg \Gamma) = \alpha} \Rightarrow \mathscr{V}_3(\sigma) = \alpha$

Άρα, αν $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1$ ή $\mathscr{V}_2$ ή $\mathscr{V}_3$ τότε $\mathscr{V}(\sigma) = \alpha$ δηλαδή,

$$\text{Αν η} \left.\begin{array}{ll} \mathscr{V} & \text{δίνει } \mathscr{V}(A \wedge B \wedge \Gamma) = \alpha \textbf{ ή } \text{εάν} \\ \mathscr{V} & \text{δίνει } \mathscr{V}(\neg A \wedge B \wedge \Gamma) = \alpha \textbf{ ή } \text{εάν} \\ \mathscr{V} & \text{δίνει } \mathscr{V}(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg \Gamma) = \alpha \end{array}\right\} \text{τότε}$$

$$\mathscr{V}(\sigma) = \alpha.$$

δηλαδή εάν η $\mathscr{V}$ δίνει $\mathscr{V}(\underbrace{(A \wedge B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg \Gamma)}_{\text{Δ.Κ.Μ.}})$
τότε

$$\mathscr{V}(\sigma) = \alpha.$$

Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο δηλ. εάν $\mathscr{V}(\sigma) = \alpha$ τότε αναγκαστικά η $\mathscr{V}$ ειναι μια από τις $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \mathscr{V}_3$ και άρα η Δ.Κ.Μ. αληθεύει. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η σ αληθεύει αν και μόνον εάν η παραπάνω Δ.Κ.Μ αληθεύει ή με άλλα λόγια αυτή είναι η ζητούμενη Διαζευκτική Κανονική Μορφή της σ ($\sigma \equiv$ Δ.Κ.Μ.)
Σχόλιο. Συνεπώς, για να βρούμε την Δ.Κ.Μ μιας πρότασης σ της οποίας ξέρουμε τον αληθοπίνακα κοιτάμε τα α της στήλης του σ και χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες γραμμές τους κατασκευάζουμε την Δ.Κ.Μ.
Σχόλιο. Εάν $\sigma \equiv (A \wedge \neg B \wedge \Delta) \vee (\Gamma \wedge B \wedge \neg E)$ τότε ο αληθοπίνακας της έχει $2^5 = 32$ γραμμές. Αλλά αυτή αληθεύει μόνο σε 4 +4 ερμηνείες και σε όλες τις άλλες διαψεύδεται (βάζουμε ? όταν δεν παίζει ρόλο η αληθοτιμή του αντίστοιχου ατόμου που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή του αληθοπίνακα).

	A	B	Γ	Δ	E	σ
4 γραμμές	α	ψ	?	α	?	α
4 γραμμές	?	α	α	?	ψ	α
στις υπόλοιπες 24 γραμμές						ψ

Εάν γνωρίζουμε την Σ.Κ.Μ. ή την Δ.Κ.Μ. τότε είναι πολύ εύκολο να κατασκευάσουμε τον αληθοπίνακα της πρότασης. Παράδειγμα: Έστω $\tau \equiv (A \vee \neg B \vee \Delta) \wedge (\Gamma \vee B \vee E)$. Τότε, για να αληθεύει η τ αρκει κάθε ένας από τους δύο παράγοντες να είναι αληθινός άρα υπάρχουν $3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$ τέτοιες περιπτώσεις(δεν μπορεί να ισχύει το ζευγάρι $\mathscr{V}(\neg B)$(από τον πρώτο παράγοντα)$=\mathscr{V}(B)$(του 2ου παράγοντα)$= \alpha$). Παρακώτω εμφανίζουμε 4 απο αυτές και αφήνονται ως άσκηση οι υπόλοιπες 4.

A	B	Γ	Δ	E	σ
α	α	?	?	?	α
?	α	?	α	?	α
?	ψ	α	?	?	α
?	ψ	?	?	α	α

Σχόλιο. Για να βρούμε την Σ.Κ.Μ.$_\sigma$ δουλεύουμε ως εξής: Κοιτάμε τα ψ της στήλης του σ και χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες γραμμές κατασκευάζουμε την Σ.Κ.Μ.$_\sigma$. Ισχύει: Σ.Κ.Μ.$_\sigma$ $= \neg$(Δ.Κ.Μ.$_{\neg\sigma}$)
Ας βρούμε για παράδειγμα την Σ.Κ.Μ της σ του παραδείγματος 1.9.5. Έχουμε, Δ.Κ.Μ.$_{\neg\sigma}$ $= ((A \wedge B \wedge \neg\Gamma) \vee (A \wedge \neg B \wedge \Gamma) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg\Gamma) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \Gamma) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg\Gamma))$ οπότε,
$\neg$(Δ.Κ.Μ.$_{\neg\sigma}$) $= ((\neg A \vee \neg B \vee \Gamma) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg\Gamma) \wedge (\neg A \vee B \vee \Gamma) \wedge (A \vee B \vee \neg\Gamma) \wedge (A \vee \neg B \vee \Gamma))$

Σχόλιο. Εάν η Δ.Κ.Μ.$_\sigma$ έχει 3 παράγοντες και η σ περιέχει n το πλήθος άτομα, τότε η Σ.Κ.Μ.$_\sigma$ **έχει** $2^n - 3$ παράγοντες το πολύ! **Γενικά,** εάν η Δ.Κ.Μ.$_\sigma$ έχει m το πλήθος διαζεύξεις τότε η Σ.Κ.Μ.$_\sigma$ περιέχει το πολύ $2^n - m$ συζεύξεις, όπου n είναι το πλήθος των ατόμων που περιέχει η σ.
Σχόλιο. Την σ θα την γράψουμε σε Δ.Κ.Μ. (όταν θέλουμε να επαληθεύσουμε την σ) και θα την γράψουμε σε Σ.Κ.Μ. (όταν θέλουμε να διαψεύσουμε την σ)

Επιμεριστικοί Νόμοι
●$(\sigma_1 \vee \sigma_2) \wedge \sigma_3 \equiv$
$\equiv (\sigma_1 \wedge \sigma_3) \vee (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$
●$(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee \sigma_3 \equiv$
$\equiv (\sigma_1 \vee \sigma_3) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_3)$

Άσκηση 1.9.3.

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv [(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta \\ &\equiv [\neg(\neg A \wedge B) \vee \Gamma] \vee \Delta \\ &\equiv A \vee \neg B \vee \Gamma \vee \Delta \\ &\nearrow \textit{Σ.Κ.Μ.}_\sigma \\ &\searrow \textit{Δ.Κ.Μ.}_\sigma \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, εάν $\mathscr{V}(A) = \mathscr{V}(\Gamma) = \mathscr{V}(\Delta) = \psi$, $\mathscr{V}(B) = \alpha \Rightarrow \mathscr{V}(\sigma) = \psi$

Σχόλιο. Μία πρόταση σε Σ.Κ.Μ. είναι ψευδής εαν και μόνον εάν μία τουλάχιστον σύζευξή της είναι ψευδής.
Σχόλιο. Μία πρόταση σε Δ.Κ.Μ. είναι αληθής εαν και μόνον εάν μία τουλάχιστον διάζευξή της είναι αληθής.

1.10 Συνεπές σύνολο προτάσεων και συνέπειες ενός (συνεπές) συνόλου

Ορισμός 1.10.1. *Έστω Σ ένα σύνολο πεπερασμένο ή άπειρο από προτάσεις (το Σ ονομάζεται εδώ και σύνολο υποθέσεων). Τότε, η σ είναι συνέπεια του Σ (και θα γράφουμε $\Sigma \models \sigma$) εάν και μόνον εάν ισχύει ότι για κάθε ερμηνεία $\mathscr{V}$ η οποία επαληθεύει κάθε υπόθεση του Σ τότε αναγκαστικά επαληθεύει και την πρόταση σ. Δηλαδή,*

$$\text{Αν } \mathscr{V}(\Sigma) \equiv \alpha \text{ τότε } \mathscr{V}(\sigma) = \alpha$$

(Γράφουμε συμβολικά $\Sigma \models \sigma$). Για να δείξουμε $\Sigma \models \sigma$ χρησιμοποιούμε συνήθως τις παρακάτω μεθόδους.
Α′ Μεθοδος: *Με αληθοπίνακες. Εδώ υποθέτουμε ότι το Σ είναι πεπερασμένο. Με αληθοπίνακες ελέγχουμε αν πράγματι η σ είναι αλήθεια όποτε έχουμε μια ερμηνεία $\mathscr{V}$ (δηλ. μια γραμμή του αληθοπίνακα της Σ) που επαληθεύει κάθε υπόθεση(δηλ. κάθε πρόταση) που ανήκει στο Σ:*

	A	B	$\dots$	σ_1	σ_2	$\dots$	σ_n	σ
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathscr{V}$				α	α	$\dots$	α	?
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Άσκηση 1.10.1. *Έχουμε την παρακάτω «βάση προσωπικών δεδομένων»*
Ο Χρήστος αγαπάει την Μαρία ή αγαπάει την Κατερίνα.
Εάν ο Χρήστος αγαπάει την Μαρία, τότε αγαπάει την Κατερίνα.
*Από τις παραπάνω **υποθέσεις** δείξτε το*
Συμπέρασμα: *Ο Χρήστος αγαπάει την Κατερίνα.*

Λύση. Θέλουμε να δείξουμε με αληθοπίνακες ότι

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_1 = A \vee B \\ \sigma_2 = A \to B\end{array}\right\} \models \sigma = B$$

Πράγματι,

A	B	σ_1	σ_2	σ
α	α	α	α	α
α	ψ	α	ψ	?
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	?

Τα $?$ υποδηλώνουν ότι δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της σ για τούτη την γραμμή(ερμηνεία) του αληθοπίνακα.

Σχόλιο.

1. Εάν $\sigma \in \Sigma$ τότε είναι προφανές ότι $\Sigma \models \sigma$.

2. Εάν σ είναι ταυτολογία, τότε είναι προφανές ότι $\Sigma \models \sigma$ ανεξάρτητα από το Σ. (π.χ. $\Sigma = \emptyset$).

3. Εάν $\Sigma = \emptyset$, τότε $\sigma \models$ταυτολογίες (γιατί κάθε άλλη πρόταση μπορεί να ισχύει $\mathscr{V}(\sigma) = \psi$)

4. Εάν το Σ περιέχει μία $\tau \in \Sigma$ αντίφαση(οπότε το Σ ειναι αντιφατικό δηλ. ασυνεπές), τότε κάθε πρόταση σ είναι συνέπεια του Σ! Δηλαδή, $\Sigma \models \sigma$. Για τον ίδιο λόγο αποφεύγομαι να τις περιπτώσεις που το Σ αποδεικνύεται τελικά ασυνεπές.

   Απόδειξη. Επειδή η πρόταση '$\Sigma \models \sigma$' είναι της μορφής 'εάν ... τότε' και επειδή η υπόθεση αυτής της συνεπαγωγής είναι πάντοτε **ψευδής**, έπεται ότι όλη η συνεπαγωγή αληθεύει. Δηλαδή, $\Sigma \models \sigma$.

Παράδειγμα 1.10.1. *Να δειχθεί ότι* $A \models \neg B \to (\Delta \to A)$.

Λύση.

1. $1^{\text{ος}}$ τρόπος (με ορισμό):
   Έστω $\mathscr{V}$ τυχαία ερμηνεία: $\mathscr{V}(A) = a$
   Έχουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα

   $$\mathscr{V}(\neg B \to (\Delta \to A)) = a?$$

   Όμως

   $$\begin{aligned} \neg B \to (\Delta \to A) &\equiv \neg B \to (\neg\Delta \vee A) \\ &\equiv \neg(\neg B) \vee (\neg\Delta \vee A) \\ &\equiv B \vee (\neg\Delta) \vee A \end{aligned}$$

   Οπότε, $\mathscr{V}(B \vee (\neg\Delta) \vee A) = \mathscr{V}(B) \sqcup \mathscr{V}(\neg\Delta) \sqcup \mathscr{V}(A) = a$ και άρα ισχύει $\mathscr{V}(\neg B \to (\Delta \to A)) = a$.

2. $2^{ος}$ τρόπος (με αληθοπίνακες):

A	B	Δ	$\Sigma = \{A\}$	$\neg B \to (\Delta \to A)$
a	a	a	a	a
a	a	ψ	a	a
a	ψ	a	a	a
a	ψ	ψ	a	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	ψ	$\vdots$

Από τον αληθοπίνακα παρατηρούμε ότι σε όλες τις γραμμές(οι πρώτες 4) που αληθεύουν οι προτάσεις του $\Sigma = \{A\}$ τότε συγχρόνως και αναγκαστικά αληθεύει το συμπέρασμα $\neg B \to (\Delta \to A)$. Άρα, πράγματι, η πρόταση αυτή είναι συνέπεια του Σ.

Άσκηση 1.10.2. $\Sigma = \{A \leftrightarrow \Gamma, B \leftrightarrow \Delta, (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)\} \not\models \sigma = (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)$

Λύση. Εδώ δεν χρειάζεται να φτιάξουμε όλο τον αληθοπίνακα για να διαπιστώσουμε ότι $\Sigma \not\models \sigma$. Πράγματι θα περιοριστούμε μόνο σε περιπτώσεις ερμηνειών που κάνουν όλες τις προτάσεις του Σ αληθινές. Για μια τέτοια ερμηνεία $\mathscr{V}$ θα πρέπει $\mathscr{V}(A \leftrightarrow \Gamma) = a$ δηλ. τα άτομα A και Γ πρέπει να παίρνουν ακριβώς την ίδια αληθοτιμή και όμοια $\mathscr{V}(B \leftrightarrow \Delta) = a$ και άρα τα άτομα B και Δ πρέπει να παίρνουν ακριβώς την ίδια αληθοτιμή. Τέτοιες περιπτώσεις ερμηνειών είναι μόνο 4:

A	B	Γ	Δ	$A \leftrightarrow \Gamma$	$B \leftrightarrow \Delta$	$(A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)$	σ
a	a	a	a	a	a	a	a
a	ψ	a	ψ	a	a	a	ψ
ψ	a	ψ	a	a	a	a	
ψ	ψ	ψ	ψ	a	a	ψ	

Άρα, από την 2η γραμμή διαπιστώνουμε ότι $\Sigma \not\models \sigma$.

Κανόνας της δυαδικής επίλυσης.

$$\Sigma = \{\underline{A \vee B \vee \ldots}, \underline{\neg A \vee B' \vee \ldots}, \ldots\} \models B \vee B' \vee \ldots$$

δηλ. με άλλα λόγια, 'η σύγκρουση' A(ενός παράγοντα του Σ) με το $\neg A$ (ενός άλλου παράγοντα) μπορεί να επιλυθεί και να προκύψει ως (νέο)συμπέρασμα ένας παράγοντας που αποτελείται από τους στοιχειώδεις τύπους που έχουν απομείνει και από τους δυο παράγοντες μετά την επίλυση.

Κανόνας της πεπερασμένης σύζευξης. Έστω ότι το Σ είναι πεπερασμένο = $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n\}$ και σ πρόταση, τότε $\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n \models \sigma$

Παρατήρηση 1.10.2. *Έστω Σ πεπερασμένο. Τότε για να εφαρμόσουμε τον παραπάνω κανόνα γράφουμε κάθε πρόταση του Σ σε Σ.Κ.Μ.*

Παράδειγμα 1.10.3. $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv r_{11} \wedge r_{12} \wedge r_{13} \\ \sigma_2 &\equiv r_{21} \wedge r_{22} \wedge r_{23} \wedge r_{24} \\ \sigma_3 &\equiv r_{31} \end{aligned}$$

όπου όλα τα r_{ij} είναι διαζεύξεις στοιχειωδών τύπων(δηλ. κάποιοι παράγοντες). Όπότε το Σ είναι λογικό ισοδύναμο με μια μοναδική πρόταση δηλ. με την συζευξη των 8 παραγόντων του.

Σύμφωνα με τον κανόνα έχουμε $\Sigma \models \sigma \Leftrightarrow \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \models \sigma \Leftrightarrow \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \models \sigma \Leftrightarrow r_{11} \wedge r_{12} \wedge r_{13} \wedge r_{21} \wedge r_{22} \wedge r_{23} \wedge r_{24} \wedge r_{31} \models \sigma$. Προσέξτε ότι στα αριστερά υπάρχει μόνο μία πρόταση σε Σ.Κ.Μ.. Ίσως χρειαστεί να γράψουμε και τη σ σε Σ.Κ.Μ. για να μπορέσουμε να τη συμπεράνουμε με χρήση της μεθόδου της δυαδικής επίλυσης από το Σ.

Παράδειγμα 1.10.4. *Δείξτε με την μέθοδο της δυαδικής επίλυσης ότι* $\{A \vee B \vee \Gamma, A \vee B \vee \neg\Gamma, A \vee \neg B, \neg A \vee \Gamma\} \models \Gamma$

Λύση. $\underbrace{(A \vee B \vee \Gamma)}_{①} \wedge \underbrace{(A \vee B \vee \neg\Gamma)}_{②} \wedge \underbrace{(A \vee \neg B)}_{③} \wedge \underbrace{(\neg A \vee \Gamma)}_{④} \models \Gamma$
$1 \wedge 3 \models A \vee \Gamma \vee A$, δηλαδή $1 \wedge 3 \models A \vee \Gamma$ ⑤ (με επίλυση του B).
$5 \wedge 4 \models \Gamma$ ⑥ (με επίλυση του A).

Πρόταση 1.10.5. *Έστω $\Sigma \models \sigma'$. Τότε $(\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma \cup \{\sigma'\} \models \sigma)$ δηλαδή στις υποθέσεις μου Σ μπορώ να επισυνάψω **οποιαδήποτε** πρόταση σ που έχει αποδείξει η Σ σε κάποια στιγμή στο παρελθόν.*

Σύμβαση: Με $\Box$ συμβολίζω οποιαδήποτε **αντίφαση**. Ως γνωστό όλες οι αντιφάσεις είναι λογικά ισοδύναμες προτάσεις(μεταξύ τους) και άρα δεν έχει σημασία ποια ακριβώς θα θεωρήσουμε. Για παράδειγμα μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι $\Box = A \wedge \neg A$.

Πρόταση 1.10.6. *Εάν $\Sigma \models \Box$ τότε αυτό σημαίνει ότι το Σ είναι **μή** επαληθεύσιμο, δηλαδή **δεν** υπάρχει $\mathscr{V}$ που να επαληθεύει κάθε πρόταση του Σ. Με άλλα λόγια*

$$\Sigma \models \Box \text{ αν και μόνο αν } \Sigma \text{ ασυνεπές.}$$

Ορισμός 1.10.2. *Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται **ασυνεπές** ή **μη επαληθεύσιμο** εάν δεν υπάρχει ερμηνεία $\mathscr{V}$ που να επαληθεύει κάθε πρόταση του Σ.*

Πρόταση 1.10.7. *$\Sigma \models \neg\sigma$ αν και μόνο αν ($\Sigma \cup \{\sigma\}$ ασυνεπές) και όμοια $\Sigma \not\models \sigma$ αν και μόνο αν ($\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ συνεπές).*

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν $\Sigma \not\models \sigma$ τότε δεν έπεται ότι $\Sigma \models \neg\sigma$!

Θεώρημα 1.10.8 (Συμπεράσματος)**.** *Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων και σ_1, σ_2 δύο προτάσεις, τότε*

$$\Sigma \cup \{\sigma\} \models \sigma_2 \text{ αν και μόνο αν } \Sigma \models (\sigma_1 \to \sigma_2)$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$: Θα δείξω ότι $\Sigma \models \sigma_1 \to \sigma_2$. Έστω λοιπόν $\mathscr{V}$ ερμηνεία η οποία επαληθεύει όλες τις $\sigma \in \Sigma$.

1. 1η περίπτωση: $\mathscr{V}(\sigma_1) = \psi$, προφανώς $\mathscr{V}(\sigma_1 \to \sigma_2) = \psi -] \mathscr{V}(\sigma_2) = a$.

2. 2η περίπτωση: $\mathscr{V}(\sigma_1) = a$, τότε προφανώς επαληθεύεται κάθε πρόταση του $\Sigma \cup \{\sigma_1\}$. Όμως, από ορισμό έχουμε $\underbrace{\Sigma \cup \{\sigma_1\}}_{a} \models \underbrace{\sigma_2}_{a}$ άρα

   αναγκαστηκά προκύπτει $\mathscr{V}(\sigma_2) = a$.

Συνολικά, $\mathscr{V}(\sigma_1 \to \sigma_2) = \mathscr{V}(\sigma_1) -] \mathscr{V}(\sigma_2) == a$
$(\Leftarrow)$: Δουλεύω όμοια, δηλαδή θέλω να δείξω ότι $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models \sigma_2 \ldots$ $\Box$

Θεώρημα 1.10.9 (Συμπάγειας - 1η μορφή)**.** *Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο (υποθέσεων), τότε $\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν $\exists$ κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ του Σ έτσι ώστε $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \models \sigma$.*

Θεώρημα 1.10.10 (Συμπάγειας - 2η μορφή)**.** *Έστω Σ άπειρο σύνολο (υποθέσεων). Τότε το Σ είναι **συνεπές** αν και μόνο αν για κάθε Σ' υποσύνολο του Σ (πεπερασμένο και μη κενό) το Σ' είναι **συνεπές**.*

Το Σ είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει $\mathscr{V}$ που να επαληθεύει κάθε πρόταση $\sigma \in \Sigma$.

Παράδειγμα 1.10.11. *Έστω $\Sigma = \{A_1, A_2, A_1 \wedge A_2, A_3, A_1 \wedge A_3, A_2 \wedge A_3, A_4, \ldots\}$ το Σ είναι άπειρο σύνολο προτάσεων. Το Σ είναι συνεπές;*

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Συμπάγειας: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\Sigma' = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1 \wedge A_2, \ldots, A_{n-1} \wedge A_n\}$. Αν ορίσουμε $\mathscr{V}(A_1) = \mathscr{V}(A_2) = \ldots = \mathscr{V}(A_n) = a \Rightarrow \mathscr{V}(\Sigma') = a$.

Παράδειγμα 1.10.12. *Δείξτε ότι υπάρχει ένα δυαδικό δένδρο το οποίο είναι άπειρο.*

Δυαδικό δένδρο

```
     1
    / \
   2   3
   |  / \
   4 5   6
         |
         7
```

Λύση.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \text{«δυαδικό δένδρο με 1 τουλάχιστον κόμβο»} \\
A_2 &= \text{«δυαδικό δένδρο με 2 τουλάχιστον κόμβους»} \\
A_3 &= \text{«δυαδικό δένδρο με 3 τουλάχιστον κόμβους»} \\
&\vdots \\
\Sigma &= \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Αν $\mathscr{V} : \mathscr{V}(\Sigma) = a$, τότε η $\mathscr{V}$ θα είναι το ζητούμενο άπειρο δυαδικό δένδρο, δηλαδή ουσιαστικά ζητάμε να δείξουμε ότι το Σ είναι συνεπές. Αυτό είναι πολύ εύκολο με το Θεώρημα της Συμπάγειας. Για παράδειγμα μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα δυαδικό δέντρο με 7 κόμβους.

Άσκηση 1.10.3. *Δείξτε ότι κάθε άπειρο δυαδικό δένδρο έχει αναγκαστηκά ένα άπειρο μονοπάτι.*

Λύση. Για σπίτι...

Παράδειγμα 1.10.13. *Στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι το $S = \{1 - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$ είναι πάνω φραγμένο σύνολο.*

Λύση.

$$
\begin{aligned}
n = 1 &\Rightarrow 1 - 1 = 0 \\
n = 2 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
n = 3 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &: 1 - \frac{1}{1} \leq 3 \\
A_2 &: 1 - \frac{1}{2} \leq 3 \\
&\vdots \\
A_n &: 1 - \frac{1}{n} \leq 3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Έστω $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ και $\Sigma' = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολό του. Εύκολα η $\mathscr{V} = \mathbb{Z}^+$ το ικανοποιεί διότι
$1 - \frac{1}{n} \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq 2 \Leftrightarrow n \geq -\frac{1}{2}$.
Άρα το (τυχαίο) πεπερασμένο υποσύνολο Σ' είναι **συνεπές** και άρα από το Θεώρημα Συμπάγειας το Σ είναι συνεπές.

Απόδειξη της Πρότασης 1.10.7 με χρήση του Θεώρ. Συμπεράσματος. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(\Sigma \models \neg\sigma) \Leftrightarrow (\Sigma \cup \{\sigma\}$ ασυνεπές). Έχουμε $\Sigma \models \neg\sigma$ $\underbrace{\text{αν και μόνο αν}}_{\neg\sigma\equiv\sigma\to\Box}$ $\Sigma \models (\sigma \to \Box)$ $\underbrace{\text{αν και μόνο αν}}_{\text{Θεώρ. Συμπεράσματος}}$ $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \Box$.

Άσκηση 1.10.4. *Δείξτε ότι το* $\Sigma = \{A_1, A_2, A_1 \to A_3, \neg A_3\}$ *είναι* ***ασυνεπές***.

Λύση.

- 1$^{\text{ος}}$ τρόπος:
  $2^3 = 8$ γραμμές

A_1	A_2	A_3	$\neg A_3$	$A_1 \to A_3$
a	a	a	ψ	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

  Δεν υπάρχει γραμμή που να αληθεύουν **όλες** οι υποθέσεις μου.

- 2$^{\text{ος}}$ τρόπος:
  $\Sigma = \{\underbrace{A_1, A_2, A_1 \to A_3}_{T}, \underbrace{\neg A_3}_{\sigma}\}$ ασυνεπές $\Leftrightarrow T \cup \{\sigma\}$ ασυνεπές $\Leftrightarrow T \overset{;}{\models} \neg\sigma \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \{A_1, A_2, A_1 \to A_3\} &\overset{;}{\models} \neg(\neg A_3) \Leftrightarrow \\ \{\underbrace{A_1}_{a}, A_2, \underbrace{A_1 \to A_3}_{a}\} &\overset{;}{\models} A_3 \text{ Αυτό ισχύει} \\ \left.\begin{array}{r} \text{διότι } \mathscr{V}(A_1) = a \\ \mathscr{V}(A_1 \to A_3) = a \end{array}\right\} &\Rightarrow \mathscr{V}(A_1) -] \mathscr{V}(A_3) = a \end{aligned}$$

  δηλαδή $a -] \mathscr{V}(A_3) = a$, άρα $\mathscr{V}(A_3) = a$.

- 3$^{\text{ος}}$ τρόπος:
  $\{A_1, A_2, A_1 \to A_3, \neg A_3\}$ είναι ασυνεπές

$$\Leftrightarrow \{\underbrace{A_1}_{\sigma_1}, \underbrace{A_2}_{\sigma_2}, \underbrace{\neg A_1 \vee A_3}_{\sigma_3}, \underbrace{\neg A_3}_{\sigma_4}\} \overset{\text{επίλυση του } A_1}{\models} \{A_2, A_3, \neg A_3\} \overset{\text{επίλυση του } A_3}{\models} \{A_2, \Box\} \models \Box$$

Παρατήρηση 1.10.14. *Η συνέπεια $\{\sigma, \sigma \to \tau\} \models \tau$ ισχύει και λέγεται κανόνας Modus Ponens.*

Απόδειξη. Βλέπε Άσκηση 1.10.4. $\Box$

Άσκηση 1.10.5. *Δείξτε ότι* $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\} \models A \wedge B$

Λύση.

- Α΄ Τρόπος: με αληθοπίνακες.
- Β΄ Τρόπος: $\Sigma \models A \Leftrightarrow (\Sigma \cup \{\neg A\} \models \Box)$
- Γ΄ Τρόπος: Με δυαδική επίλυση στο σύνολο $\Sigma \equiv \{\neg B \vee A, \neg \Gamma \vee \Delta, \neg \Delta \vee B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$

Πιο συγκεκριμένα:

Α΄ Τροπος: (με αληθοπίνακες)

A	B	Γ	Δ	$B \to A$	$\Gamma \to \Delta$	$\Delta \to B$	$B \vee \Gamma \vee \Delta$	$A \wedge B$
a	a	a	a	a	a	a	$a^\diamond$	a
a	a	a	ψ	a	ψ	a	a	
a	a	ψ	a	a	a	a	$a^\diamond$	a
a	a	ψ	ψ	a	a	a	$a^\diamond$	a
a	ψ	a	a	a	a	ψ	a	
a	ψ	a	ψ	a	ψ	a	a	
a	ψ	ψ	a	a	a	ψ	a	
a	ψ	ψ	ψ	a	a	a	ψ	
ψ	a	a	a	ψ	a	a	a	
ψ	a	a	ψ	ψ	ψ	a	a	
ψ	a	ψ	a	ψ	a	a	a	
ψ	a	ψ	ψ	ψ	a	a	a	
ψ	ψ	a	a	a	a	ψ	a	
ψ	ψ	a	ψ	a	ψ	a	a	
ψ	ψ	ψ	a	a	a	a	a	
ψ	ψ	ψ	ψ	a	a	a	ψ	

Υπάρχουν μόνο 3 γραμμές του αληθοπίνακα στις οποίες επαληθεύονται **όλες** οι υποθέσεις ($\diamond$). Σε αυτές ακριβώς επαληθεύεται η $A \wedge B$.
Β′ και Γ′ Τροπος:

$$\begin{aligned}
\Sigma &\equiv \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\} \models A \wedge B(?) \Leftrightarrow \\
\Sigma &\equiv \{\neg B \vee A, \neg\Gamma \vee \Delta, \neg\Delta \vee B, B \vee \Gamma \vee \Delta\} \models A(?) \Leftrightarrow \\
\Sigma \cup \{\neg A\} &\equiv \{\neg B \vee A, \neg\Gamma \vee \Delta, \neg\Delta \vee B, B \vee \Gamma \vee \Delta, \neg A\} \models \Box(?)
\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε
$\models \neg B$, (με επίλυση του $A, \neg A$ από πρώτο και τελευταίο παράγοντα)
$\models \Gamma \vee \Delta$, (με επίλυση του παραπάνω $\neg B$ και του B του παράγοντα $B \vee \Gamma \vee \Delta$)
$\models \Delta$, (με επίλυση του Γ και $\neg\Gamma$ απ′ το προηγούμενο και το δεύτερο παράγοντα)
$\models B$, (με επίλυση του Δ και $\neg\Delta$ απ′ τον παραπάνω και τον τρίτο παράγοντα)
$\models \Box$, (με επίλυση του προηγούμενου B και του $\neg B$ που βρήκαμε παραπάνω).

Με όμοιο τρόπο μπορεί να δείξει κάποιος ότι $\Sigma \models B$ άρα τέλος.
Αλλιώς,

$$\begin{aligned}
\Sigma \models \overset{;}{A} \wedge B \quad &\text{αν και μόνο αν} \quad \Sigma \cup \{\neg A \vee \neg B\} \models \Box \\
&\text{αν και μόνο αν} \quad \Sigma \cup \{\neg A \vee \neg B\} \text{ ασυνεπές}
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\underbrace{\neg B \vee A}_{\bullet}, \neg\Gamma \vee \Delta, \neg\Delta \vee B, B \vee \Gamma \vee \Delta, \underbrace{\neg A \vee \neg B}_{\bullet} \models \Box(?)$$

οπότε με επίλυση του A στα $\bullet$ παίρνουμε

$$\underbrace{\neg B}_{\bullet}, \neg\Gamma \vee \Delta, \underbrace{\neg\Delta \vee B}_{\bullet}, B \vee \Gamma \vee \Delta$$

οπότε με επίλυση του B στα $\bullet$ παίρνουμε

$$\{\underbrace{\neg\Gamma \vee \Delta}_{\bullet}, \underbrace{\neg\Delta}_{\bullet}, B \vee \Gamma \vee \Delta$$

και με επίλυση του Δ στα •

$$\{\neg\Gamma, \underbrace{\neg B, \neg\Delta}_{\text{τις είχαμε από πριν}}, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$$

άρα έχουμε ουσιαστικά συμπεράνει τη πρόταση $(\neg B) \wedge (\neg\Delta) \wedge (\neg\Gamma) \wedge (B \vee \Gamma \vee \Delta) \equiv \neg(\underbrace{B \vee \Gamma \vee \Delta}_{\sigma}) \wedge (\underbrace{B \vee \Gamma \vee \Delta}_{\sigma}) \equiv \neg\sigma \wedge \sigma \equiv \Box$.

Σύνοψη των σπουδαιότερων κανόνων για τις συνέπειες:

- Κανόνας απόθεσης: $\{\sigma, \sigma \to \tau\}$ (Modus Ponens)
- Θεώρημα Συμπεράσματος: $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models \sigma_2$ αν και μόνο αν $\Sigma \models (\sigma_1 \to \sigma_2)$
- Ενδιάμεσου αποτελέσματος: Αν $\Sigma \models \sigma'$ τότε ($\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν $\Sigma \cup \{\sigma'\} \models \sigma$)
- Επίλυσης: $\{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$
- Πεπερασμένου Συνόλου:
  Αν $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ τότε ($\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \sigma_n \models \sigma$)
- Ταυτολογίας: Έστω σ_1 ταυτολογία. Τότε ($\Sigma \models \sigma_2$ αν και μόνο αν $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models \sigma_2$)
- Οι ταυτολογίες είναι συνέπειες κάθε συνόλου Σ.

  Παράδειγμα 1.10.15. *Επειδή $\sigma_1 = A \vee \Gamma \vee \Delta \vee \neg A \equiv$ ταυτολογία έχουμε ότι $\Sigma \models \sigma_1$ για κάθε σύνολο Σ.*

- (Με $\Box$ συμβολίζουμε μια οποιαδήποτε αντιλογία)

  $$\Sigma \cup \{\Box\} \models \sigma$$

  για κάθε Σ και πρόταση σ. Επίσης,

  $$\Sigma \models \Box$$

  ανν (Σ είναι **ασυνεπές**) ανν (υπάρχει πεπερασμένο και ασυνεπές $\Sigma' \subseteq \Sigma$.)

- $(\Sigma \models \neg\sigma)$ αν και μόνο αν $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \Box$ αν και μόνο αν $\Sigma \cup \{\sigma\}$ είναι ασυνεπές. Με αντιθετοαντιστροφή έχουμε, $\Sigma \cup \{\sigma\}$ είναι συνεπές αν και μόνο αν $\Sigma \not\models \neg\sigma$

- Διάσπαση :

$$\begin{array}{lc}
\Sigma \models & \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \ldots \sigma_n \\
 & \text{αν και μόνο αν} \\
\Sigma \models & \sigma_1 \text{ και} \\
\Sigma \models & \sigma_2 \text{ και} \\
\Sigma \models & \sigma_3 \text{ και} \\
 & \vdots \\
\Sigma \models & \sigma_n
\end{array}$$

Παράδειγμα 1.10.16. *Υπάρχει περίπτωση Σ και σ ώστε να μην ισχύει κανένα από τα $\Sigma \models \sigma, \Sigma \models \neg\sigma$. Παράδειγμα: $\Sigma = \{A \vee B\}$, $\sigma = A$*

Λύση. $\Sigma \overset{?}{\models} A$ Όχι! Πράγματι ας ορίσουμε $\mathscr{V}(B) = a, \mathscr{V}(\sigma) = \mathscr{V}(A) = \psi \Rightarrow \mathscr{V}(A \vee B) = a$
$\Sigma \overset{?}{\models} \neg A$ Όχι! Πράγματι ας ορίσουμε $\mathscr{V}(A) = a, \mathscr{V}(B) = a$ ή $\psi \Rightarrow \mathscr{V}(A \vee B) = a, \mathscr{V}(\neg A) = \psi$

Άσκηση 1.10.6. *Να δειχθεί ότι η $A \to \Gamma$ είναι συνέπεια του συνόλου υποθέσεων $\Sigma = \{(A \wedge B) \to \Gamma, A \to B\}$.*

$\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models \Box$

Λύση.

$$\begin{aligned}
A \to \Gamma &\equiv \neg A \vee \Gamma \\
(A \wedge B) \to \Gamma &\equiv \neg(A \wedge B) \vee \Gamma \equiv \neg A \vee \neg B \vee \Gamma \\
A \to B &\equiv \neg A \vee B
\end{aligned}$$

Οπότε το Σ αποτελείται από τους παρακάτω παράγοντες

$$\{\neg A \vee \neg B \vee \Gamma, \neg A \vee B\}$$

Με επίλυση του B στους δυο παραπάνω παράγοντες έχουμε ότι $\neg A \vee \Gamma$.

1.11 Σημαντικοί Πίνακες του Beth

Βασικοί Σημαντικοί Πίνακες

1. Άρνηση

$$\begin{array}{c} a\ (\neg\sigma) \\ | \\ \psi\ \sigma \end{array} \qquad \begin{array}{c} \psi\ (\neg\sigma) \\ | \\ a\ \sigma \end{array}$$

2. Σύζευξη

$$\begin{array}{c} a\ (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ | \\ a\ \sigma_1 \\ | \\ a\ \sigma_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \psi\ (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ /\backslash \\ \psi\ \sigma_1 \quad \psi\ \sigma_2 \end{array}$$

3. Διάζευξη

$$\begin{array}{c} a\ (\sigma_1 \vee \sigma_2) \\ /\backslash \\ a\ \sigma_1 \quad a\ \sigma_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \psi\ (\sigma_1 \vee \sigma_2) \\ | \\ \psi\ \sigma_1 \\ | \\ \psi\ \sigma_1 \end{array}$$

4. Μονή Συνεπαγωγή

$$\begin{array}{c} a\ (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \\ /\backslash \\ \psi\ \sigma_1 \quad a\sigma_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \psi\ (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \\ | \\ a\ \sigma_1 \\ | \\ \psi\ \sigma_2 \end{array}$$

5. Διπλή Συνεπαγωγή

$$\begin{array}{c} a\ (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) \\ /\backslash \\ a\ \sigma_1 \quad \psi\ \sigma_1 \\ | \qquad\quad | \\ a\ \sigma_2 \quad \psi\ \sigma_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \psi\ (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) \\ /\backslash \\ \psi\sigma_1 \quad a\sigma_1 \\ | \qquad | \\ a\sigma_2 \quad \psi\sigma_2 \end{array}$$

Παράδειγμα 1.11.1. *Δείξτε ότι η $\sigma = [(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta$ είναι επαληθεύσιμη, αλλά όχι ταυτολογία.*

Λύση. Η παραπάνω πρόταση γίνεται εύκολα επαληθεύσιμη με $\mathscr{V}(\Delta) = a \Rightarrow \mathscr{V}(\sigma) = a$
Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια ερμηνεία που να την κάνει ψέμματα οπότε ξεκινάμε το κτίσιμο ενός σημαντικού πίνακα με κορυφή $\psi\ \sigma$:

$$\begin{array}{c}
\psi\ \sigma \\
| \\
\psi\ (\neg A \wedge B) \to \Gamma \\
| \\
\psi\ \Delta \\
| \\
a\ (\neg A \wedge B) \\
| \\
\psi\ \Gamma \\
| \\
a\ (\neg A) \\
| \\
a\ B \\
| \\
\psi\ A
\end{array}$$

Άρα, οι ζητούμενες ερμηνείες είναι όλες εκείνες για τις οποίες $\mathscr{V}_1(A) = \mathscr{V}_1(\Gamma) = \mathscr{V}_1(\Delta) = \psi, \mathscr{V}_1(B) = a$.

Άσκηση 1.11.1. *Η Άσκηση 1.11.1 με διαφορετικά λόγια: Βρείτε όλες τις ερμηνείες $\mathscr{V}_1$ που διαψεύδουν την σ.*

Ορισμός 1.11.1 (Αντιφατικός κλάδος)**.** *Αντιφατικός κλάδος είναι ο κλάδος που περιέχει μία πρόταση με 2 διαφορετικά πρόσημα (συμβολίζεται με $\otimes$)*

Παράδειγμα 1.11.2 (Αντιφατικού κλάδου)**.**

$$\begin{array}{c}
a\ A \\
| \\
\psi\ A \\
\otimes
\end{array}$$

Άσκηση 1.11.2. *Να βρεθούν όλες οι ερμηνείες $\mathscr{V}$ που επαληθεύουν την* $\sigma = [(\neg A \wedge B) \to \Gamma] \vee \Delta$.

Λύση.

$$
\begin{array}{ccc}
 & a\ \sigma & \\
 & / \quad \backslash & \\
a\ (\neg A \vee B) \to \Gamma & & a\ \Delta \\
/ \quad \backslash & & \uparrow \\
\psi\ (\neg A \vee B) \qquad a\ \Gamma & & \\
| \qquad\qquad \uparrow & & \\
\psi\ (\neg A) & & \\
| & & \\
\psi\ B & & \\
| & & \\
a\ A & & \\
\uparrow & &
\end{array}
$$

Έχουμε 4 μη αντιφατικούς κλάδους($\uparrow$). Άρα υπάρχουν 4 κατηγορίες ερμηνειών που επαληθεύουν την σ.

1^{η} κατηγορία: $\mathscr{V}(\Delta) = a$ (ο δεξιός μη αντιφατικός κλάδος)
2^{η} κατηγορία: $\mathscr{V}(\Gamma) = a$ (ο μεσαίος μη αντιφατικός κλάδος)
3^{η} κατηγορία: $\mathscr{V}(A) = a, \mathscr{V}(B) = \psi$. (ο αριστερός μη αντιφατικός κλάδος)

Άσκηση 1.11.3. *Βρείτε τις περιπτώσεις που η* $\sigma = (A \wedge \neg A) \vee (B \vee (\Gamma \wedge \Delta))$ *επαληθεύεται.*

Λύση.

$$
\begin{array}{ccc}
 & a\ \sigma & \\
 & / \quad \backslash & \\
a\ (A \wedge \neg A) & & a\ (B \vee (\Gamma \wedge \Delta)) \\
| & & / \quad \backslash \\
a\ A & & a\ B \qquad a\ (\Gamma \wedge \Delta) \\
| & & \uparrow \qquad\qquad | \\
a\ (\neg A) & & a\ \Delta \\
| & & | \\
\psi\ A & & a\ \Gamma \\
\otimes & & \uparrow
\end{array}
$$

Έχουμε 2 μη αντιφατικούς κλάδους($\uparrow$). Άρα υπάρχουν 2 κατηγορίες ερμηνειών.

1^{η} κατηγορία: $\mathscr{V}(B) = a$
2^{η} κατηγορία: $\mathscr{V}(\Gamma) = \mathscr{V}(\Delta) = a$

Άσκηση 1.11.4. *Να αποδειχθεί με την μέθοδο των σημαντικών πινάκων ο νόμος Pierce:*

$$\sigma = \psi \ [(A \to B) \to A] \to A$$

Λύση.

$$\begin{array}{ccc}
 & \psi \ \sigma & \\
 & | & \\
 & a \ (A \to B) \to A & \\
 & | & \\
 & \psi \ A & \\
 & / \quad \backslash & \\
\psi \ (A \to B) & & a \ A \\
| & & \otimes \\
a \ A & & \\
| & & \\
\psi \ B & & \\
\otimes & &
\end{array}$$

Μέθοδος Κατασκευής Σημαντικών Πινάκων

- Ξεκινάμε με την κορυφή (του σημαντικού πίνακα) προσημασμένη δηλ. είτε $a \ \sigma$ είτε $\psi \ \sigma$ και προχωράμε επαγωγικά.
- Κάθε κόμβος του πίνακα είναι μια προσημασμένη πρόταση.
- Διαλέγουμε ένα μη αντιφατικό κόμβο του πίνακα και τον αναπτύσσουμε χρησιμοποιώντας τους 10 βασικούς πίνακες. Αφού τον αναπτύξουμε **δεν** τον χρησιμοποιούμε ξανά.
- Έστω λοιπόν X κάποιος κόμβος (**μη** ατομικός). Η ανάπτυξη του X γίνεται με τον παρακάτω τρόπο: Επεκτείνουμε κάθε μη αντιφατικό κλάδο που διέρχεται από το X προσαρτώντας στο τέλος του (δηλ. στα φύλλα των κλάδων από τους οποίους διέρχεται ο X) ένα ατομικό πίνακα με κορυφή X. Το αποτέλεσμα είναι βέβαια ένα μακρύτερο δένδρο.

- Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο, ώσπου κάθε μη αντιφατικός κλάδος να μην περιέχει αχρησιμοποίητους κόμβους. Από τους μη αντιφατικούς κλάδους προκύπτουν ερμηνείες οι οποίες ικανοποιούν δηλ. επαληθεύουν ή διαψεύδουν την κορυφή ανάλογα φυσικά με το πρόσημο που αυτή έχει. Από τους αντιφατικούς κλάδους δεν προκύπτει καμμία ερμηνεία και άρα δεν παίζουν κανένα ρόλο!

Παράδειγμα 1.11.3. *Εξετάστε εάν ισχύει* $\{(A \to B) \to \Gamma, A \wedge \neg B, B \leftrightarrow \Gamma\} \models A \to B$

Λύση. Ξεκινάμε να φτιάξουμε ένα σημαντικό πίνακα με κορυφή το $\psi\ \sigma = A \to B$ και κάτω από αυτήν κρέμονται όλες οι προτάσεις του $\Sigma = \{(A \to B) \to \Gamma, A \wedge \neg B, B \leftrightarrow \Gamma\}$ με πρόσημο α. Εάν βρούμε μη αντιφατικούς κλάδους, τότε η σ δεν είναι συνέπεια του Σ. Εάν όλοι οι κλάδοι είναι αντιφατικοί, τότε είναι πράγματι συνέπεια.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \psi\ (A \to B) & \\
 & a\ (A \to B) \to \Gamma & \\
 & a\ (A \wedge \neg B) & \\
 & a\ (B \leftrightarrow \Gamma) & \\
 & | & \\
 & a\ A & \\
 & \psi\ B & \\
 & / \qquad \backslash & \\
\psi\ (A \to B) & & a\ \Gamma \\
| & & | \\
a\ A & & a\ A \\
\psi\ B\text{(*)} & & \psi\ B\ \text{(*)} \\
/ \quad \backslash & & / \quad \backslash \\
\psi\ B \quad a\ B & & \psi\ B \quad a\ B \\
\psi\ \Gamma \quad a\ \Gamma & & \psi\ \Gamma \quad a\ \Gamma \\
\qquad\quad \otimes & & \otimes \qquad \otimes
\end{array}
$$

Υπάρχει μη αντιφατικός κλάδος άρα η σ δεν είναι συνέπεια. Μερικοί κόμβοι επαναλαμβάνονται στην κατασκευή ξανά όπως π.χ. οι (*) και γι' αυτό το λόγο δεν είναι απαραίτητη να γίνει η ανάπτυξη του κόμβου $a\ (A \wedge \neg B)$.

Παράδειγμα 1.11.4. *Μπορούμε από τον αριστερό μή αντιφατικό κλάδο του παραπάνω δέντρου να κατασκευάσουμε μια ερμηνεία που να διαψεύδει τη* σ *και να επαληθεύει το* Σ*: Ορίζουμε* $\mathscr{V}(B) = \psi$, $\mathscr{V}(A) = a$, $\mathscr{V}(\Gamma) = \psi$.

Παράδειγμα 1.11.5. *Να δειχθεί ότι το σύνολο* $\{A \vee B \vee \Gamma, A \vee B \vee \neg\Gamma, A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \Gamma\}$ *είναι ασυνεπές.*

Λύση.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a\ (A \vee B \vee \Gamma) & & & & \\
 & & & & a\ (A \vee B \vee \neg\Gamma) & & & & \\
 & & & & a\ (A \vee \neg B) & & & & \\
 & & & & a\ (\neg A \vee \neg B) & & & & \\
 & & & & a\ (\neg A \vee \Gamma) & & & & \\
 & / & & & | & & & \backslash & \\
 & a\ A & & & a\ B & & & a\ \Gamma & \\
 / & | & \backslash & / & | & \backslash & / & | & \backslash \\
 a\ A & a\ B & \psi\ \Gamma & a\ A & a\ B & \psi\ \Gamma & a\ A & a\ B & \psi\ \Gamma \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

Παρατήρηση 1.11.6. *Όταν αναπτύξουμε πλήρως (συνεχίζοντας από τα* $\bullet$*) το δένδρο παρατηρούμε ότι στο* 5^o *επίπεδο όλοι οι κλάδοι είναι αντιφατικοί. Αυτό σημαίνει ότι* $\nexists$ $\mathscr{V}$ *που επαληθεύει του 5 πρώτους κόμβους και άρα το* Σ *είναι ασυνεπές.*

Παράδειγμα 1.11.7. *Να εξετασθεί ως προς την συνέπεια το* $\Sigma = \{A \leftrightarrow (B \to \Gamma), A \leftrightarrow B, A \leftrightarrow \neg\Gamma\}$.

Λύση. Ξεκινάμε όπως και στην προηγούμενη άσκηση με α Σ.

$$
\begin{array}{l}
a\ (A \leftrightarrow (B \to \Gamma)) \\
a\ (A \leftrightarrow B) \\
a\ (A \leftrightarrow \neg\Gamma) \\
\quad / \qquad \backslash \\
a\ A \qquad\qquad \psi\ A \\
a\ B \qquad\qquad \psi\ B \\
\ / \ \backslash \qquad\quad / \ \backslash \\
a\ A \quad \psi\ A \qquad a\ A \quad \psi\ A \\
\psi\ \Gamma \quad a\ \Gamma \qquad \psi\ \Gamma \quad a\ \Gamma \\
/ \ \backslash \quad \otimes \qquad\ \otimes \quad / \ \backslash \\
a\ A \qquad \psi\ A \qquad\qquad a\ A \qquad \psi\ A \\
a\ (B \to \Gamma) \quad \psi\ (B \to \Gamma) \qquad a\ (B \to \Gamma) \quad \psi\ (B \to \Gamma) \\
/ \ \backslash \qquad\quad \otimes \qquad\qquad\quad \otimes \qquad\qquad | \\
\psi\ B \quad a\ \Gamma \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a\ B \\
\otimes \quad\ \otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \psi\ \Gamma \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \otimes
\end{array}
$$

Επειδή όλοι οι κλάδοι είναι αντιφατικοί, αυτό σημαίνει ότι **δεν** γίνεται οι προτάσεις του Σ να αληθεύουν συγχρόνως, άρα το Σ είναι ασυνεπές.

1.12 Δυαδική επίλυση

Ορισμός 1.12.1. *Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ όπου όλες οι σ_i είναι διαζεύξεις στοιχειωδών τύπων (Υποθέτουμε δηλ. ότι όλες οι σ_i έχουν γραφεί σε συνολοθεωρητική μορφή). Έστω L άτομο έτσι ώστε υπάρχουν προτάσεις σ_i και σ_j για τις οποίες ισχύει ότι $L \in \sigma_j$ και $(\neg L) \in \sigma_j$, τότε μπορούμε να εξάγουμε σαν συμπέρασμα την πρόταση $\sigma_i \cup \sigma_j \setminus \{L, \neg L\}$. Την πρόταση αυτή τη λέμε επιλύουσα των σ_i, σ_j ως προς L και συμβολίζεται $R_L(\sigma_i, \sigma_j)$.*

Παράδειγμα 1.12.1. *Έστω $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, με*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \neg A \vee \neg \Delta \vee \Gamma \\ \sigma_1 &= \{\neg A, \neg \Delta, \Gamma\}(\textit{σε συνολοθεωρητική μορφή}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= A \vee \neg \Gamma \vee \neg B \\ \sigma_2 &= \{A, \neg \Gamma, \neg B\}(\textit{σε συνολοθεωρητική μορφή}) \end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να κάνουμε επίλυση του A και να πάρουμε την $\sigma_3 = R_A(\sigma_1, \sigma_2) = \{\neg \Delta, \Gamma, \neg \Gamma, \neg B\}$. Προφανώς, η σ_3 είναι μια ταυτολογία.
Με επίλυση του Γ παίρνουμε την $\sigma_4 = R_\Gamma(\sigma_1, \sigma_2) = \{\neg A, A, \neg \Delta, \neg B\} = (\neg A) \vee A \vee \Delta \vee (\neg B)$. Όμοια, η σ_4 είναι ταυτολογία.

Ορισμός 1.12.2. *Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων (σε συνολοθεωρητική μορφή). Τότε η επιλύουσα του Σ είναι το σύνολο $R_\Sigma = \Sigma \cup \{$ όλες οι δυνατές επιλύουσες μεταξύ των προτάσεων του $\Sigma\}$.*

Παράδειγμα:

$$\Sigma = \{\underbrace{\{A, \neg B, \neg \Gamma\}}_{\sigma_1}, \underbrace{\{B, \Delta\}}_{\sigma_2}, \underbrace{\{\neg A, \neg \Delta\}}_{\sigma_3}\}$$

$$\begin{aligned} R(\Sigma) &= \Sigma \cup \{\text{όλες οι δυνατές επιλύουσες μεταξύ των } \sigma_i\} \\ &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cup \{R_B(\sigma_1, \sigma_2), R_A(\sigma_1, \sigma_3), R_\Delta(\sigma_2, \sigma_3)\} \\ &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \underbrace{\{A, \neg \Gamma, \Delta\}}_{\sigma_4}, \underbrace{\{\neg B, \neg \Gamma, \neg \Delta\}}_{\sigma_5}, \underbrace{\{B, \neg A\}}_{\sigma_6}\} \end{aligned}$$

Οπότε,

$$R^2(\Sigma) = R(R(\Sigma)) = R(\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{14}\}$$

όπου για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
R_A(\sigma_3, \sigma_4) &= \underbrace{\{\neg\Delta, \neg\Gamma, \Delta\}}_{\sigma_7} \\
R_A(\sigma_1, \sigma_6) &= \underbrace{\{\neg B, \neg\Gamma, B\}}_{\sigma_7} \\
R_\Delta(\sigma_3, \sigma_4) &= \underbrace{\{\neg A, A, \neg\Gamma\}}_{\sigma_7} \\
R_A(\sigma_3, \sigma_6) &= \underbrace{\{B, \neg\Delta\}}_{\sigma_8} \\
R_B(\sigma_5, \sigma_6) &= \underbrace{\{\neg\Gamma, \neg\Delta, \neg A\}}_{\sigma_9} \\
R_\Delta(\sigma_2, \sigma_5) &= \underbrace{\{B, \neg\Gamma, \neg B\}}_{\sigma_7} \\
R_B(\sigma_2, \sigma_5) &= \underbrace{\{\Delta, \neg\Gamma, \neg\Delta\}}_{\sigma_7} \\
R_\Delta(\sigma_4, \sigma_5) &= \underbrace{\{A, \neg\Gamma, \neg B\}}_{\sigma_1}
\end{aligned}$$

Ορισμός 1.12.3. *Έστω $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ και κάθε $\sigma_i,\ \ i = 1, \dots, n$ είναι ένας στοιχειώδης προγραμματικός τύπος γραμμένος σε συνολοθεωρητική μορφή. Ορίζουμε $R^*(\Sigma) = \Sigma \cup R(\Sigma) \cup R^2(\Sigma) \cup \ldots \cup R^n(\Sigma) \cup \ldots = \cup_{n=0}^{\infty} R^n(\Sigma)$. Δηλαδή, το $R^*(\Sigma)$ περιέχει όλες τις δυνατές επιλύσεις στοιχείων του Σ ή στοιχείων (δηλ. προτάσεων) που ανήκουν σε κάποια από τα $R^L(\Sigma)$.*

Παρατήρηση 1.12.2. *$r \in R^*(\Sigma)$ **αν και μόνο αν** υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $r_1, \dots, r_n$ έτσι ώστε $r_n = r$ και κάθε βήμα r_i είτε ανήκει στο Σ είτε προέκυψε με δυαδική επίλυση(κάποιου ατόμου) από δυο προηγούμενα βήματα r_k, r_j.*

Παράδειγμα 1.12.3. *Δίνεται το $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ με*

$$\sigma_1 \ = \ A \vee \neg B \vee \Gamma = \{A, \neg B, \Gamma\}$$

$$\sigma_2 \;=\; B \vee \Delta \vee E = \{B, \Delta, E\}$$

Να βρεθεί το $R^*(\Sigma)$.

Λύση. Έστω,

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= R_B(\sigma_1, \sigma_2) = \{A, \Gamma, \Delta, E\} \\
R(\Sigma) &= \Sigma \cup \{\text{επιλύουσες (δύο οποιωνδήποτε) προτάσεων } \sigma_i, \sigma_j \text{ του } \Sigma\} \\
&= \Sigma \cup \{R_T(\sigma_i, \sigma_j) : \sigma_i, \sigma_j \in \Sigma \text{ και } T \text{ οποιαδήποτε ατομική πρόταση}\} \\
&= \Sigma \cup \{R_T(\sigma_1, \sigma_2) : T = B\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}
\end{aligned}$$

Επειδή δεν μπορούν να γίνουν άλλες επιλύσεις, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $R^*(\Sigma) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Παράδειγμα 1.12.4.

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{A \vee \neg B \vee \neg\Gamma, B \vee \Delta, \neg A \vee \neg\Delta\} \\
&= \{\{A, \neg B, \neg\Gamma\}, \{B, \Delta\}, \{\neg A, \neg\Delta\}\}
\end{aligned}$$

Να βρεθεί $R^*(\Sigma)$ (= όλες οι δυνατές επιλύσεις)*

Λύση. $R^*(\Sigma) = \underbrace{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cup \{\underbrace{R_B(\sigma_1, \sigma_2)}_{\sigma_4=\{A,\neg\Gamma,\Delta\}}, \underbrace{R_A(\sigma_1, \sigma_3)}_{\sigma_5=\{\neg B,\neg\Gamma,\neg\Delta\}}, \underbrace{R_\Delta(\sigma_2, \sigma_3)}_{\sigma_6=\{B,\neg A\}}\}}_{R_1(\Sigma)} \cup$

$\cup\{\underbrace{R_A(\sigma_1, \sigma_6)}_{\sigma_7=\{\underbrace{\neg B, B}_{\text{ταυτολογία}},\neg\Gamma\}}, \underbrace{R_B(\sigma_1, \sigma_6)}_{\sigma_7=\{\underbrace{A, \neg A}_{\text{ταυτολογία}},\neg\Gamma\}}, \underbrace{R_A(\sigma_4, \sigma_6)}_{\sigma_8}, \underbrace{R_B(\sigma_5, \sigma_6)}_{\sigma_9}\} \cup \ldots$ και ούτο καθ' εξής.

Σχόλιο. Εάν Σ πεπερασμένο τότε το $R^*(\Sigma)$ είναι πεπερασμένο.

Ορισμός 1.12.4. *σ προγραμματικός τύπος και Σ σύνολο προτάσεων γραμμένο σε συνολοθεωρητική μορφή. Θα γράφουμε $\Sigma \models_R \sigma$ (μέθοδος της δυαδικής επίλυσης) αν και μόνο αν $\sigma \in R^*(\Sigma)$*

Σχόλια.

1. Εάν Σ πεπερασμένο και ασυνεπές $\Rightarrow \Sigma \models_R \Box$.

2. Εάν Σ είναι πεπερασμένο και συνεπές $\Rightarrow$ το σύνολο των συνεπειών σ του Σ (μέσω της δυαδικής επίλυσης) είναι πεπερασμένο.

Ορισμός 1.12.5. *Έστω σ μια οποιαδήποτε πρόταση γραμμένη σε Συζευκτική Κανονική Μορφή δηλ. είναι της μορφής $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_k$ όπου κάθε σ_i είναι ένας προγραμματικός τύπος. Θα γράφουμε $\Sigma \models_R \sigma$ αν και μόνο αν*

$$\begin{cases} \Sigma \models_R \sigma_1 \\ \Sigma \models_R \sigma_2 \\ \quad \vdots \\ \Sigma \models_R \sigma_k \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.12.5. *Δείξτε ότι* $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\} \models_R A \wedge B$

$A \wedge B = \{\{A\},\{B\}\}$

Λύση. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $\begin{array}{l} \Sigma \models_R A \\ \Sigma \models_R B \end{array}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= B \to A \equiv \neg B \vee A = \{\neg B, A\} \\
\sigma_2 &= \Gamma \to \Delta \equiv \neg\Gamma \vee \Delta = \{\neg\Gamma, \Delta\} \\
\sigma_3 &= \Delta \to B \equiv \neg\Delta \vee B = \{\neg\Delta, B\} \\
\sigma_4 &= B \vee \Gamma \vee \Delta = \{B, \Gamma, \Delta\} \\
\sigma_5 &= R_B(\sigma_1, \sigma_3) = \{A, \neg\Delta\} \in R^1(\Sigma) \\
\sigma_6 &= R_\Delta(\underbrace{\sigma_2}_{\in\Sigma}, \underbrace{\sigma_5}_{\in R^1}) = \{A, \neg\Gamma\} \in R^2(\Sigma) \\
\sigma_7 &= R_\Gamma(\sigma_4, \sigma_6) = \{A, B, \Delta\} \in R^3(\Sigma) \\
\sigma_8 &= R_B(\sigma_7, \sigma_1) = \{A, \Delta\} \in R^4(\Sigma) \\
\sigma_9 &= R_\Delta(\sigma_5, \sigma_8) = \{A\} \in R^5(\Sigma) \\
\sigma_{10} &= R_\Delta(\sigma_3, \sigma_4) = \{B, \Gamma\} \in R^1(\Sigma) \\
\sigma_{11} &= R_\Gamma(\sigma_2, \sigma_{10}) = \{B, \Delta\} \in R^2(\Sigma) \\
\sigma_{12} &= R_\Delta(\sigma_3, \sigma_{11}) = \{B\} \in R^3(\Sigma)
\end{aligned}$$

Άρα από σ_9 και σ_{12} έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο. Ισχύει το αντίστοιχο του Θεωρήματος του Συμπεράσματος που μάθαμε για την μέθοδο της δυαδικής επίλυσης: $(\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models_R \sigma_2)$ αν και μόνο αν $(\Sigma \models_R \sigma_1 \to \sigma_2)$

Σχόλιο. Εάν κάποια υπόθεση $r \in \Sigma$ είναι γραμμένη σε Συζευκτική Κανονική Μορφή, έστω $r = r_1 \wedge r_2 \wedge \ldots \wedge r_k$, τότε όταν έρχεται η στιγμή να γράψουμε το Σ σε συνολοθεωρητική μορφή τότε βάζουμε στο Σ όχι το r αλλά τις $r_1, r_2, \ldots, r_k$ γραμμένες σε συνολοθεωρητική μορφή.

Παράδειγμα 1.12.6. $r \in \Sigma$ *και* $r = A \leftrightarrow B$

Λύση. Για να γράψουμε το Σ σε συνολοθεωρητική μορφή $r \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, A\}\}$.
$\Sigma = \{\ldots, \{\neg A, B\}, \{B, \neg A\}, \ldots\}$
Σχόλιο. Ότι θεωρήματα γνωρίζουμε για το $\models$, τα ίδια ισχύουν και για $\models_R$ και για $\models_B$(αυτό είναι μέρος από το θεώρημα πληρότητος και ορθότητος). Υπενθυμίζουμε εδώ και τον ορισμό του $\Sigma \models_B \sigma$ δηλ. της απόδειξης του σ χρησιμοποιώντας τους σημαντικούς πίνακες του Beth: Ξεκινάμε με κορυφή $\psi\ \sigma$ και κρεμάμε όλους τις προτάσεις-υποθέσεις $r_1, \ldots, r_k$ με πρόσημο α. Αν προκύψει δέντρο με όλους τους κλάδους αντιφατικούς τότε πράγματι η σ είναι συνέπεια του $\Sigma = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$:

$$\Sigma \models_B \sigma \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \psi\ \sigma \\ a\ r_1 \\ a\ r_2 \\ \vdots \\ a\ r_k \\ \otimes\ \otimes\ \otimes\ \otimes \end{array} \right.$$

Παρατήρηση 1.12.7.

$$\Sigma \models \sigma \textit{ αν και μόνο αν } \Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models \square$$

$$\Sigma \models_B \sigma \textit{ αν και μόνο αν } \Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models_B \square$$

$$\Sigma \models_R \sigma \textit{ αν και μόνο αν } \Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models_R \square$$

Ερώτημα: Είναι τα παρακάτω έννοιες της συνέπειας ισοδύναμες;

- $\Sigma \models \sigma$ (με ορισμό, δηλαδή με αληθοπίνακες)
- $\Sigma \models_B \sigma$ (με σημαντικούς πίνακες του Beth)
- $\Sigma \models_R \sigma$ (δυαδική επίλυση)
- $\Sigma \vdash_{\mathbb{A}} \sigma$ (αξιωματική μέθοδος) (θα την δούμε σε λίγο)

Θεώρημα 1.12.8 (Πληρότητας)**.** *Εάν το σ είναι συνέπεια του Σ μέσω του ορισμού τότε είναι το σ συνέπεια του Σ και με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο. Δηλαδή*

$$\Sigma \models \sigma \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \models_B \sigma \\ \Sigma \models_R \sigma \\ \Sigma \vdash_{\mathbb{A}} \sigma \end{cases}$$

Θεώρημα 1.12.9 (Ορθότητας)**.** *Εάν το σ είναι συνέπεια του Σ χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε αποδεικτική μέθοδο απ' αυτές που έχουν βρεθεί τότε στα σίγουρα το σ είναι όντως συνέπεια του Σ (δηλαδή με βάση τον ορισμό).*

1.13 Αξιωματική μέθοδος αποδείξεων

Αξιωματα

Επιλέγουμε κάποιες αληθινές προτάσεις που (εμείς τις θεωρούμε σημαντικές και ανεξάρτητες μεταξύ τους και) τις βαπτίζουμε «*αξιώματα*». Για χάρη απλότητας θα χρησιμοποιήσουμε εδώ αξιώματα που περιέχουν μονο την $\neg$ και την $\rightarrow$.

- $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)$
- $(\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \phi))$
- $(\neg\sigma \rightarrow \neg\tau) \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)$

Επίσης για την παραγωγή νέων προτάσεων από τις ήδη χρησιμοποιούμε και κάποιους κανόνες. Στο παράδειγμα αξιωματικού συστήματος $\mathbb{A}$ που κατασκευάζομαι εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο ένα κανόνα, τον Modus Ponens, που λέει πολύ απλά ότι αν έχουν ήδη αποδειχθεί οι προτάσεις σ και $\sigma \rightarrow \tau$ σε παλαιότερα βήματα τότε μπορούμε να πάρουμε στο τρέχων βήμα και τη (νέα) πρόταση τ.

Κανόνες

Modus Ponens (Κανόνας της Απόθεσης)

$$\underbrace{\sigma, \sigma \rightarrow \tau}_{\tau}$$

Ορισμός 1.13.1. *Ένα αξιωματικό σύστημα $\mathbb{A}$ είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο από αξιώματα και κανόνες.*

Ορισμός 1.13.2. *Έστω $\mathbb{A}$ ένα οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα (π.χ. αυτό που ορίσαμε στο προηγουμένως). Θα γράφουμε ότι $\Sigma \vdash_{\mathbb{A}} \sigma$ αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n = \sigma$ και κάθε σ_i είναι είτε αξίωμα του $\mathbb{A}$ είτε ανήκει στις υποθέσεις στο Σ, είτε προέρχεται με εφαρμογή των κανόνων του $\mathbb{A}$ (στην περίπτωση μας του Modus Ponens) πάνω σε (δύο ή και περισσότερα) προηγούμενα βήματα από το σ_i.*

Παράδειγμα 1.13.1. *Δείξτε ότι $\emptyset \vdash_{\mathbb{A}} (A \to A)$, δηλαδή να αποδειχθεί η πρόταση $(A \to A)$ από το αξιωματικό σύστημα που ορίσθηκε παραπάνω.*

$\emptyset \vdash_{\mathbb{A}} A \to A$, δηλαδή το $A \to A$ είναι μια συνέπεια που δεν απαιτεί καμία επιπλέον υπόθεση για να αποδειχθεί εκτός βέβαια από το $\mathbb{A}$. Έτσι η $A \to A$ θεωρείται μια ταυτολογία(ένας νόμος) στα πλαίσια του παραπάνω $\mathbb{A}$. Γράφουμε απλά $\vdash_{\mathbb{A}} A \to A$ αντί $\emptyset \vdash_{\mathbb{A}} A \to A$.

Λύση.
Περίπτωση του Αξιώματος 1 :

$$\Big(A \to ((B \to A) \to A)\Big)$$

Περίπτωση του Αξιώματος 2 :

$$\Big(\underbrace{A}_{\sigma} \to ((\underbrace{B \to A}_{\tau}) \to \underbrace{A}_{\phi})\Big) \to \Big[(A \to (B \to A)) \to (A \to A)\Big]$$

Modus Ponens: $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$
Περίπτωση του Αξιώματος 1 : $A \to (B \to A)$
Modus Ponens των δυο παραπάνω: $A \to A$
Σχόλιο.

1. $A \vee \neg A \equiv A \to A$

2. Εάν χρειαστεί να αποδείξουμε μία πρόταση σ από το $\mathbb{A}$ τότε επειδή το παραπάνω $\mathbb{A}$ δεν περιέχει άλλους συνδέσμους εκτός από το $\neg$ και $\to$ θα πρέπει να βρούμε μια ισοδύναμη πρόταση της σ έτσι ώστε να περιέχει **μόνο** αυτούς τους συνδέσμους.

Άσκηση 1.13.1. *Δείξτε το νόμο του Pierce $((A \to B) \to A) \to A$ ή με άλλα λόγια δείξτε ότι $\vdash_{\mathbb{A}}$ Pierce*

Άσκηση 1.13.2. *Δείξτε τον κανόνα De Morgan.*

Υπόδειξη:

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \equiv \underbrace{\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}_{①} \wedge \underbrace{\neg(A \vee B) \leftarrow (\neg A \wedge \neg B)}_{②}$$

Το ① είναι ισοδύναμο με το ①′ : $\emptyset \vdash_{\mathbb{A}} \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$ και αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε το $A \rightarrow A$ παραπάνω.
Το ② είναι ισοδύναμο με το ②′: ...

Παράδειγμα 1.13.2. *Δείξτε ότι $\{A\} \vdash_{\mathbb{A}} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$*

Λύση.

$$\begin{aligned} \Sigma = \{A\} \quad \vdash_{\mathbb{A}} \quad & r_1 = A(\text{Διότι} \;\; A \in \Sigma) \\ & r_2 = (A \rightarrow B) \rightarrow A(\text{Αξίωμα 1}) \\ & r_3 = B \rightarrow A(\text{Modus Ponens των}(r_1, r_2)) \\ & r_4 = (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))(\text{Αξίωμα 1}) \\ & r_5 = \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)(\text{Modus Ponens των}(r_3, r_4)) \end{aligned}$$

Σχόλιο. Συμβολίζουμε με $\vdash_{\mathbb{A}}$ τη συνέπεια ($\models$) με χρήση κάποιας αξιωματικής μεθόδου με αξιωματικό σύνολο ένα σύνολο $\mathbb{A}$.

49

Μέρος ΙΙ

Λογική των Κατηγορημάτων (ή Α΄-βάθμια Λογική)

Πρωτοβάθμιες γλώσσες

2.1 Σημασιολογική προσέγγιση

Τι κοινό έχουν όλες οι παρακάτω προτάσεις;

1. «Ο Πέτρος είναι θνητός»
2. «Ο Νίκος είναι θνητός»
3. «Ο οποιοσδήποτε *άνθρωπος* είναι *θνητός*»

Πίσω από όλες αυτές κρύβονται οι ίδιες ιδιότητες άνθρωπος(X) και θνητός(X). Μια γενίκευση των παραπάνω προτάσεων στην Α΄-βάθμια Λογική είναι η πρόταση:

$$(\forall X)(\text{άνθρωπος}(X) \rightarrow \text{θνητός}(X))$$

Σύμβαση: Στην Λογική των Κατηγορημάτων κάθε λέξη που ξεκινά με κεφαλαίο γράμμα θεωρείται ως μια **μεταβλητή**. Κάθε λέξη που ξεκινάει με μικρό γράμμα και περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές θεωρείται ένα **κατηγόρημα**. Κάθε λέξη που ξεκινάει με μικρό γράμμα αλλά δεν έχει μεταβλητές θεωρείται μια **σταθερά**.

Παράδειγμα 2.1.1. *σταθερά: αθήνα, ενώ μεταβλητή: Αθήνα*

Ποσοδείκτες:

$$\begin{aligned} \forall X &= \text{για κάθε τιμή της μεταβλητής.} \\ \exists X &= \text{υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή στη μεταβλητή} X' etsi' wste \ldots \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.2. *Υπάρχει πτήση της Ολυμπιακής Αεροπορίας από οποιαδήποτε μεγάλη πόλη της Ελλάδος προς την Αθήνα.*

Λύση. Έστω X = εταιρία, Y = τόπος αναχώρησης και Z = τόπος άφιξης. Θεωρούμε τα κατηγορήματα πτήση(X, Y, Z), μεγάλος(X, Y) ή μεγαλούπολη(X, Y), πόλη(X)
$(\forall X)(\text{πόλη}(X, \text{ελλάδα}) \wedge \text{μεγάλος}(X, \text{ελλάδα}) \rightarrow \text{πτήση}(\text{ολυμπιακή}, X, \text{αθήνα}))$
Εδώ χρησιμοποιήσαμε τα $\left.\begin{array}{l}\text{κατηγορήματα: πόλη, μεγάλος, πτήση}\\ \text{σταθερές: ελλάδα, αθήνα, ολυμπιακή}\end{array}\right\}$ *μια Γλώσσα.*

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική *Γλώσσα:*

$$\begin{array}{ll}\text{Κατηγορήματα:} & \text{μεγάληπόλητηςΕλλάδος}(X)\\ & \text{πτήσηΟλυμπιακήςπροςτηνΑθήνα}(X)\end{array}$$

οπότε θα είχαμε και διαφορετική περιγραφή:

$$(\forall X)(\text{μεγάληπόλητηςΕλλάδος}(X) \rightarrow \text{πτήσηΟλυμπιακήςπροςτηνΑθήνα}(X))$$

Συμβάσεις: Με $x > 0$ θα εννοούμε φυσικά $>(x, 0)$. Το κατηγόρημα $=$ της ισότητας είναι ένα διμελές κατηγόρημα το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ενσωματωμένο μέσα σε κάθε γλώσσα της Λογικής των Κατηγορημάτων.

Παράδειγμα 2.1.3. *Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει η τετραγωνική του ρίζα. Φτιάξτε κατάλληλη γλώσσα του Κατηγορηματικού Λογισμού που εκφράζει την παραπάνω πρόταση.*

Λύση. Μπορούμε για την περίπτωσή μας να κατασκευάσουμε την *Γλώσσα:*
Κατηγορήματα: θετικόςαριθμός(X), τετραγωνικήρίζα(X, Y)

$$(\forall X)(\text{θετικόςαριθμός}(X) \rightarrow (\exists Y)\text{τετραγωνικήρίζα}(X, Y))$$

αλλιώς:
Γλώσσα: $\mathscr{L} = \{0, >, \sqrt[2]{\cdot}\}$ όπου

$$\begin{array}{cll} 0 & : & \text{σύμβολο σταθεράς}\\ > & : & \text{'αυστηρά μεγαλύτερο του', 2μελές κατηγόρημα.}\\ \sqrt[2]{\cdot} & : & \text{σύμβολο συνάρτησης}\end{array}$$

$$(\forall X)(X > 0 \rightarrow (\exists Y)\sqrt[2]{X} = Y)$$

Ορισμός 2.1.1. *Μια γλώσσα $\mathscr{L}$ της Λογικής των Κατηγορημάτων είναι ένα σύνολο που αποτελείται από Λογικά και Ειδικά σύμβολα:*

1. *Λογικά σύμβολα*

   (α') *Μεταβλητές* $X, Y, Z, X_1, \ldots$

   (β') *Λογικούς Συνδέσμους* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

   (γ') *Παρενθέσεις, Κόμματα, ..., Σημεία στίξης*

   (δ') *Ποσοδείκτες* $\forall, \exists$

   (ε') *Το σύμβολο της ισότητας* $=$

2. *Ειδικά σύμβολα*

   (α') $p, q, r, \ldots$ *σύμβολα κατηγορημάτων*

   (β') $f, g, h, f_0, \ldots$ *σύμβολα συναρτήσεων*

   (γ') $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *σύμβολα σταθερών*

Σε κάθε γλώσσα της Λογικής των Κατηγορημάτων υπάρχουν οπωσδήποτε τα παραπάνω λογικά σύμβολα, ενώ τα ειδικά σύμβολα υπάρχουν ανάλογα με τις ανάγκες μας, άλλοτε είναι λιγότερα και άλλοτε περισσότερα. Δηλ. αν η ανάγκη το απαιτεί, π.χ. να κατασκευάσουμε μια γλώσσα για την Ανάλυση, η γλώσσα που θα κατασκευαστεί θα περιέχει σύμβολα από κάθε κατηγορία Ειδικών Συμβόλων (π.χ. πολλά σύμβολα συναρτήσεων για να καλύψουμε τις πολλές συναρτήσεις που έχουμε στην Ανάλυση: ένα σύμβολο συνάρτησης για κάθε συνάρτηση που μελετάμε.)

Παράδειγμα 2.1.4. *Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών* $\mathscr{L}_A = \{\leq, \cdot, +, 0, 1\}$.

$\leq$: *σύμβολο κατηγορήματος* (***σύμβαση:*** *αντί* $\leq(3,5)$ *γράφουμε* $3 \leq 5$)
$+$: *διθέσιο σύμβολο συνάρτησης*
$\cdot$: *διθέσιο σύμβολο συνάρτησης*
0 : *σύμβολο σταθεράς*
1 : *σύμβολο σταθεράς*

Παράδειγμα 2.1.5. *Υπάρχει κάποιος αριθμός μεγαλύτερος απ' όλους τους άλλους*

Λύση.

$$(\exists X)(\forall Y)[Y < X]$$

ή καλύτερα

$$(\exists X)(\forall Y)(Y \leq X \wedge \neg(Y = X))$$

και με διαφορετικό τρόπο

$$(\exists X)(\forall Y)(\exists Z)(0 \leq Z \wedge Z \neq 0 \wedge Y + Z \leq X)$$

Σχόλιο. $Z \neq 0$, εννοούμε πάντα $\neg(Z = 0)$.
Σχόλιο. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απλοποιημένη γλώσσα $\mathscr{L}_{A'} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ οπότε το μικρότερο ή ίσο $\leq$ θα μπορούσαμε κάπως να το ορίσουμε σε τούτη την γλώσσα ως

$$X \leq Y \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} (\exists Z)(X + Z = Y)$$

Παράδειγμα: Αντί $0 \leq 1$ μπορούμε να γράψουμε στην παραπάνω γλώσσα $(\exists Z)(Z = 1 \wedge 0 + Z = 1)$.

Παράδειγμα 2.1.6. *Γλώσσα Θεωρίας Συνόλων* $\mathscr{L}_{\Theta.\Sigma.} = \{\emptyset, \in\}$

όπου

$$\begin{aligned} \emptyset &: \text{σύμβολο σταθεράς} \\ \in &: \text{διμελές σύμβολο κατηγορήματος} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.7. $X \subseteq Y$ *αν και μόνο αν* $(\forall Z)(Z \in X \rightarrow Z \in Y)$

Παράδειγμα 2.1.8. $W = \{\emptyset\}$ *αν και μόνο αν* $(\forall Z)(Z \in W \leftrightarrow Z = \emptyset)$

Άσκηση 2.1.1. *Να κατασκευάσετε μια γλώσσα για την Ευκλείδια Γεωμετρία ώστε να περιγράφεται σ' αυτήν η πρόταση: Υπάρχει τουλάχιστον ένα **σημείο** που δεν **ανήκει** σε δοσμένη **ευθεία**.*

Λύση. Μια γλώσσα κατάλληλη θα ήταν η

$$\mathscr{L}_{\text{Ε.Γ.}} = \{\text{σημείο}(\cdot), \text{ανήκει}(\cdot,\cdot), \text{ευθεία}(\cdot), \text{παράλληλο}(\cdot,\cdot), \ldots\}$$

όπου όλα τα προηγούμενα είναι όλα σύμβολα κατηγορημάτων. Οπότε θα γράφαμε

$$(\forall Y)(\exists X)[\text{ευθεία}(Y) \rightarrow \text{σημείο}(X) \wedge \neg\text{ανήκει}(X, Y)]$$

Άσκηση 2.1.2. *Ευκλείδιας Γεωμετρίας: Από κάθε 2 διαφορετικά σημεία διέρχεται μία ευθεία.*

Λύση. $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)$
$\underbrace{[\text{σημείο}(X) \wedge \text{σημείο}(Y) \wedge (X \neq Y) \to \text{ευθεία}(Z) \wedge \text{ανήκει}(X, Z) \wedge \text{ανήκει}(Y, Z)]}_{\sigma(X,Y,Z)}.$

Άσκηση 2.1.3. *Ευκλείδιας Γεωμετρίας: Από κάθε 2 διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.*

Λύση. $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)\Big[\sigma(X, Y, Z) \wedge (\forall P)(\sigma(X, Y, P) \to P = Z)\Big].$

Σχόλιο. Όταν γράφουμε $(\exists! Z)\phi(Z)$ θα εννοούμε πάντοτε τον παρακάτω τύπο:

$$[(\exists Z)\phi(Z)] \wedge (\forall Z_1)(\forall Z_2)(\phi(Z_1) \wedge \phi(Z_2) \to (Z_1 = Z_2))$$

Άρα το $\exists! Z$ περιγράφεται στα ελληνικά με την έκφραση: *υπάρχει μοναδικό* Z.

Παράδειγμα 2.1.9. *Ευκλείδιας Γεωμετρίας: Υπάρχει μοναδική ευθεία ϵ' που διέρχεται από ένα σημείο Σ' εκτός ευθείας ϵ έτσι ώστε $\epsilon \parallel \epsilon'$*

Λύση.

$$(\forall E)(\forall \Sigma')[\text{ευθεία}(E) \wedge \text{σημείο}(\Sigma') \wedge \neg\text{ανήκει}(\Sigma', E) \to$$

$$\to (\exists! E')(\text{ανήκει}(\Sigma', E') \wedge \text{παράλληλο}(E, E'))]$$

Σχόλιο. Συχνά γίνεται ένα (κλασικό) λάθος όταν προσπαθούμε να περιγράψουμε με ένα τύπο της γλώσσας της Ευκλείδιας Γεωμετρίας ότι έχουμε δυο διαφορετικά σημεία του επιπέδου:
σημείο$(X) \neq$ σημείο(Y) δηλαδή $\neg$(σημείο$(X) =$ σημείο(Y)), δηλαδή
$\neg\Big(= (\text{σημείο}(X), \text{σημείο}(Y))\Big)$
Ο **σωστός** τύπος είναι ο:
$(X \neq Y) \wedge \text{σημείο}(X) \wedge \text{σημείο}(Y)$.

Οι κανόνες του συντακτικού (δείτε και ορισμό του τύπου παρακάτω) μας επιβάλουν κάποιους περιορισμούς όπως

- Δεν μπορούμε να βάλουμε μέσα σε σύμβολα κατηγορήματος (π.χ. $=$) άλλα σύμβολα κατηγορήματος(π.χ. σημείο(X»

- Μετά από $\forall$ ή $\exists$ ή $\exists!$ μπαίνει μόνο μία μεταβλητή. Τα παρακάτω είναι **λάθος**:
  $\exists$σημείο(X), $\exists$αριθμός(X)

Ορισμός 2.1.2 (Όρος). *Έστω $\mathscr{L}$ μια γλώσσα της Λογικής των Κατηγορημάτων. Τότε ένας **όρος** είναι:*

1. *Ένα οποιοδήποτε σύμβολο σταθεράς $c \in \mathscr{L}$*
2. *Μια οποιαδήποτε μεταβλητή*
3. *Ένα οποιοδήποτε σύμβολο συνάρτησης F που τις θέσεις του έχουν καταλάβει ήδη κατασκευασμένοι όροι*

*Όρος είναι **μόνο** ένα από τα (1), (2), (3).*

Ορισμός 2.1.3 (Τύπος). *Άτομο ή ατομικός τύπος για την γλώσσα $\mathscr{L}$ ονομάζουμε κάθε κατηγόρημα $p \in \mathscr{L}$ που τις θέσεις του έχουν καταλάβει **όροι** της $\mathscr{L}$.*

Παράδειγμα 2.1.10. $\mathscr{L}_A = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$

Λύση. **Όροι** της $\mathscr{L}_A$ είναι οι $0, 1, X, Y, X^2$(δηλαδή ο $X \cdot X$), $XY, (X^2 + Y^2) + (2X) + (5)$. Ο τελευταίος είναι πράγματι ένας όρος αν βέβαια δεχτούμε κάποιες συμβάσεις όπως για παράδειγμα 2=1+1=+(1,1) και

$$5 \;=\; +\Big(+ \Big(+ (+ (1,1),1),1\Big),1\Big)$$

που συμφωνούμε να τον γράφουμε πιο απλά ως

$$5 \;=\; 1 + \Big(1 + (1 + (1 + 1))\Big)$$

Όπως θα έχετε ήδη υποψιαστεί οι όροι της $\mathscr{L}_A$ είναι τα γνωστά μας πολυώνυμα.

Παράδειγμα 2.1.11. *Παραδείγματα ατομικών τύπων στην $\mathscr{L}_A : t_1 \leq t_2, t_2 = t_4$, όπου t_1, t_2, t_3, t_4 είναι πολυώνυμα με συντελεστές από το $\mathbb{Z}$. Π.χ. $X \leq Y$. ΔΕΝ είναι ατομικός τύπος ο : $X < Y$ διότι αυτός είναι ορισμένος με χρήση 2 κατηγορημάτων και 2 συνδέσμων: $(X \leq Y) \wedge \neg(X = Y)$*

Ορισμός 2.1.4 (Σύνθετος τύπος)**.**

1. *Κάθε ατομικός τύπος της $\mathscr{L}$ είναι ένας τύπος*

2. *Έστω σ_1, σ_2 είναι δύο τύποι της $\mathscr{L}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε νέους τύπους*

    - *χρησιμοποιώντας συνδέσμους*
      π.χ.: $(\neg\sigma_1), (\neg\sigma_2), (\sigma_1 \wedge \sigma_2), (\sigma_1 \vee \sigma_2), (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ *και* $(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$

    - *χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες*
      π.χ.: $((\forall X)\sigma_1), ((\forall X)\sigma_2), ((\exists X)\sigma_1), ((\exists X)\sigma_2)$, *όπου* X, Y *οποιεσδήποτε μεταβλητές.*

3. *Τύποι είναι μόνο οι ακολουθίες συμβόλων που ικανοποιούν τους παραπάνω κανόνες.*

Παράδειγμα 2.1.12. $(\forall X, Y)[f(Y) > p(Z) \rightarrow q(Y)]$ *όπου*

f	*είναι σύμβολο συνάρτησης*
$>$	*είναι σύμβολα κατηγορήματος*
p, q	*είναι σύμβολο κατηγορημάτων*

Η παραπάνω έκφραση δεν είναι τύπος διότι μέσα σε ένα σύμβολο κατηγορήματος ($>$) βάλαμε ένα άλλο ($p(Z)$).

Παράδειγμα 2.1.13. *Η παρακάτω έκφραση δεν είναι τύπος:*
$(\forall \textit{άνθρωπος}(Z))[\textit{ηλικία}(Z) > 120 \rightarrow \textit{νεκρός}(Z)]$
*Η παρακάτω όμως έκφραση είναι **τύπος**:*
$(\forall Z)\Big([\textit{άνθρωπος}(Z) \wedge \textit{ηλικία}(Z) > 120] \rightarrow \textit{νεκρός}(Z)\Big)$

Άσκηση 2.1.4. *'Ο Γιάννης αγαπάει το φαγητό.'*
'Το μήλο είναι φαγητό.'
'Το κοτόπουλο είναι φαγητό.'
'Οτιδήποτε τρώγεται χωρίς να προκαλεί θάνατο είναι φαγητό.'
'Η Μαρία τρώει ο,τι τρώει και ο Χρήστος.'
Φτιάξτε μια γλώσσα με σταθερές, συναρτήσεις και κατηγορήματα και εκφράστε τις παραπάνω προτάσεις.

Λύση.

$$\textit{Γλώσσα:}\quad \begin{array}{rl} \text{κατηγορήματα:} & \text{αγαπάει}(X,Y), \text{φαγητό}(X), \text{τρώει}(X,Y), \text{νεκρός}(X) \\ \text{σταθερές:} & \text{γιάννης, μαρία, χρήστος, μήλο, κοτόπουλο} \end{array}$$

Οι ζητούμενοι τύποι είναι οι
$(\forall X)(\text{φαγητό}(X) \to \text{αγαπάει}(\text{γιάννης}, Y))$,
φαγητό(μήλο),
φαγητό(κοτόπουλο),
$(\forall X)(\forall Y)\Big(\text{τρώει}(X,Y) \wedge \neg(\text{νεκρός}(X)) \to \text{φαγητό}(X)\Big)$
και τέλος
$(\forall X)(\text{τρώει}(\text{χρήστος}, Y) \to \text{τρώει}(\text{μαρία}, X))$
Σχόλιο. Στην PROLOG κάθε τύπος αποτελείται μόνο από ατομικούς τύπους που έχουν 'συνδεθεί' με κάποιους από τους συνδέσμους. Δεν εμφανίζονται καθόλου ποσοδείκτες!
Σχόλιο. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τύπο $(\forall X)\sigma$ με τον σ με την προϋπόθεση βέβαια ότι ο $(\forall X)\sigma$ δεν είναι *υποτύπος* κάποιου άλλου τύπου.

Ορισμός 2.1.5. *Μια εμφάνιση της μεταβλητής X μέσα σε ένα οποιοδήποτε υποτύπο σ του r της μορφής $\sigma = (\forall X)\phi$ ή $\sigma = (\exists X)\phi$ λέγεται **δεσμευμένη εμφάνιση** της X στην r.*

Ορισμός 2.1.6. *Μια **εμφάνιση** της μεταβλητής X λέγεται **ελεύθερη εμφάνιση** εάν η συγκεκριμένη εμφάνιση δεν είναι **δεσμευμένη**.*

Παράδειγμα 2.1.14. $r = [\underbrace{(\forall X)p(X,Y)}_{\sigma_1}] \to [\underbrace{(\forall Z)q(Z,X)}_{\sigma_2}]$, *$p, q$ σύμβολα κατηγορημάτων.*

Λύση. Έχουμε, 3 εμφανίσεις της X (δεσμευμένη, δεσμευμένη, ελεύθερη), 1 εμφάνιση της Y (ελεύθερη) και 2 εμφανίσεις της Z (δεσμευμένη, δεσμευμένη).

Ορισμός 2.1.7. *Μια μεταβλητή X που εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε ένα τύπο r καλείται **ελεύθερη** αν μπορούμε να βρούμε μια ελεύθερη εμφάνιση της X μέσα στον r.*

Ορισμός 2.1.8. *Μια μεταβλητή X λέγεται **δεσμευμένη** στον τύπο r αν και μόνο αν δεν είναι **ελεύθερη** στον r.*

Ορισμός 2.1.9. *Ένας τύπος χωρίς **ελεύθερες μεταβλητές** λέγεται **πρόταση**.*

Παράδειγμα 2.1.15. *Ο τύπος που ακολουθεί δεν είναι πρόταση:*
$(\exists X)(\exists Y)[\textit{δάσκαλος}(X,Y) \wedge \textit{διδάσκει}(X,Y,Z)]$
Το ακόλουθο είναι πρόταση:
$(\exists X)(\exists Y)(\exists Z)[\textit{δάσκαλος}(X,Y) \wedge \textit{διδάσκει}(X,Y,Z)]$

Σχόλιο. Όπως θα δούμε αργότερα, η 'αλήθεια'(δηλ. η ερμηνεία) μίας πρότασης δεν εξαρτάται από τις τιμές που πιθανόν να πάρουν κάποιες μεταβλητές της. Αντίθετα εάν $\tau(X)$ είναι ένας τύπος στον οποίο η μεταβλητή X είναι ελεύθερη, τότε η 'αλήθεια' του $\tau(X)$ εξαρτάται προφανώς από την τιμή που θα πάρει το X (μέσα σε κάποια ερμηνεία).

Παράδειγμα 2.1.16. $(\forall X)(X > Y)$*: η 'αλήθεια' του τύπου εξαρτάται από το* Y.
$(\forall X)(\forall Y)(Y < X)$
$(\forall X)(\forall Y)(Y = X)$
η 'αλήθεια' των δύο παραπάνω προτάσεων δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτές.

Ορισμός 2.1.10. *Έστω* $\mathscr{L}$ *μια γλώσσα της Λογικής των Κατηγορημάτων και θέλουμε να ερμηνεύσουμε τους τύπους της* $\mathscr{L}$. *Μια ερμηνεία ή δομή ή μοντέλο* $\mathscr{V}$ *της* $\mathscr{L}$ *αποτελείται από:*

1. *Ένα μη κενό σύνολο* $V \neq \emptyset$ *που λέγεται* ***σύμπαν*** *της ερμηνείας και συμβολίζεται με το* $|\mathscr{V}|$.
   Σχόλιο. *Σ' αυτό το σύνολο θα δούμε αργότερα ότι παίρνουν* ***τιμές*** *οι όροι της* $\mathscr{L}$.

2. *Για κάθε σύμβολο σταθεράς* $c \in \mathscr{L}$, *υπάρχει μοναδικό στοιχείο του* V *που αντιστοιχεί στο* c *και συμβολίζεται* $\epsilon_{\mathscr{V}}(c)$ *(ερμηνεία του* c*) είτε πιο απλά* $\epsilon(c) \in V$.

   Παράδειγμα 2.1.17. *Άλλο το μήλο (ένα σύμβολο σταθεράς σε μια γλώσσα που αναφέρεται στις τροφές) και άλλο το* $\epsilon(\textit{μήλο})$ *δηλ. ένα πραγματικό μήλο σε κάποια ερμηνεία(που μπορεί να είναι για παράδειγμα το supermarket της γειτονιάς μας!).*

$\mathscr{L}$	$\mathscr{V}$
c	$\epsilon(c) \in V$

3. *Για κάθε* $n-$*μελές σύμβολο συνάρτησης* $f \in \mathscr{L}$ *αντιστοιχεί μια μοναδική συνάρτηση, ας την ονομάσουμε* $\epsilon_{\mathscr{V}}(f)$ *ή σκέτα* $\epsilon(f) : V^n \to V$.

Παράδειγμα 2.1.18. *ηλικία*$(\cdot) \to \epsilon_{\mathscr{V}}($*ηλικία*$) : V^1 \to V$

$\mathscr{L}$	$\mathscr{V}$
f	$\epsilon(f) : V^n \to V$

4. *Για κάθε $n-$μελές σύμβολο κατηγορήματος $p \in \mathscr{L}$ αντιστοιχεί μια μοναδική σχέση, ας την ονομάσουμε $\epsilon_{\mathscr{V}}(p)$ ή σκέτα $\epsilon(p) \subseteq V^n$.*

$\mathscr{L}$	$\mathscr{V}$
p	$\epsilon(p) \subseteq V^n$

Παράδειγμα 2.1.19. $\mathscr{L}_A = \{+, \cdot, 0, 1\}, \quad \mathscr{A} = \mathbb{N}$, *με τις γνωστές μας ερμηνείες των συμβόλων (π.χ. η $\epsilon(+)$= είναι η γνωστή μας πρόσθεση δυο φυσικών αριθμών όπως μάθαμε από το Δημοτικό, $\epsilon(\cdot)$ ο γνωστός με πολλαπλασιασμός στους $\mathbb{N}$, $\epsilon(0) = 0$, $\epsilon(1) = 1$) και $A = \mathbb{N}$.*

Παράδειγμα 2.1.20. $\mathscr{A}' : \quad A = \{0, 1, 2, 3\}$. $\epsilon(+) = + \,(mod\, 4)$ *δηλαδή* $m \;\epsilon(+)\; n = (m+n)\,(mod\, 4)$, *οπότε* $1 \;\epsilon(+)\; 3 = 0$ *και όμοια*

$$\begin{array}{ll} 0 \;\epsilon(+)\; 0 = 0 & 1 \;\epsilon(+) 0 = 1 \\ 0 \;\epsilon(+)\; 1 = 1 & 1 \;\epsilon(+) 1 = 2 \\ 0 \;\epsilon(+)\; 2 = 2 & 1 \;\epsilon(+) 2 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Ακόμα ορίζουμε $\epsilon(\cdot) = \cdot\,(mod\, 4)$ οπότε,

$$2 \;\epsilon(\cdot)\; 2 = 0, 2 \;\epsilon(\cdot)\; 3 = 2$$

και $\epsilon(0) = 2 \quad \epsilon(1) = 0$.

Παράδειγμα 2.1.21. $\mathscr{A}'' : \mathscr{A}'' = 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ *είναι το σύμπαν.* $\epsilon(0) = 2$, $\epsilon(1) = 0$, $\epsilon(+) =$ *η γνωστή μας πρόσθεση στους* $\mathbb{N}$, $\epsilon(\cdot) =$ *ο γνωστός πολλαπλασιασμός στους* $\mathbb{N}$.

$\epsilon(0) \;\epsilon(+)\; \epsilon(0) = 4$
$\epsilon(1) \;\epsilon(\cdot)\; \epsilon(y) = 0$

Σχόλιο. Η ερμηνεία $\mathscr{A}''$ έχει κάποια περίεργα χαρακτηριστικά. Στην $\mathscr{A}''$ δεν ισχύει ότι κάθε αριθμός είναι άρτιος ή περιττός δηλ. ότι:

$$(\forall X)(\exists Y)(X = (1+1)Y \lor X = (1+1)Y + 1)$$

Παράδειγμα 2.1.22. *Για την γλώσσα της Θεωρίας συνόλων $\mathscr{L} = \{\emptyset, \in\}$, $\emptyset$ σύμβολο σταθεράς, $\in$ διμελές σύμβολο κατηγορήματος μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές ερμηνείες όπως για παράδειγμα: $\mathscr{B} : B = \mathbb{N}$. $\epsilon(\emptyset) = 0$, $\epsilon(\in) =$ η γνωστή μας σχέση 'μικρότερο του', οπότε $5\ \epsilon(\in)\ 8$ εάν και μόνον εάν $5 < 8$ που ισχύει. $3\ \epsilon(\in)\ 2$ εάν και μόνον εάν $3 < 2$ που **δεν** ισχύει.*

Σχόλιο. Όπως γνωρίζουμε οι φυσικοί αριθμοί έχουν οριστεί στη Θεωρία Συνόλων ως εξής $\{\emptyset\} \Longleftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \Longleftrightarrow 2$, κ.ο.κ.

Ερώτημα: Πώς δίνουμε κάποιες τιμές σε **όρους** της γλώσσας $\mathscr{L}$;

Ορισμός 2.1.11. *Έστω $\mathscr{A}$ είναι μία ερμηνεία για την $\mathscr{L}$ και A το σύμπαν της. Τότε μία αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ είναι μια συνάρτηση $v : M(\mathscr{L}) \to A$ όπου με $M(\mathscr{L})$ είναι το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας $\mathscr{L}$. Ουσιαστικά μια αποτίμηση 'εκτιμά' όλες τις μεταβλητές.*

Παράδειγμα 2.1.23. *$\mathscr{A} = \mathbb{N}$ τότε θα μπορούσαμε για παράδειγμα να φτιάξουμε μια v έτσι ώστε $v(X_3) = 0$, $v(Y) = 1, \ldots$*

Σχόλιο. Δεν είναι σωστό να λέμε **ερμηνεύουμε** μια μεταβλητή X, δηλαδή $\epsilon(X) \in A$. Το σωστό είναι να **αποτιμούμε** μια μεταβλητή X με την βοήθεια φυσικά μιας αποτίμησης $v : v(X) \in A$. Η αποτίμηση είναι μια έννοια ανεξάρτητη απ' αυτήν της δομής.
Σχόλιο. Όπως βλέπουμε από τα παραδείγματα, το να **ερμηνεύσουμε** σωστά έναν τύπο, αυτό έχει σχέση να κάνει τόσο με την δομή $\mathscr{A}$, αλλά και από την αποτίμηση v με την οποία εργαζόμαστε.

Παράδειγμα 2.1.24. *$X < 3$ και $\mathscr{A} = \mathbb{N}$ οπότε $\epsilon(3) = 3 \in \mathbb{N}$(προσέξτε στα αριστερά έχουμε το σύμβολο 3 δηλ. το (1+1)+1 και στα δεξιά τον αριθμό 3). Ορίζουμε την αποτίμηση v έτσι ώστε $v(X) = 0$, $v(X_1) = 2$, $v(X_2) = 3$, οπότε για να ισχύει ο τύπος $X < 3$ θα πρέπει $v(X)\epsilon(<)\ \epsilon(3)$ δηλαδή $0 \overset{\mathbb{N}}{<} 3$(που ισχύει). Επίσης, αν ορίσουμε την αποτίμηση v' με $v'(X) = 3$, τότε θα έχουμε, $\mathscr{A},\quad v' \models \underbrace{X}_{v(X)=3} < \underbrace{3}_{\epsilon(3)=3}$ δηλαδή δεν ισχύει και αυτό το γράφουμε συμβολικά ως $\mathscr{A}, v' \not\models X < 3$.*

Άσκηση 2.1.5. *Για κάθε μια από τις $\mathscr{A}, \mathscr{A}', \mathscr{A}''$ βρείτε μια αποτίμηση v που να δίνει στην μεταβλητή X μια κατάλληλη τιμή έτσι ώστε για κάθε Y να ισχύει*

$$v :\ v(X)\ \epsilon(\cdot)\ v(Y) = v(X).$$

(Ουσιαστικά ζητάμε να δείξουμε, $(\exists X)(\forall Y)(X \cdot Y = X)$.)

Σχόλιο. Με την βοήθεια της v και της ερμηνείας $\mathscr{A}$ μπορούμε να δώσουμε **μια τιμή** (μέσα από το σύμπαν A) σε οποιοδήποτε **όρο** της γλώσσας μας $\mathscr{L}$.

Θεώρημα 2.1.25. *Έστω $\mathscr{A}$ μια δομή για την $\mathscr{L}$ και v μια αποτίμηση στην $\mathscr{A}$, **τότε** μπορούμε να δώσουμε σε κάθε **όρο** t της $\mathscr{L}$ μια μοναδική τιμή $v^*(t)$ έτσι ώστε:*

1. *εάν $t = X$ μια μεταβλητή τότε $v^*(t) = v(X)$.*

2. *εάν $t = c$ όπου $c \in \mathscr{L}$ σύμβολο σταθεράς, τότε $v^*(c) = \epsilon(c)$.*

3. *εάν $t = f(t_1, t_2, \dots t_n)$ όπου f σύμβολο συνάρτησης της $\mathscr{L}$ και $t_1, t_2, \dots, t_n$ παλιοί όροι τότε $v^*(t) = \epsilon(f)(v^*(t_1), \dots v^*(t_n)) \in A$.*

Παράδειγμα 2.1.26. $\mathscr{L}_A = \{+, \cdot, 0, 1\}$, *όρος $X^2 + 5$, και ορίζονται κατά γνωστά τα $\mathscr{A} = \mathbb{N}$, $\epsilon(+)$, $\epsilon(\cdot)$, $\epsilon(0)$, $\epsilon(1)$. Έστω $v(X) = 2$, $v(Y) = 12$, $v(Z) =$ ότι τιμή θέλουμε για άλλη μεταβλητή $Z \neq X, Y$. Έχουμε, $v(X^2 + 5) = v(X)\ \epsilon(\cdot)\ v(X)\ \epsilon(+)\ \epsilon(5) = 2 \cdot 2 + 5 = 4 + 5 = 9 \in \mathbb{N}$. Επίσης, για την ερμηνεία $\mathscr{A}'' : v(X^2 + 5) = v(X)\ \ \epsilon(\cdot)\ \ v(X)\ \ \epsilon(+)\ \ \epsilon(5) = 2 \cdot 2 + 0 = 4 \in A''$*

Παράδειγμα 2.1.27 (χρήσης του Θεωρήματος 2.1.25)**.** $\mathscr{L}_A = \{+, \cdot, 0, 1\}$, *όρος $t = X_1 + (X_2 + 1)X_3$, αποτίμηση $U(X_1) = 2$, $U(X_2) = 0$, $U(X_3) = 1$, $U(Z) =$ο,τι θέλετε $\in \mathbb{N}$, και παίρνουμε ερμηνεία την $\mathscr{A} = \mathbb{N}$, $\epsilon(+)$, $\epsilon(\cdot)$, $\epsilon(0)$, $\epsilon(1)$.*

$$
\begin{aligned}
U^*(X_1) &\overset{(3)}{=} U^*(X_1)\ \epsilon(+)\ U^*((X_2+1)X_3) \\
&= 2\ \epsilon(+)\ U^*((X_2+1)X_3) \\
&= 2 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Ισχύει:

$$
\begin{aligned}
U^*((X_2+1)\cdot X_3) &\overset{(3)}{=} U^*(X_2+1)\ \epsilon(\cdot)\ U^*(X_3) \\
&= U^*(X_2+1)\ \epsilon(+)\ 1 \\
&= [U^*(X_2)\ \epsilon(+)\ U^*(1)]\ \epsilon(\cdot) 1 \\
&= (0+1)\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Θεώρημα 2.1.28. *Έστω $\mathscr{A}$ μια δομή και v μια αποτίμηση στην $\mathscr{A}$. Τότε μπορούμε να επεκτείνουμε με μοναδικό τρόπο την v στην v^* έτσι ώστε η $v^* : O(\mathscr{L}) \to A$ (όπου $O(\mathscr{L})$ είναι όλοι οι όροι της $\mathscr{L}$ και A εννοούμε το σύμπαν της $\mathscr{A}$).*

Σχόλια.

1. Αντί για v^* γράφουμε πιο απλά σκέτα v διότι από την v μπορεί να παραχθεί μια και μοναδική v^*.

2. Έστω $\mathscr{L} = \{+, \cdot, 0, 1$ και $\mathscr{A}$ =η γνωστή δομή των φυσικών αριθμών. Έστω, v :

   $v(X_1) = 2$
   $v(X_2) = 0$
   $v(X_3) = 1$
   $v(Z) =$ οποιονδήποτε φυσικό αριθμό θέλετε.

   Με $v(X_2|3)$ εννοούμε μια καινούργια αποτίμηση με τις ιδιότητες

   $$v(X_2|3) = \begin{cases} 3, & \text{για} \quad Z = X_2 \\ v(Z), & \text{για} \quad Z \neq X_2 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.1.29. $v(X_2|3)(X_1) = 2$ *και* $v(X_2|3)(X_3) = 1$.

Ορισμός 2.1.12. *Έστω v μια οποιαδήποτε αποτίμηση στην δομή $\mathscr{A}$ και έστω $a \in A$. Τότε $v(X|a)$ εννοούμε την αποτίμηση ω έτσι ώστε στο X παίρνει τιμή $\omega(X)$ και για $Z \neq X$ παίρνει την τιμή $\omega(Z) = v(Z)$.*

Παράδειγμα 2.1.30. $t = X_1 + (x_2 + 1) \cdot X_3$ *της* $\mathscr{L}$

$$\begin{aligned} v^*(t) = v(t) &= v(X_1 + (x_2+1)X_3) \\ &= v(X_1)\ \epsilon(+)\ v((X_2+1)X_3) \\ &= 2 + [(v(X_2)\ \epsilon(+)\ \epsilon(1))\ \epsilon(\cdot)\ v(X_3)] \\ &= 2 + [(0+1)\cdot 1] \\ &= 3 \end{aligned}$$

Αντί της v θα πάρουμε τώρα $v(X_2|3) = \omega$, οπότε $\omega(t) = 6$, δηλαδή $v(X_2|3)(t) = 6$. Άλλα παραδείγματα:
$v(X_1|0)(X_1) = 0$, $v(X_1|0)(X_2) = 0$, $v\,\underbrace{(X_1|0)(X_2|2)}_{\omega}(X_1|3) = 3$,

$v(X_1|0)(X_2|3)(X_1|4)(X_2) = 3$, $v(X_1|v(X_1))(X_1) = v(X_1)$ *δηλαδή* $v(X_1|v(X_1)) = v$.

Ορισμός 2.1.13 (Αλήθειας του Tarski)**.** *Έστω $\mathscr{L}$ και έστω $\mathscr{A}$ **μία δομή** για την $\mathscr{L}$ και v μια αποτίμηση στην A. Έστω ϕ ένας τύπος της $\mathscr{L}$. Τότε λέμε ότι ο ϕ **αληθεύει** στην δομή $\mathscr{A}$ και για την αποτίμηση v (γράφουμε συμβολικά $\mathscr{A}, v \models \phi$) εάν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Εάν ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $t_1 = t_2$, τότε θα πρέπει $v^*(t_1) = v^*(t_2)$.*

2. *Εάν ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $p(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ για κάποιο σύμβολο κατηγορήματος p και κάποιους όρους $t_1, t_2, \ldots, t_k$ τότε για να αληθεύει θα πρέπει $\langle \underbrace{v^*(t_1), v^*(t_2), \ldots, v^*(t_k)}_{k-\text{στοιχεία}} \rangle \in \epsilon(p)$ δηλ. πρέπει τα στοιχεία $v^*(t_1), v^*(t_2), \ldots, v^*(t_k)$ να ικανοποιούν την σχέση $\epsilon(p)$.*

3. *Εάν ο $\phi = \neg\psi$ για κάποιο τύπο ψ, τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \not\models \psi$ δηλαδή εάν και μόνον εάν ο ψ δεν αληθεύει.*

4. *Εάν ο $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \models \phi_1$ **ΚΑΙ** $\mathscr{A}, v \models \phi_2$ (δηλαδή ο ϕ αληθεύει εάν και μόνον εάν αληθεύουν συγχρόνως οι ϕ_1, ϕ_2)*

5. *Εάν ο $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω ισχύουν:*

   - $\mathscr{A}, v \models \phi_1$.
   - $\mathscr{A}, v \models \phi_2$.

6. *Εάν $\phi = \phi_1 \longrightarrow \phi_2$ τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν ισχύει η παρακάτω συνεπαγωγή: (εάν $\mathscr{A}, v \models \phi_1$ τότε αναγκαστικά $\mathscr{A}, v \models \phi_2$).*

7. *Εάν ο $\phi = \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$ τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν ισχύει ($\mathscr{A}, v \models \phi_1$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \models \phi_2$) δηλ. εάν και μόνον εάν οι ϕ_1, ϕ_2 παίρνουν ακριβώς τις ίδιες αληθοτιμές.*

8. *Εάν ο $\phi = (\forall X)\psi$ και ψ ένας τύπος, X μια μεταβλητή τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν για κάθε στοιχείο $a \in A(= |\mathscr{A}|)$ ισχύει $\mathscr{A}, v(X|a) \models \psi$.*

9. *Εάν ο $\phi = (\exists X)\psi$ τότε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα τουλάχιστον $a_0 \in A$ έτσι ώστε $\mathscr{A}, v(X|a_0) \models \psi$.*

Παράδειγμα 2.1.31. *Έχουμε* $\mathscr{A}, v \not\models X_1+X_2 = X_3$, *για* $\mathscr{A} = \mathbb{N}$, $v(X_1) = 1$, $v(X_2) = 3$, $v(X_3) = 2$

Παράδειγμα 2.1.32. *Εάν* $(\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$, *τότε* $\mathscr{A}, v \models (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$ *εάν και μόνον εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα* $a_0 \in \mathbb{N}$, *έτσι ώστε* $\mathscr{A}, v(X_2|a_0) \overset{?}{\models} X_1 + X_2 = X_3$, *πάρε για παράδειγμα* $a_0 = 1 \in A$.

Παράδειγμα 2.1.33. $(\forall X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$, *τότε* $\mathscr{A}, v \not\models (\forall X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$ *διότι για* $a = 20$ *ισχύει* $\mathscr{A}, v(X_2|\alpha) \not\models X_1 + X_2 = X_3$ $(1 + 20 \neq 2)$

Σχόλιο. Η αλήθεια (ή το ψέμα) της ϕ δεν εξαρτάται από τις τιμές που δίνει η αποτίμηση v πάνω σε **μεταβλητές** που είναι **δεσμευμένες** μέσα στον ϕ. Π.χ. ας πάρουμε για ϕ

$$(\exists X_2)(\underbrace{X_1}_{\text{ελεύθερη}} + \underbrace{X_2}_{\text{δεσμευμένη}} = \underbrace{X_3}_{\text{ελεύθερη}})$$

και ας ορίσουμε επιπλέον $v(X_2) = 300$, με $\mathscr{A}$ όπως προηγούμενα. Τότε δεν πρέπει να μας φανεί περίεργο ότι $\mathscr{A}, v \models \phi$.
Σε όλα τα παρακάτω παραδείγματα παίρνουμε $\mathscr{A} = \mathbb{N}$ και v όπως ορίστηκε προηγούμενα.

Παράδειγμα 2.1.34. $\phi : (\forall X_1)(X_1 < X_3) \longrightarrow (\exists X_2)(X_1+X_2 = X_3)$, $\quad \mathscr{A}, v \models \phi$. *Η συνεπαγωγή ισχύει διότι οι υποθέσεις μας δεν είναι αληθινές στο* $\mathscr{A}$ *δηλ.* $\mathscr{A}, v \not\models (\forall X_1)(X_1 < X_3)$.

Παράδειγμα 2.1.35. $(\forall X_1)(\forall X_3)[X_1 < X_3 \longrightarrow (\exists X_2)(X_1+X_2 = X_3)]$, $\quad \mathscr{A}, v \models \phi$.

Σχόλιο. Εάν ο τύπος ϕ δεν έχει καθόλου ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή εάν ο ϕ είναι μια πρόταση) τότε το εάν αληθεύει ή όχι **δεν** εξαρτάται από την αποτίμηση v με την οποία δουλεύουμε αλλά μόνο απ' την δομή $\mathscr{A}$.

Άσκηση 2.1.6. *Δείξτε ότι* $\mathscr{A} \models (\exists X)(\exists Z)(\forall X_2)(\{p(Z) \wedge \neg q(X)\} \vee \neg p(Z) \vee q(X_2))$ *εάν είναι γνωστό ότι* $\mathscr{A} \models p(a)$, $\mathscr{A} \models q(a)$, $\mathscr{A} \models \neg q(b)$, $\mathscr{A} \models p(b)$ *όπου* a, b *είναι στοιχεία του σύμπαντος της* $\mathscr{A}$ *και* q, p *σύμβολα κατηγορημάτων της γλώσσας μας.*

Λύση. Για $X|a$, $Z|a$ έχουμε:
$\mathscr{A} \models (\forall X_2)\Big(\{\underbrace{p(a) \wedge \neg q(a)}_{\psi}\} \vee \underbrace{\neg p(a)}_{\psi} \vee \underbrace{q(X_2)}_{\psi}\Big)$ =ψευδής.

Για $X|a$, $Z|b$ έχουμε:
$\mathscr{A} \models (\forall X_2)\Big(\{\underbrace{p(b) \wedge \neg q(a)}_{\psi}\} \vee \underbrace{\neg p(b)}_{\psi} \vee \underbrace{q(X_2)}_{\psi}\Big)$ =ψευδής.
Για $X|b$, $Z|a$ έχουμε:
$\mathscr{A} \models (\forall X_2)\Big(\{\underbrace{p(a) \wedge \neg q(b)}_{a}\} \vee \underbrace{\neg p(a)}_{\psi} \vee \underbrace{q(X_2)}_{\psi}\Big)$ =αληθής.

Παράδειγμα 2.1.36. *Βρείτε δύο δομές ώστε η παρακάτω πρόταση*

1. *να μην αληθεύει*

2. *να αληθεύει*

$$(\forall X)(\exists Y)(X \cdot Y = Y)$$

Λύση.

1. $\mathscr{A}$, με $A = \{2, 3\}$, $\epsilon(0) = 2$, $\epsilon(1) = 3$ και ορισμό για τον $\cdot$

$$\begin{array}{l} 2\ \epsilon(\cdot)3 = 2 \\ 3\ \epsilon(\cdot)2 = 2 \\ 3\ \epsilon(\cdot)3 = 2 \\ 2\ \epsilon(\cdot)2 = 3 \end{array}$$

2. Μια δομή που επαληθεύει την πρόταση είναι η γνωστή δομή των φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 2.1.37. *Χρησιμοποιώντας την $\mathscr{L} = \{\cdot\}$, όπου $\cdot$ ένα σύμβολο συνάρτησης, γράψτε τα αξιώματα που απαιτούνται έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός να έχει τις γνωστές ιδιότητες της **ομάδος**.*

Λύση.

- $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)\ (X \cdot Y = Z)$ (κλειστότητα) α′

- $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)\ X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$(προσεταιριστικότητα) β′

- $(\exists X)(\forall E)\ ((X \cdot E = X) \wedge (E \cdot X = X))$(ουδέτερο) γ′

- $(\exists X)(\forall E)\ ((X \cdot E = X) \wedge (E \cdot X = X)) \wedge (\forall X)(\exists Y)\ ((X \cdot Y = E) \wedge (Y \cdot X = E))$[1]δ′

Άσκηση 2.1.7. *Στο Παράδειγμα 2.1.37 να βρεθούν 2 διαφορετικές δομές $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ έτσι ώστε:*

1. *η $\mathscr{A}$ να είναι **ομάδα** και*

2. *στην $\mathscr{B}$ να ισχύουν όλα τα αξιώματα **εκτός** της ύπαρξης αντιστρόφου.*

Λύση. Δίνουμε δυο διαφορετικά παραδείγματα ομάδων: $\mathscr{A} = \{\mathbb{Z}_5, \epsilon(\cdot)\}$, $\epsilon(\cdot) =$ πράξη πρόσθεσης $(\bmod 5)$, π.χ. $3\ \epsilon(\cdot)\ 2 = 0$ δηλαδή ο αντίστροφος του 3 στο $\mathbb{Z}_5$ είναι το 2. Επίσης, $\mathscr{A}' = \{\mathbb{Z}_5^*, \epsilon^*(\cdot)\}$, $\epsilon^*(\cdot) =$πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{Z}_5^*$, οπότε $3\ \epsilon(\cdot)\ 2 = 1$ δηλαδή ο αντίστροφος του 3 στο $\mathbb{Z}_5^*$ είναι το 2. Άλλα παραδείγματα ομάδων με άπειρα το πλήθος στοιχεία: Ερμηνεύουμε το $\epsilon(\cdot)$ ως την πρόσθεση στην γνωστή μας ομάδα $\mathbb{Z}$. Ερμηνεύουμε το $\epsilon(\cdot)$ σαν πολλαπλασιασμό στην γνωστή μας ομάδα $\mathbb{Q}^*$.
Ένα παράδειγμα μιας δομής που ικανοποιούνται τα πάντα εκτός του (δ′) είναι
$\mathscr{B} = \{\mathbb{N},\ \epsilon(\cdot) =$ η πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{N}\}$.

Σχόλια.

1. Το Αξίωμα (α′) ισχύει σε κάθε δομή $\mathscr{A}$ της γλώσσας $\mathscr{L} = \{\cdot\}$ λόγω του ορισμού μιας ερμηνείας ενός συναρτησιακού συμβόλου(εδώ του $\cdot$) σε μια ερμηνεία της γλώσσας. Άρα δεν είναι απαραίτητο να μπει μέσα στα αξιώματα μιας ομάδος.

2. Μπορούμε να δείξουμε ότι από τα (α′), (β′), (γ′) προκύπτει ότι το ουδέτερο ένα και μοναδικό στοιχείο (του σύμπαντος A της δομής $\mathscr{A}$). Οπότε το αξίωμα (δ′) μπορεί να απλοποιηθεί στο

$$(\exists Z)(\forall X)(\exists Y)[''Z\text{είναι το ουδέτερο}'' \wedge X \cdot Y = Z = Y \cdot X] \qquad (2.1)$$

3. Στον τύπο (2.1) ουσιαστικά είναι μέσα και το (δ′) και το (γ′) αξίωμα.

Παράδειγμα 2.1.38. *Έχουμε $\mathscr{L} = \{<\}$ και $<$ σύμβολο κατηγορήματος. Ο τύπος της πυκνότητας είναι ο εξής:*

$$(\forall X)(\forall Y)(X \neq Y \longrightarrow (\exists Z)[(X < Z < Y) \vee (Y < Z < X)])$$

[1] $(\exists E)(E$ ουδέτερο $\wedge\ (\forall X)$ υπάρχει αντίστροφο$)$. Το αντίστροφο Y του X συμβολίζεται συνήθως με X^{-1} αλλά εδώ δεν το χρησιμοποιούμε διότι η δοθείσα γλώσσα δεν περιέχει το συναρτησιακό σύμβολο $^{-1}$.

Τότε η δομή $\mathscr{A} = \{\mathbb{Z}, \epsilon(<)\}$, με $\epsilon(<)$ η γνωστή σχέση 'μικρότερο του', δεν έχει την ιδιότητα της πυκνότητας. Ορίζουμε

$$v(X) = 2 \quad v(Y) = 3$$

*Τότε $\mathscr{A}, v \not\models$πυκνότητα. Πράγματι, εάν ισχύει $\mathscr{A}, v \models (\forall X)(\forall Y)\Big(X \neq Y \longrightarrow (\exists Z)((X < Z < Y) \vee (Y < Z < X))\Big)$, τότε θα πρέπει για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $b \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathscr{A}, v(X|a, Y|b) \models a \neq b \longrightarrow (\exists Z)(a < Z < b \vee b < Z < a)$. Όμως για $a = 2, b = 3$ έχουμε $a \neq b$ και $\mathscr{A}, v \not\models (\exists Z)(2 < Z < 3)$, άρα η $\mathscr{A}$ **δεν** είναι πυκνή.*

Πρόταση 2.1.39. *Έστω $\mathscr{A}$ μια δομή και v_1, v_2 δύο αποτιμήσεις στην $\mathscr{A}$. Τότε εάν οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερα στον ϕ τότε αναγκαστικά:*

$$\mathscr{A}, v_1 = \phi \text{ εάν και μόνον εάν } \mathscr{A}, v_2 \models \phi$$

Άσκηση 2.1.8. *Έστω $\phi(X) = (\forall Z)(\forall T)(\exists R)(R \cdot X = T \longrightarrow Z < T)$ και έστω $\mathscr{A}$ μια ερμηνεία και v_1, v_2 δύο αποτιμήσεις με $v_1(X) = v_2(X)$ και σ' όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές W, $\quad v_1(W) \neq v_2(W)$. Εάν είναι γνωστό ότι $\mathscr{A}, v_1 \models \phi$ τότε να συμπεράνετε την $\mathscr{A}, v_2 \models \phi$.*

Λύση. Η X εμφανίζεται ελεύθερη στην $\phi(X)$ και άρα από την Πρόταση (2.1.39) έχουμε ότι $\mathscr{A}, v_2 \models \phi$.

Σχόλιο. Έστω ϕ μια πρόταση (δηλαδή ένας τύπος που **δεν** περιέχει ελεύθερες μεταβλητές) της $\mathscr{L}$. Έστω $\mathscr{A}$ τυχαία, v, ω τυχαίες αποτιμήσεις. Τότε η αλήθεια της ϕ **δεν εξαρτάται** απ' την συγκεκριμένη v, διότι εάν

1. $\mathscr{A}, v \models \phi$ και τυχαία αποτίμηση $\overset{(2.1.39)}{\Longrightarrow} \mathscr{A}, \omega \models \phi$.

2. $\mathscr{A}, v \not\models \phi$ και τυχαία αποτίμηση $\overset{(2.1.39)}{\Longrightarrow} \mathscr{A}, \omega \not\models \phi$.

Οπότε εάν ϕ είναι πρόταση τότε μπορεί να έχουμε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Να **αληθεύει σε κάθε δομή** (τέτοια πρόταση λέγεται **ταυτολογία** ή ταυτότητα ή νόμος ή έγκυρη πρόταση)

2. Να αληθεύει μόνο σε κάποιες δομές (τέτοια ϕ λέγεται απλά **ικανοποιήσιμη**)

3. Η ϕ να μην αληθεύει σε καμία δομή $\mathscr{A}$. Τότε η ϕ λέγεται αντιλογία ή αντίφαση.

Παράδειγμα 2.1.40. *Το αξίωμα του αντιστρόφου, δηλαδή το αξίωμα (δ') είναι ένα παράδειγμα πρότασης που άλλοτε αληθεύει σε κάποια δομή και άλλοτε δεν αληθεύει*

Παράδειγμα 2.1.41. $\phi = (\exists X)(X \neq X)$, *τότε αν* $\mathscr{A}, v \models \phi \overset{(2.1.13)}{\Longrightarrow}$ *υπάρχει* a *στοιχείο του σύμπαντος* $\mathscr{A}, v(X|a) \models X \neq X$, *δηλαδή* $a \neq a$. *Αυτό όμως δεν γίνεται άρα η* ϕ *είναι ένα παράδειγμα αντιλογίας.*

Ορισμός 2.1.14. *Έστω* ϕ *ένας τύπος μιας γλώσσας* $\mathscr{L}$. *Θα λέμε ότι ο* ϕ *είναι* ***νόμος*** *ή* ***ταυτότητα*** *ή* ***ταυτολογία*** *ή* ***έγκυρος τύπος*** *εάν και μόνον εάν αληθεύει σε κάθε δομή* $\mathscr{A}$ *και* ***για κάθε*** *αποτίμηση* v *στην δομή, δηλαδή* $\mathscr{A}, v \models \phi$.

Παράδειγμα 2.1.42. *Ένας γνωστός νόμος:* $\phi: \quad X = Y \longrightarrow Y = X$

Λύση. Πράγματι, $\mathscr{A}, v \overset{?}{\models} X = Y \longrightarrow Y = X$, δηλαδή αν $\mathscr{A}, v \models X = Y$, τότε $\mathscr{A}, v \models Y = X$, δηλαδή **εάν** $v(X) = v(Y)$ τότε $v(Y) = v(X)$ που ισχύει!

Άσκηση 2.1.9. *Δείξτε ότι ο τύπος* $(\forall X)\phi \longrightarrow (\exists X)\phi$ *είναι έγκυρος.*

Λύση. Έστω $\mathscr{A}$ τυχαία, v τυχαία. Θα δείξουμε ότι αν $\mathscr{A}, v \models (\forall X)\phi$ τότε $\mathscr{A}, v \models (\exists)\phi$. Όμως, $\mathscr{A}, v \models (\exists Z)\phi$ εάν και μόνον εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα $a_0 \in A$ έτσι ώστε $\mathscr{A}, v(X|a_0) \overset{?}{\models} \phi$. Όμως από υπόθεση, για **κάθε** $a \in A$ έχουμε ότι αληθεύει $\mathscr{A}, v(X|a) \models \phi$, οπότε παίρνουμε a_0 =τυχαίο στοιχείο του A.

Άσκηση 2.1.10. *Δείξτε ότι ο τύπος* $(\exists X)\phi \longrightarrow (\forall X)\phi$ *δεν είναι έγκυρος, κατασκευάζοντας μια κατάλληλη ερμηνεία-αντιπαράδειγμα.*

Άσκηση 2.1.11. *Δείξτε ότι ο τύπος* $(\exists X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow \{(\exists X)\phi \vee (\exists X)\psi\}$ *είναι* ***έγκυρος****.*

Λύση. Πρέπει να δείξω ότι $\mathscr{A}, v \models (\exists X)(\phi \vee \psi)$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \models (\exists X)\phi \vee (\exists X)\psi$. Όμως $\mathscr{A}, v \models (\exists X)(\phi \vee \psi)$ εάν και μόνον εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα $a_0 \in A: \quad \mathscr{A}, v(X|a_0) \models \phi \vee \psi$, άρα αληθεύει ένα τουλάχιστον από τα ϕ ή ψ δηλαδή $\mathscr{A}, v(X|a_0) \models \phi$ ή $\mathscr{A}, v(X|a_0) \models \psi$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \models (\exists X)\phi$ ή $\mathscr{A}, v \models (\exists X)\psi$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}, v \models (\exists X)\phi \vee (\exists X)\psi$.

Άσκηση 2.1.12. *Δείξτε ότι* $(\forall X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow [(\forall X)\phi \vee (\forall X)\psi]$ ***δεν*** *είναι νόμος.*

Λύση. Θα κατασκευάσουμε το παρακάτω αντιπαράδειγμα: $\mathscr{L} = \{\leq, +, 1\}$, $\mathscr{A} : \mathbb{N}$, $\phi : X < 3$, δηλαδή $\phi : X \leq 1 + 1 + 1$, $\psi : \neg\phi$. Ισχύει: $\phi \vee \psi = \phi \vee \neg\phi$ δηλ. πρόκειται για ταυτολογία. Έχουμε

$$\mathscr{A} v \not\models (\forall X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow [(\forall X)\phi \vee (\forall X)\psi].$$

Πράγματι η $(\forall X)$ταυτολογία είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ταυτολογία και άρα ο αριστερός τύπος αληθεύει. Ο δεξιός τύπος όμως δεν αληθεύει διότι

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A}, v \not\models (\forall X)(X \leq 3) \\ \mathscr{A}, v \not\models (\forall X)\neg(X \leq 3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathscr{A}, v \not\models (\forall X)(X \leq 3) \vee (\forall X)\neg(X \leq 3).$$

2.2 Νόμοι για τους συνδέσμους και τους ποσοδείκτες

Νόμοι για την άρνηση:

$$\models \neg(\forall X)\phi \longleftrightarrow (\exists X)\neg\phi$$

$$\models \neg(\exists X)\phi \longleftrightarrow (\forall X)\neg\phi$$

Εφαρμογή: Δείξτε ότι ο τύπος $(\forall X)(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow [(\forall X)\phi] \wedge [(\forall X)\psi]$[2] είναι έγκυρος τύπος.
Απάντηση: Ο παραπάνω είναι ένας έγκυρος τύπος εάν και μόνον εάν

$$\neg(\forall X)(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow \neg\Big\{[(\forall X)\phi] \wedge [(\forall X)\psi]\Big\}$$

εάν και μόνον εάν είναι έγκυρος ο τύπος:

$$(\exists X)(\neg\phi \vee \neg\psi) \longleftrightarrow \Big\{\neg[(\forall X)\phi] \vee \neg[(\forall X)\psi]\Big\}$$

εάν και μόνον εάν είναι έγκυρος ο τύπος:

$$(\exists X)(\neg\phi \vee \neg\psi) \longleftrightarrow \Big\{[(\exists X)\neg\phi] \vee [(\exists X)\neg\psi]\Big\}$$

που είναι έγκυρος τύπος όπως δείξαμε.

[2]Αυτός ο νόμος ανήκει στους νόμους της μετακίνησης ποσοδεικτών.

Νόμοι Απορρόφησης Ποσοδεικτών: Έστω ότι η μεταβλητή X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή ο ϕ είναι νόμος. Τότε όλοι οι παρακάτω τύποι είναι **νόμοι**:

$$(\forall X)\phi \longleftrightarrow \phi \text{ και όμοια } (\exists X)\phi \longleftrightarrow \phi$$

Νόμοι της Λογικής των Προτάσεων Όλοι οι νόμοι που γνωρίσαμε στην Λογική των Προτάσεων ισχύουν απαράλλακτα και στην Λογική των Κατηγορημάτων.

Παράδειγμα 2.2.1. $\models \neg(\neg\phi) \longrightarrow \phi$

Παράδειγμα 2.2.2. $\models \phi \wedge (\psi \vee \chi) \longleftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$

Νόμοι εναλλαγής ποσοδεικτών

$$\models (\exists X)(\exists Y)\phi \longleftrightarrow (\exists Y)(\exists X)\phi$$

και όμοια

$$\models (\forall X)(\forall Y)\phi \longleftrightarrow (\forall Y)(\forall X)\phi.$$

Σχόλιο. $\underbrace{(\forall X)(\exists Y)\phi}_{a} \longleftrightarrow \underbrace{(\exists Y)(\forall X)\phi}_{\psi}$ δεν είναι έγκυρος τύπος. Αντιπαράδειγμα: $\mathscr{L} = \{<\}$, $\phi : X < Y$, $\mathscr{A} : \mathbb{N}$, $\epsilon(<)$= ο κανονικός ορισμός του ‘μικρότερου του¨.

Νόμοι Μετακίνησης Ποσοδεικτών:

$$\models (\forall X)(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\forall X)\phi \wedge (\forall X)\psi$$

$$\models (\exists X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\exists X)\phi \vee (\exists X)\psi$$

Σχόλιο. Δεν ισχύουν πάντα οι:

- $(\forall X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow (\forall X)\phi \vee (\forall X)\psi$ (γίνεται έγκυρος όταν έχουμε μόνο $\longleftarrow$)
- $(\forall X)(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow (\forall X)\phi \longrightarrow (\forall X)\psi$ (γίνεται έγκυρος όταν έχουμε μόνο $\longleftarrow$ αντί $\longleftrightarrow$)
- $(\exists X)(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow (\exists X)\phi \wedge (\exists X)\psi$ (γίνεται έγκυρος όταν έχουμε μόνο $\longrightarrow$)

Εάν η μεταβλητή X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή ο ϕ είναι νόμος τότε έχουμε και τους παρακάτω νόμους

$$\models (\forall X)(\phi \longrightarrow \psi) \longleftrightarrow [\phi \longrightarrow (\forall X)\psi]$$

$$\models (\forall X)(\phi \longleftarrow \psi) \longleftrightarrow [\phi \longleftarrow (\forall X)\psi]$$

$$\models (\forall X)(\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow [\phi \longleftrightarrow (\forall X)\psi]$$

$$\models (\forall X)(\phi \vee \psi) \longleftrightarrow [\phi \vee (\forall X)\psi]$$

$$\models (\forall X)(\phi \wedge \psi) \longleftrightarrow [\phi \wedge (\forall X)\psi]$$

$$\models (\forall X)(\psi \longrightarrow \phi) \longleftrightarrow \Big([(\forall X)\psi] \longrightarrow \phi\Big)$$

Γενικά μπορούμε σε τέτοιες περιπτώσεις X και ϕ να αντικαταστήσουμε τη συνεπαγωγή και με άλλους συνδέσμους:

Παράδειγμα 2.2.3. *Αν η μεταβλητή X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή ο ϕ είναι νόμος, τότε $(\exists X)\psi \wedge \phi \equiv (\exists X)[\psi \wedge \phi]$.*

Το $(\forall X)\psi \vee \phi \equiv (\forall X)[\psi \vee \phi]$ καθώς και ο νόμος στο παραπάνω παράδειγμα ισχύει και για $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ με την **προϋπόθεση** ότι η μεταβλητή X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή ο ϕ είναι νόμος.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω T ένα οποιοδήποτε σύνολο τύπων (που θα του λέμε 'υποθέσεις' και έστω τ είναι ένας άλλος τύπος (θα τον λέμε 'συμπέρασμα') θα γράφουμε $T \models \tau$ (και θα λέμε ότι το τ είναι **συνέπεια** του T) εάν και μόνον εάν για κάθε ερμηνεία $\mathscr{A}$ και για κάθε αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ (εάν όλοι τύποι ϕ του T αληθεύουν τότε αληθεύει και ο τ, δηλαδή (εάν $\mathscr{A}, v \models \phi$ για κάθε $\phi \in T$, τότε $\mathscr{A}, v \models \tau$).*

Σχόλιο. Εάν ο τ είναι ένας έγκυρος τύπος τότε απλά γράφουμε $\models \tau$ και εννοούμε $T \models \tau$ όπου $T = \emptyset$. Επίσης αν το T είναι μονοσύνολο π.χ $T = \{\sigma\}$ και ψ μια οποιαδήποτε πρόταση τότε με $\sigma \models \psi$ θα συμβολίζουμε το $T \models \psi$. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω νόμους μπορούμε να δείξουμε και τα

- $((\forall X)\phi \vee (\forall X)\psi) \models (\forall X)(\phi \vee \psi)$
- $\underbrace{[(\forall X)\phi] \longrightarrow [(\forall X)\psi]}_{\text{μία μόνο υπόθεση}} \models (\forall X)(\phi \longrightarrow \psi)$
- $(\exists X)(\phi \wedge \psi) \models \{(\exists X)\phi \wedge (\exists X)\psi\}$

Ισχύει και το γνωστό Θεώρημα του Συμπεράσματος που μάθαμε στην Προτασιακή Λογική:

Θεώρημα 2.2.4 (Θεώρημα του Συμπεράσματος). *$T \models \tau_1 \longrightarrow \tau_2$ εάν και μόνον εάν $T \cup \{\tau_1\} \models \tau_2$.*

Φυσικά ισχύει και η εις άτοπο απαγωγή δηλ.
είναι νόμος ο

$T \models \tau$ εάν και μόνον εάν $T \cup \{\neg\tau\}$ **δεν** είναι ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων.

Ορισμός 2.2.2. *Ένα σύνολο T από τύπους είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνον εάν υπάρχει $\mathscr{A}$ και κάποια αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ που επαληθεύει κάθε τύπο του T, δηλαδή υπάρχει $\mathscr{A}, v$: για κάθε $\sigma \in T, \quad \mathscr{A}, v \models \sigma$.*

Ορισμός 2.2.3. *Έστω ϕ_1, ϕ_2 τύποι μιας γλώσσας $\mathscr{L}$. Θα γράφουμε $\phi_1 \equiv \phi_2$ (και θα λέμε ότι ο ϕ_1 και ο ϕ_2 είναι ισοδύναμοι) εάν και μόνον εάν ο $\phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$ είναι έγκυρος τύπος, δηλαδή $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$.*

Σχόλιο. Στους επόμενους νόμους εάν ϕ είναι ένας τύπος και X μια μεταβλητή και t είναι ένας **όρος** τότε με ϕ_t^X παριστάνουμε τον τύπο που παίρνουμε όταν **αντικαταστήσουμε συγχρόνως** όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της X με τον t μέσα στον ϕ

Παράδειγμα 2.2.5. $\phi : (\forall X)(X < Y) \longrightarrow (\exists Z)(\underbrace{X}_{\text{ελεύθερη εμφάνιση}} = Z)$,
$t = Y^2$, $\phi_t^X = (\forall X)(X < Y) \longrightarrow (\exists Z)(Y^2 = Z)$.

2.3 Νόμοι αντικατάστασης μεταβλητών

Νόμος μετονομασίας μεταβλητών. Έστω ότι ο ϕ περιέχει κάποια μεταβλητή και επιθυμούμε να μετονομάσουμε το X μέσα στον τύπο $(\forall X)\phi$. Τότε, εάν επιλέξουμε μια μεταβλητή Z που **δεν** εμφανίζεται πουθενά στον ϕ, θα έχουμε:

$$(\forall X)\phi \equiv (\forall Z)\phi_Z^X$$

όμοια

$$(\exists X)\phi \equiv (\exists Z)\phi_Z^X$$

Παρατήρηση 2.3.1. *1) Δεν είναι σωστό γενικά:* $\forall X_1\phi \equiv \forall X_2\phi^{X_1}_{X_2}$ *και* $\exists X_1\phi \equiv \exists X_2\phi^{X_1}_{X_2}$.
2) Ισχύουν οι δύο παραπάνω ισοδυναμίες με την προϋπόθεση ότι το X_2 *να μην εμφανίζεται πουθενά στον* ϕ.

Παράδειγμα 2.3.2. *Για* $\phi : X_2 \neq X_1$*, δεν μπορεί να ισχύει* $(\exists X_1)\phi \equiv (\exists X_2)\phi^{X_1}_{X_2}$ *διότι δεν ισχύει* $(\exists X_1)(X_2 \neq X_1) \equiv (\exists X_2)(X_2 \neq X_2)$

(στα δεξιά υπάρχει μια αντιλογία ενώ στα αριστερά μια ικανοποιήσιμη πρόταση. Πράγματι κάθε ερμηνεία που το σύμπαν της έχει πάνω από ένα στοιχείο ικανοποιεί την πρόταση στα αριστερά.)

Πόρισμα 2.3.3 (Θεώρημα των Αλφαριθμητικών παραλλαγών)**.** *Έστω ότι ο τύπος* ϕ *περιέχει κάποιες μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες και δεσμευμένες μέσα του. Τότε, υπάρχει ένας τύπος* ϕ^* *έτσι ώστε* $\phi \equiv \phi^*$ *και στον οποίο καμία μεταβλητή του δεν εμφανίζεται συγχρόνως, ελεύθερη και δεσμευμένη.*

Νόμος αντικατάστασης μεταβλητών με κάποιους όρους μέσα σε ατομικούς τύπους: Έστω ϕ ένας **ατομικός** τύπος και ϕ^* είναι ο τύπος που προκύπτει από τον ϕ εάν αντικαταστήσουμε **μερικές** ή **όλες** τις εμφανίσεις της μεταβλητής X με την Y. Τότε, $\{X = Y\} \models \phi \longleftrightarrow \phi^*$.

Νόμοι αντικατάστασης μεταβλητών με κάποιους όρους μέσα σε τύπους: Εάν αληθεύει ότι $\mathscr{A}, v(X_1|a) \models \phi$ όπου a είναι ένα στοιχείο του σύμπαντος $|\mathscr{A}|$ και X_2 μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται πουθενά στον ϕ και t είναι ένας όρος τότε αληθεύει ότι
1)
$$\mathscr{A}, v(X_2|a) \models \phi^{X_1}_{X_2}$$
2) εάν ο t μπορεί να **αντικαταστήσει την** X στον ϕ (δηλαδή εάν η Y είναι μια οποιαδήποτε μεταβλητή τ, τότε **δεν** υπάρχει υποτύπος ϕ_1 του ϕ στον οποίο εμφανίζεται η X ελεύθερη και ο ϕ_1 ξεκινά με $(\forall Y)\ldots$ ή $\exists Y)\ldots$) τότε
$$(\forall X)\phi \models \phi^X_t.$$

Παρατήρηση 2.3.4. *Πρέπει να προσέξουμε να ικανοποιούνται οι παραπάνω περιορισμοί διότι διαφορετικά θα καταλήξουμε σε αντιφάσεις. Για παράδειγμα εάν* $t = Y$*, τότε ο* t *δεν μπορεί να αντικαταστήσει ελεύθερα την* X *στον τύπο* $\phi = (\exists Y)(Y \neq X)$ *διότι δεν ικανοποιείται ο ορισμός που δώσαμε για τον υποτύπο* $\phi_1 = \phi$*. Ως αποτέλεσμα έχουμε να ΜΗΝ ισχύει η συνέπεια* $(\forall X)\phi \models \phi^X_t$*. Δεν* *ισχύει διότι προφανώς η πρόταση* $\phi_t^X = (\exists Y)(Y \neq Y)$ *είναι μια αντίφαση ενώ η* $(\forall X)\phi$ *είναι ικανοποιήσιμη! Άρα*

$$(\forall X)\underbrace{(\exists Y)(Y \neq X)}_{\phi} \not\models (\exists Y)(Y \neq Y)$$

Παράδειγμα 2.3.5. *Δείξτε χρησιμοποιώντας τους νόμους που μάθατε ότι η*

$$(\forall X)\phi \longrightarrow (\exists X)\phi$$

είναι μια ταυτολογία.

Λύση. **1ος τρόπος:** $\mathscr{A}, v \models (\forall X)\phi \longrightarrow (\exists X)\phi$, με χρήση του 2.1.13.
2ος τρόπος: $(\forall X)\phi \longrightarrow (\exists X)\phi \equiv \neg((\forall X)\phi) \vee (\exists X)\phi \equiv (\exists X)\neg\phi \vee (\exists X)\phi \equiv$ [3] $(\exists X)(\neg\phi \vee \phi) \equiv$ [4] $\neg\phi \vee \phi \equiv$ ταυτολογία

Παράδειγμα 2.3.6. *Έστω* $p(\cdot)$ *και* $q(\cdot)$ *δύο σύμβολα κατηγορήματος μιας θέσεως. Δείξτε ότι παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:*

$$\Big[(\forall X)(p(X) \longrightarrow q(X))\Big] \longrightarrow \Big[((\forall X)p(X)) \longrightarrow ((\forall X)q(X))\Big]$$

Λύση. **1ος τρόπος:** Με χρήση του 2.1.13.
2ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας τους Λογικούς Νόμους:
$\Big[(\forall X)(p(X) \longrightarrow q(X))\Big] \longrightarrow \Big[((\forall X)p(X)) \longrightarrow ((\forall X)q(X))\Big] \equiv (\exists X)(p(X) \wedge \neg(X)) \vee \Big[((\forall X)p(X)) \longrightarrow ((\forall X)q(X))\Big] \equiv$ [5] $\underbrace{(\exists X)(p(X) \wedge \neg q(X))}_{1} \vee \underbrace{[(\exists X)\neg p(X)]}_{2} \vee \underbrace{((\forall X)q(X))}_{3} \equiv (\forall X)\Big[(\exists X)(p(X) \wedge \neg q(X)) \vee [(\exists X)\neg q(X)] \vee q(X)\Big] \equiv (\forall X)\Big[(\exists X)\Big(\{p(X) \wedge \neg q(X)\} \vee \neg p(X)\Big) \vee q(X)\Big] \equiv$ [6] $(\forall X)\Big[(\exists Z)\Big(\{p(Z) \wedge \neg q(Z)\} \vee \neg p(Z)\Big) \vee q(X)\Big] \equiv$ [7] $(\forall X)(\exists Z)\Big[\Big(\{p(Z) \wedge \neg q(Z)\} \vee \neg p(Z)\Big) \vee q(X)\Big] \equiv (\forall X)(\exists Z)\Big[\Big\{(p(Z) \vee \neg p(Z)) \wedge (\neg q(Z) \vee \neg p(Z))\Big\} \vee q(X)\Big] \equiv$

---

[3] Νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών.
[4] Νόμος απορρόφησης.
[5] Νόμος μετακίνησης ποσοδεικτών.
[6] Νόμοι μετονομασίας ποσοδεικτών.
[7] Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών. Η Z δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $q(X)$.

$(\forall X)(\exists Z)\ \Big[\Big\{\text{ταυτολογία} \wedge (\neg q(Z) \vee \neg p(Z))\Big\} \vee q(X)\Big] \equiv (\forall X)(\exists Z)[\neg q(Z) \vee \neg p(Z) \vee q(X)]$.

Το τελευταίο είναι προφανώς αληθινή πρόταση διότι για κάθε $a \in A$ ισχύει $\mathscr{A}, v(X|a)(Z|a) \models \neg q(a) \vee \neg p(a) \vee q(a)$ που είναι ταυτολογία.

Σχόλιο. Κάποιοι συνδυασμοί από τους νόμους που αναφέραμε οδηγούν πολύ γρήγορα σε κάποια αποτελέσματα, ενώ κάποιοι άλλοι όχι τόσο γρήγορα. Για παράδειγμα, με ποια σειρά θα τραβήξουμε τους ποσοδείκτες στα αριστερά παίζει σπουδαίο ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα.

Άσκηση 2.3.1. *Δίνεται η γλώσσα $L_f = \{+, \cdot, <, 0, 1, f\}$ όπου f είναι σύμβολο συνάρτησης. Να ορίσετε στην γλώσσα L_f την έννοια το ορίου $\lim_{X \to X_0} f(X) = Y_0$.*

Λύση. Ο ορισμός του ορίου είναι: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X)(|X - X_0| < \delta \longrightarrow |f(X) - Y_0)| < \epsilon)$, δηλαδή στην γλώσσα μας $(\forall E)(\exists \Delta)(\forall X)\Big[0 < E \to 0 < \Delta \wedge \{[X_0 < X + \Delta \wedge X < X_0 + \Delta] \to [Y_0 < f(X) + E \wedge f(X) < Y_0 + E]\}\Big]$.

Άσκηση 2.3.2. *Να δώσετε ένα τύπο στην γλώσσα L_f που να εκφράζει το γεγονός ότι το Y_0 **δεν** είναι όριο της f καθώς $X \to X_0$.*

Λύση. Ο τύπος όταν το Y_0 δεν είναι όριο της f όταν το $X \to X_0$ είναι με την βοήθεια των νόμων που μάθαμε ο εξής: $(\exists E)(\forall \Delta)(\exists X)\Big[0 < E \wedge [\neg(0 < \Delta) \vee \Big\{[X_0 < X + \Delta \wedge X < X_0 + \Delta] \wedge [\neg(Y_0 < f(X) + E) \vee \neg(f(X) < Y_0 + E)]\Big\}\Big]$ ή ισοδύναμα, αν συμφωνήσουμε να συμβολίσουμε την σύζευξη $[X_0 < X + \Delta \wedge X < X_0 + \Delta]$ με (χρήση της απόλυτης τιμής που βέβαια δεν ανήκει στην γλώσσα αλλά βοηθά στην κατανόηση της πρότασης) $|X - X_0| < \Delta$ και την διάζευξη $[\neg(Y_0 < f(X) + E) \vee \neg(f(X) < Y_0 + E)]$ με $|f(X) - Y_0| \nless E$,

$$(\exists E)(\forall \Delta)(\exists X)\Big[0 < E \wedge [(0 < \Delta) \to \Big\{|X - X_0| < \Delta \wedge |f(X) - Y_0| \nless E\Big\}\Big]$$

Στα ελληνικά, το παραπάνω λέει ότι μπορούμε να βρούμε ένα $E > 0$ έτσι ώστε αν διαλέξουμε για Δ ένα οποιοδήποτε θετικό αριθμό, τότε μπορούμε να βρούμε ένα X στο ανοικτό διάστημα $(X_0 - \Delta, X_0 + \Delta)$έτσι ώστε το $f(X)$ να μην ανήκει στο διάστημα $(Y_0 - E, Y_0 + E)$.

2.4 Το παράδοξο του ψεύτη

Ένα γνωστό «παράδοξο» των Μαθηματικών είναι το παρακάτω:

Ο Πέτρος ισχυρίζεται ότι «είναι ψεύτης». Αν αυτός είναι όντως ψεύτης, τότε σίγουρα ότι λέει είναι ψέματα. Άρα είναι ψέματα και το ότι «είναι ψεύτης». Άρα δεν μπορεί να είναι ψεύτης. Άρα αφού δεν είναι ψεύτης αυτό που ισχυρίζεται είναι σίγουρα αληθινό. Συνεπώς πρέπει να δεχτούμε τον ισχυρισμό του ότι είναι ψεύτης!

Θα αντιμετωπίσουμε το παραπάνω «παράδοξο» με τα εργαλεία που διαθέτουμε στην Α΄ βαθμια Λογική. Ας θεωρήσουμε μια κατάλληλη γλώσσα $\mathscr{L}$ για την περίστασή μας. Αυτή θα περιέχει άπειρες το πλήθος σταθερές. Κάθε πρόταση όπως για παράδειγμα '(εγώ) είμαι ψεύτης' της καθομιλουμένης την θεωρούμε ως σταθερά της γλώσσας. Επίσης θα χρειαστούμε ένα μονοθέσιο σύμβολο κατηγορήματος π.χ το ψεύδεται($\cdot$) για να μπορέσουμε με το ψεύδεται(X) να περιγράψουμε το γεγονός ότι ο Πέτρος ψεύδεται όταν ισχυρίζεται το X.

Έστω λοιπόν μια οποιαδήποτε ερμηνεία $\mathscr{V}$ για την παραπάνω γλώσσα.
Περίπτωση 1η. Η ερμηνεία πιστεύει ότι ο Πέτρος είναι όντως ψεύτης. Δηλαδή, για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει

$$\mathscr{V}, v \models (\forall X)\text{ψεύδεται}(X).$$

Κατά συνέπεια με την αντικατάσταση $X/$'(εγώ) είμαι ψεύτης' παίρνουμε ψεύδεται('(εγώ) είμαι ψεύτης'). Απ΄ αυτό όμως και μόνο **δεν** μπορεί να συνεπάγεται ότι δεν είναι ψεύτης δηλ. ότι ισχυρίζεται είναι αληθινό!

Άσκηση 2.4.1. *Δείξτε ότι*

$$\textit{ψεύδεται('(εγώ) είμαι ψεύτης')} \not\models (\forall X)\neg\textit{ψεύδεται}(X)$$

κατασκευάζοντας κατάλληλη ερμηνεία-αντιπαράδειγμα.

Συνεπώς δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ¬ψεύδεται('(εγώ) είμαι ψεύτης') ώστε να καταλήξουμε σε κάποιο άτοπο.
Περίπτωση 2η. Η ερμηνεία πιστεύει ότι ο Πέτρος δεν είναι ψεύτης. Άρα για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει

$$\mathscr{V}, v \models \neg(\forall X)\text{ψεύδεται}(X).$$

δηλ.

$$\mathscr{V}, v \models (\exists X)\neg\text{ψεύδεται}(X).$$

(δηλ. η $\mathscr{V}$ πιστεύει ότι υπάρχουν περιπτώσεις που πράγματι ο Πέτρος λέει αλήθεια.) Αυτό όμως φυσικά **δεν** συνεπάγεται το $\mathscr{V}, v \models (\forall X)\neg$ψεύδεται$(X)$. ή τουλάχιστον κάποιο από τα $\neg$ψεύδεται('(εγώ) είμαι ψεύτης') ή ψεύδεται('(εγώ) είμαι ψεύτης').

Έτσι σε καμία περίπτωση δεν καταλήγουμε σε κάποιου είδους λογικού «παραδόξου»!

Άσκηση 2.4.2. *Σε μια συνομιλία ισχυρίζεται κάποιος ότι το τσιγάρο είναι αιτία θανάτου. Ο δεύτερος ομιλητής απαντάει: Αυτό που ισχυρίζεσαι δεν μπορεί να ισχύει διότι ο παππούς μου είναι μανιώδης καπνιστής από μικρός και είναι 98 χρονών!*
Υπάρχει κάποιο λογικό ατόπημα στην απάντηση του δευτέρου ομιλητή; Απέδειξε πράγματι ότι το τσιγάρο δεν σκοτώνει ή όχι; Αντιμετωπίστε το πρόβλημα κατασκευάζοντας κατάλληλη γλώσσα.

2.5 Κανονικές Μορφές

Ορισμός 2.5.1. *Ένας τύπος ϕ είναι σε* ***Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή (Δ.Ε.Κ.Μ.)*** *εάν και μόνον εάν είναι γραμμένος στη μορφή*

$$(Q_1X_1)(Q_2X_2)\dots(Q_nX_n)\sigma,$$

όπου $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ είναι κάποιος από τους $\forall, \exists$ και σ είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες σε Συζευκτική Κανονική Μορφή.

Άσκηση 2.5.1. *Γράψτε τον παρακάτω τύπο σε Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή:*

$$\underbrace{(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)[p(X,Z) \wedge p(Y,Z)]}_{\sigma_1} \longrightarrow \underbrace{(\forall X)(\forall Y)(\exists U)r(X,Y,U)}_{\sigma_2}$$

όπου $p(\cdot,\cdot), r(\cdot,\cdot,\cdot)$ είναι σύμβολα κατηγορήματος σε κάποια γλώσσα $\mathscr{L}$.

Λύση. Όπως ήδη γνωρίσαμε για κατάλληλα X, X_2 ισχύουν οι ισοδυναμίες $(\exists X)\phi \vee \psi \equiv (\exists X)(\phi \vee \psi)$, $(\forall X)\phi \vee \psi \equiv (\forall X)(\phi \vee \psi)$, $(\forall X_1)\phi \equiv \forall X_2 \phi^{X_1}_{X_2}$ και $\exists X_1 \phi \equiv \exists X_2 \phi^{X_1}_{X_2}$. Για να εκμεταλλευτούμε τους παραπάνω νόμους θα διαλέξουμε X_1, Y_1 που δεν εμφανίζονται σε κανένα υποτύπο του $\phi = \sigma_1 \rightarrow$

σ_2(έτσι ώστε να ισχύουν οι παραπάνω νόμοι μετονομασίας των μεταβλητών) και θα τον φέρουμε στην επιθυμητή μορφή:

$$\begin{aligned}
\phi = \sigma_1 \to \sigma_2 &\equiv \neg\sigma_1 \vee \sigma_2 \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall X)(\forall Y)(\exists U) r(X,Y,U) \\
&\equiv (\exists X)\Big[(\exists Y)(\forall Z)[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall X)(\forall Y)(\exists U) r(X,Y,Z)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)\Big[(\forall Z)[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall X)(\forall Y)(\exists U) r(\underbrace{X}_{X|X_1},Y,U)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)\Big[[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall X_1)(\forall Y)(\exists U) r(X_1,Y,U)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)(\forall X_1)\Big[[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall Y)(\exists U) r(X_1,\underbrace{Y}_{Y|Y_1},Z)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)(\forall X_1)\Big[[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\forall Y_1)(\exists U) r(X_1,U_1,Z)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)(\forall X_1)(\forall Y_1)\Big[[\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z)] \vee (\exists U) r(X_1,Y_1,U)\Big] \\
&\equiv (\exists X)(\exists Y)(\forall Z)(\forall X_1)(\forall Y_1)(\exists U)\sigma
\end{aligned}$$

όπου $\sigma = \underbrace{\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z) \vee r(X_1,Y_1,U)}_{\sigma=\sigma_1}$ που είναι γραμμένη σε Συζευκτική Κανονική Μορφή(δηλαδή $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$, όπου καθε $\sigma_i =$διάζευξη ατομικών τύπων ή αρνήσεων ατομικών τύπων, στην περίπτωσή μας έχουμε $n = 1$).

Άσκηση 2.5.2. *Να απλοποιηθεί ο παρακάτω τύπος:*

$$(\exists X)[\underbrace{(\forall X_1)[X_1 \cdot X = X_1 \wedge X \cdot X_1 = X_1]}_{\text{Το } X \text{ είναι το ουδέτερο στοιχείο}} \wedge \underbrace{(\forall X_1)(\exists X_2)(X_1 \cdot X_2 = X \wedge X_2 \cdot X_1 = X}_{\text{Ύπαρξη αντιστρόφου}}]$$

Λύση. Έχουμε ότι, $(\exists X)[(\forall X_1)[X_1 \cdot X = X_1 \wedge X \cdot X_1 = X_1] \wedge (\forall X_1)(\exists X_2)(X_1 \cdot X_2 = X \wedge X_2 \cdot X_1 = X)] \equiv (\exists X)(\forall X_1)[[X_1 \cdot X = X_1 \wedge X \cdot X_1 = X_1] \wedge (\exists X_2)(X_1 \cdot X_2 = X \wedge X_2 \cdot X_1 = X)] \equiv (\exists X)(\forall X_1)(\exists X_2)[X_1 \cdot X = X_1 \wedge X \cdot X_1 = X_1 \wedge X_1 \cdot X_2 = X \wedge X_2 \cdot X_1 = X]$

Ορισμός 2.5.2 (K.M.S.). *Έστω ότι ο ϕ είναι γραμμένος σε Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. Τότε, διαγράφουμε σταδιακά κάθε* ***υπαρξιακό*** *ποσοδείκτη αντικαθιστώντας όλες τις εμφανίσεις της Y με ένα* ***νέο*** *σύμβολο συνάρτησης f όλων των μεταβλητών που ανήκουν σε καθολικούς ποσοδείκτες και βρίσκονται* *αριστερά του $(\exists Y)$. Το σύμβολο f ονομάζεται **συνάρτηση Skolem** και ο τύπος που προκύπτει (φυσικά σε κάποια νέα γλώσσα που περιλαμβάνει εκτός από τα παλιά σύμβολα και όλα αυτά τα νέα συναρτησιακά σύμβολα Skolem) λέγεται Κανονική Μορφή Skolem (K.M.S.) της ϕ.*

Παράδειγμα 2.5.1. *Να βρούμε τη K.M.S του τύπου*

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(\exists V)(\exists U)\phi(X,Y,Z,V,U),$$

όπου με $\phi(X,Y,Z,V,U)$ παριστάνουμε έναν τύπο χωρίς ποσοδείκτες σε Συζευκτική Κανονική Μορφή.

Λύση. Αντικαθιστούμε την δεύτερη (υπαρξιακή) μεταβλητή Y με την συνάρτηση Skolem f_X που θα την γράφουμε απλά f και τις 4,5 στη σειρά (υπαρξιακές) μεταβλητές V,U με τις συναρτήσεις Skolem $g_{X,Z}$ και $h_{X,Z}$ αντίστοιχα, που θα τις γράφουμε απλά g και h. Οπότε,
$(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(\exists V)(\exists U)\phi(X,Y,Z,V,U) \equiv$
$(\forall X)(\forall Z)(\exists V)(\exists U)\phi(X,f(X),Z,V,U) \equiv$
$(\forall X)(\forall Z)(\exists U)\phi(X,f(X),Z,g(X,Z),U) \equiv$
$\underbrace{(\forall X)(\forall Z)\phi(X,f(X),Z,g(X,Z),h(X,Z))}_{\text{K.M.S.}}.$

Σχόλιο. Εάν η Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή ξεκινάει με ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη (π.χ. $(\exists Y)$) τότε αντικαθιστούμε το Y με ένα **νέο** σύμβολο **σταθεράς Skolem**. Παράδειγμα: ο $(\exists X)\phi(X,Z,U)$ γράφεται σε K.M.S ως $\phi(c,Z,U)$, όπου $c =$ νέο σύμβολο σταθεράς.

Παράδειγμα 2.5.2. *Έστω ο τύπος $(\exists X)(\forall X_1)(\exists X_2)[X_1 \cdot X = X_1 \wedge X \cdot X_1 = X_1 \wedge X_1 \cdot X_2 = X \wedge X_2 \cdot X_1 = X]$. Θα τον γράψουμε σε K.M.S.*

Για τον X_1 (τον αντίστροφο) χρησιμοποιούμε το νέο συναρτησιακό σύμβολο $f(X_1)$ και όχι κατ' ανάγκη το γνωστό μας $X_1^{-1} = \frac{1}{X_1}$.

Λύση. $(\forall X_1)(\exists X_2)[X_1 \cdot e = X_1 \wedge e \cdot X_1 = X \wedge X_1 \cdot X_2 = e \wedge X_2 \cdot X_1 = e] \equiv$ $(\forall X_1)[X_1 \cdot e = X_1 \wedge e \cdot X_1 = X_1 \wedge X_1 \cdot f_{X_1}(X_1) = e \wedge f_{X_1}(X_1) \cdot X_1 = e]$.

Θεώρημα 2.5.3 (Skolem). *Έστω, ϕ είναι ένας τύπος σε Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή σε μια γλώσσα $\mathscr{L}$ και έστω ϕ^* είναι ο αντίστοιχος τύπος σε Κανονική Μορφή Skolem στην επεκτεταμένη γλώσσα $\mathscr{L}^*$ με τα νέα συναρτησιακά σύμβολα. Τότε, το ϕ με το ϕ^* είναι 'ισοδύναμα' με την εξής έννοια: Για κάθε δομή $\mathscr{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathscr{A}$ υπάρχει δομή $\mathscr{A}^*$ στην γλώσσα $\mathscr{L}^*$ έτσι ώστε $\mathscr{A}, v \models \phi$ εάν και μόνον εάν $\mathscr{A}^*, v \models \phi^*$.*

Ορισμός 2.5.3 (Συνολοθεωρητική Μορφή ενός τύπου). *Έστω ϕ ένας τύπος γραμμένος σε K.M.S. Μπορούμε να αφαιρέσουμε τους καθολικούς ποσοδείκτες (αν βέβαια υπάρχουν τέτοιοι) και να μείνει μόνο η Σ.Κ.Μ. του τύπου που γράφεται εύκολα σε συνολοθεωρητική μορφή εάν αντικαταστήσουμε τις συζεύξεις με άγκιστρα και τις (εσωτερικές) διαζεύξεις με κόμματα(εντός των αγκίστρων) όπως κάναμε στον Προτασιακό Λογισμό.*

Παράδειγμα 2.5.4. *Να βρούμε την συνολοθεωρητική μορφή του τύπου*

$$(\forall X)a(X,X) \wedge (\exists Y)(\neg a(Y,Y) \vee b(Y,Y))$$

με $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ διθέσια σύμβολα κατηγορήματος.

Λύση. Δ.Ε.Κ.Μ.: $(\exists Y)(\forall X)\Big[\quad \underbrace{a(X,X)}_{1^{\text{ος}} \text{ παράγοντας}} \quad \wedge \quad \underbrace{(\neg a(Y,Y) \vee b(Y,Y))}_{2^{\text{ος}} \text{ παράγοντας}}\Big].$

K.M.S.: $(\forall X)\Big[a(X,X) \wedge (\neg a(c,c) \vee b(c,c))\Big]$ όπου c ένα νέο σύμβολο σταθεράς.

Συνολοθεωρητική Μορφή: $\Big\{\{a(X,X)\} \overset{(\wedge)}{,} \{a(c,c) \overset{(\vee)}{,} b(c,c)\}\Big\}.$

Παράδειγμα 2.5.5. *Έστω*

$$\sigma = [\underbrace{(\exists X)p(X) \longrightarrow (\forall X)q(X)}_{A}] \longrightarrow \underbrace{(\forall X)(p(X) \longrightarrow q(X))}_{B},$$

όπου $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ σύμβολα κατηγορήματος. Δείξτε ότι είναι ένας νόμος.

Λύση.

$$\begin{aligned}
\neg\sigma &\equiv \neg(A \longrightarrow B)\\
&\equiv A \wedge \neg B\\
&\equiv [(\exists X)p(X) \longrightarrow (\forall X)q(X)] \wedge (\exists X)(p(X) \wedge \neg q(X))\\
&\equiv [\neg(\exists X)p(X) \vee (\forall X)q(X)] \wedge (\exists X)(p(X) \wedge \neg q(X))\\
&\equiv [(\forall X)\neg p(X) \vee (\forall X)q(X)] \wedge (\exists X)(p(X) \wedge \neg q(X))\\
&\equiv (\exists X)\Big\{[(\forall X)\neg p(X) \vee (\forall X)q(X)] \wedge p(X) \wedge \neg q(X)\Big\}\\
&\equiv (\exists X)\Big\{[(\forall X_1)\neg p(X_1) \vee (\forall X_2)q(X_2)] \wedge p(X) \wedge \neg q(X)\Big\} \qquad (2.2)\\
&\equiv \underbrace{(\exists X)(\forall X_1)(\forall X_2)}_{\text{οι ποσοδείκτες}}\Big\{\underbrace{[\neg p(X_1) \vee q(X_2)] \wedge p(X) \wedge \neg q(X)}_{\text{το σώμα σε Σ.Κ.Μ.}}\Big\}\\
&\equiv \underbrace{(\forall X_1)(\forall X_2)\Big\{[\neg p(X_1) \vee q(X_2)] \wedge p(c) \wedge \neg q(c)}_{\text{K.M.S.}}\Big\}
\end{aligned}$$

Σε συνολοθεωρητική μορφή: $\Big\{\{\neg p(X_1), q(X_2)\}, \{p(c)\}, \{\neg q(c)\}\Big\}$ και με τις αντικαταστάσεις $X_1|c$, $X_2|c$ παίρνουμε: $\Big\{\{\underbrace{\neg p(c)}_{A}, \underbrace{q(c)}_{B}\}, \{\underbrace{p(c)}_{C}\}, \{\underbrace{\neg q(c)}_{D}\}\Big\}$.
Από δυαδική επίλυση του $p(c)$ μεταξύ των A και C και στην συνέχεια του $q(c)$ μεταξύ των B και D προκύπτει ότι η $\neg\sigma$ οδηγεί σε αντίφαση και άρα η σ είναι αναγκαστικά ένας νόμος.
Σχόλιο. Στην ισοδυναμία (2.2) έπρεπε αναγκαστικά να μετονομάσουμε τα $\forall X$ σε X_1 και X_2 για να τα μετακινήσουμε αριστερά.

2.6 Η μέθοδος της ενοποίησης-δυαδικής επίλυσης

Στην Λογική των Κατηγορημάτων δεν αρκεί πάντα η δυαδική επίλυση. Θα πρέπει πρώτα να γίνουν κάποιες **ενοποιήσεις** τύπων(όπου κάποιες μεταβλητές αντικαθίστανται με κάποιους όρους) ώστε να προκύψουν κάποιοι κατάλληλοι τύποι (μετά από τις αντικαταστάσεις) οι οποίοι θα μας οδηγήσουν στην δυαδική επίλυση. Η ενοποίηση δυο διαφορετικών τύπων γίνεται πάντα με χρήση του Αλγορίθμου ενοποίησης.

Παράδειγμα 2.6.1. *Να ενοποιήσετε(αν βέβαια γίνεται) και στην συνέχεια να επιλύσετε τους παρακάτω δυο ατομικούς τύπους:*
$c_1 = p(f(X), Y)$
$c_2 = \neg p\Big(f(g(c)), g(a)\Big)$

Λύση. Για την ενοποίηση θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο ενοποίησης:
Βήμα 1ο: Βρίσκουμε το σύνολο διαφωνίας(Σ.Δ) κοιτώντας τους τύπους από τα αριστερά μέχρι να βρούμε τους δύο πρώτους όρους που διαφωνούν. Αν το Σ.Δ. είναι το κενό σύνολο αυτό σημαίνει ότι οι τύποι είναι ενοποιημένοι και άρα μπορούμε να σταματήσουμε τον αλγόριθμο και να προχωρήσουμε στην επίλυση. Στην περίπτωσή μας δεν είναι κενό και έχουμε Σ.Δ.=$\{X, g(c)\}$.
Βήμα 2ο: Έλεγχος Εμφάνισης(ΕΕ). Ελέγχουμε εάν υπάρχει μεταβλητή που εμφανίζεται και στους δύο όρους του Σ.Δ. ή αν κανένας από τους δυο όρους του Σ.Δ. δεν είναι μια μεταβλητή. Αν συμβαίνει ένα από τα παραπάνω τότε λέμε ότι ο ΕΕ είναι θετικός και σταματάμε(δηλ. δεν μπορεί να γίνει ενοποίηση και άρα ούτε επίλυση μεταξύ των c_1, c_2). Αν είναι αρνητικός τότε πάμε στο επόμενο βήμα. Δηλαδή:
Εάν $\nearrow E.E. = -$ τότε πάμε στο Βήμα 3.
Εάν $\searrow E.E. = +$ σταματάμε.

Στην περίπτωσή μας είναι αρνητικός άρα προχωράμε στο επόμενο βήμα.
Βήμα 3ο: Φτιάχνουμε την αντικαταστάτρια(ενοποιήτρια) $\theta = \{X/g(c)\}$. Στην κατασκευή της αντικαταστάτριας αντικαθιστάμε τον ένα όρο του Σ.Δ.(την μεταβλητή) με τον άλλο(τον διπλανό) όρο. Οπότε μετά την αντικατάσταση θα προκύψουν δυο νέοι τύποι.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = p(f(X), Y) \\ c_2 = \neg p\Big(f(g(c)), g(a)\Big) \end{array}\right\} \underset{\Longrightarrow}{\text{1η αντικατάσταση}} \left.\begin{array}{l} c_1\theta = p\Big(f(g(c)), Y\Big) \\ c_2\theta = \neg p\Big(f(g(c)), g(a)\Big) \end{array}\right\}$$

Ξεκινάμε ξανά τον αλγόριθμο από το
Βήμα 1ο: $\Sigma\Delta_1 = \{Y, g(a)\}$
Βήμα 2ο: $EE = -$ μπορούμε να προχωρήσουμε στο τρίτο βήμα.
Βήμα 3ο: Κατασκευή αντικαταστάτριας $\theta_1 = \{Y/g(a)\}$

$$\underset{\Longrightarrow}{\text{2η αντικατάσταση}} \left.\begin{array}{l} c_1\theta\theta_1 = p\Big(f(g(c)), g(a)) \\ c_2\theta\theta_1 = \neg p\Big(f(g(c)), g(a)\Big) \end{array}\right\} \text{εδώ τελειώνει ο αλγόριθμος}$$

και άρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην Δυαδική επίλυση(για να πάρουμε στην περίπτωσή μας $\square$)

Άσκηση 2.6.1. *Έστω το σύστημα* $\left\{\begin{array}{l} c_1 = q(Y, Y) \\ c_2 = \neg q(Z, f(Z)) \end{array}\right.$ *, όπου* $q(\cdot, \cdot)$ *σύμβολο κατηγορήματος και* $f(\cdot)$ *σύμβολο συνάρτησης. Μπορεί να επιλυθεί;*

Λύση. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο ενοποίησης:

- Σ.Δ.$= \{Y, Z\}$
- Ε.Ε$= -$
- $\theta_1 = \{Y/Z\}$

$c_1\theta_1 = q(Z, Z)$
$c_2\theta_1 = \neg(Z, f(Z))$

- Σ.Δ.$= \{Z, f(Z)\}$
- Ε.Ε.$= +$ άρα τελειώσαμε

Άρα δεν γίνεται καμία ενοποίηση.

Άσκηση 2.6.2. *Δίνονται οι παρακάτω τύποι σε συνολοθεωρητική μορφή:*

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \{\neg p(X, Y), \neg p(Y, Z), p(X, Z)\} \\ c_2 = \{\neg p(U, V), p(V, U)\} \end{array}\right.$$

Να συμπεράνετε με την μέθοδο ενοποίησης-δυαδικής επίλυσης το:

$$c_3 = \{\neg p(X,Y), \neg p(Z,Y), p(X,Z)\}$$

Λύση. Από c_1 και c_2 θα επιλύσουμε(εξαφανίσουμε) το $\neg p(Y,Z)$ διότι δεν εμφανίζεται στο c_3. Για αυτό το λόγο θα προσπαθήσουμε να ενοποιήσουμε τα $\neg p(Y,Z) \in c_1$, $p(V,U) \in c_2$ και στην συνέχεια(αν βέβαια ενοποιηθούν) να τα επιλύσουμε .

Αλγόριθμος ενοποίησης:

- **Βήμα 1ο:** Σ.Δ.$= \{Y, V\}$
- **Βήμα 2ο:** Ε.Ε.$= -$
- **Βήμα 3ο:** $\theta = \{V/Y\}$

$c_1\theta = \{\neg p(X,Y), \neg p(Y,Z), p(X,Z)\}$
$c_2\theta = \{\neg p(U,Y), p(Y,U)\}$

Επαναλαμβάνουμε ξανά τα βήματα του Αλγορίθμου.

- **Βήμα 1ο:** Σ.Δ.$= \{Z, U\}$
- **Βήμα 2ο:** Ε.Ε.$= -$
- **Βήμα 3ο:** $\theta_1 = \{U/Z\}$

$c_1\theta\theta_1 = \{\neg p(X,Y), \neg p(Y,Z), p(X,Z)\}$
$c_2\theta\theta_1 = \{\neg p(Z,Y), p(Y,Z)\}$
Με επίλυση του $p(Y,Z)$ από τους δύο παραπάνω όρους παίρνουμε

$$\{\neg p(X,Y), \neg p(Z,Y), p(X,Z)\} = c_3.$$

2.7 Απόδειξη θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Η Δυαδική Επίλυση και η μέθοδος ενοποίησης που μάθαμε στην προηγούμενη ενότητα έχει τεράστιες εφαρμογές στην Prolog αλλά και γενικά στην τεχνητή νοημοσύνη και την αυτόματη απόδειξη θεωρημάτων. Θα δούμε εδώ μια μικρή εφαρμογή από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Έστω με $\tau(X,Y,U,V)$

συμβολίζουμε ένα τραπέζιο με βάσεις XY(πάνω βάση), VU(κάτω βάση) διαβάζουμε τις κορυφές από τα αριστερά προς τα δεξιά. Με $p(X,Y,U,V)$ συμβολίζουμε δύο παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{XY}$ και $\overline{UV}$, με $\overline{XY} \parallel \overline{UV}$. Με $\epsilon(X,Y,Z,U,V,W)$ συμβολίζουμε δυο ίσες γωνίες $X\hat{Y}Z$ και $U\hat{V}W$, με $X\hat{Y}Z = U\hat{V}W$. Έστω η γλώσσα $\mathscr{L} = \{\tau, p, \epsilon\}$. Θεωρούμε τα παρακάτω τρία γνωστά θεωρήματα της Ευκλείδειου Γεωμετρίας(εδώ τα θεωρούμε ως 'αξιώματα'):

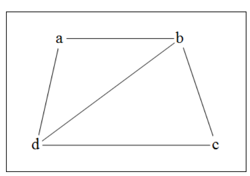
Αξίωμα 2.7.1. $(\forall X)(\forall Y)(\forall V)(\forall U)[\tau(X,Y,U,V) \longrightarrow p(X,Y,V,U)]$

Αξίωμα 2.7.2. $(\forall X)(\forall Y)(\forall U)(\forall V)[p(X,Y,U,V) \longrightarrow \epsilon(X,Y,U,Y,U,V)]$

Αξίωμα 2.7.3.
$(\forall X)(\forall Y)(\forall U)(\forall V)(\forall Z)(\forall W)[\epsilon(X,Y,U,V,Z,W) \longrightarrow \epsilon(X,Y,U,W,Z,V)]$

Με χρήση της μεθόδου ενοποίησης-επίλυσης μπορούμε να αποδείξουμε (αυτόματα και αλγοριθμικά) αρκετά θεωρήματα της Ευκλείδειου Γεωμετρίας όσο αφορά τα τραπέζια. Αν φυσικά προσθέσουμε και άλλα αξιώματα τότε θα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ένα μεγάλο κομμάτι της Ευκλείδειου Γεωμετρίας του Γυμνασίου!

Άσκηση 2.7.1. *Δίνεται ένα τραπέζιο με κορυφές a(πάνω αριστερά), b(πάνω δεξιά), c(κάτω δεξιά), d(κάτω αριστερά). Δείξτε με χρήση των παραπάνω αξιωμάτων ότι $a\hat{b}d = c\hat{d}b$.*



Λύση. Έχουμε ως υποθέσεις τα $T = \{\tau(a,b,c,d)\} \cup$ τα παραπάνω αξιώματα. Θέλουμε να δείξουμε την $\sigma = \epsilon(a,b,d,c,d,b)$. Συμβολικά $T \models \sigma$. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ενοποίησης-επίλυσης. Γι' αυτό τον λόγο γράφουμε τα αξιώματα σε συνολοθεωρητική μορφή(αφού τα γράψουμε πρώτα σε K.M.S.).

Αξίωμα (2.7.1): $\tau(X,Y,U,V) \rightarrow p(X,Y,V,U) \equiv \{\neg\tau(X,Y,U,V), p(X,Y,V,U)\} = c_1$.
Αξίωμα (2.7.2):$\{\neg p(X,Y,U,V), \epsilon(X,Y,U,Y,U,V)\} = c_2$.

Αξίωμα (2.7.3): $\{\neg\epsilon(X,Y,U,V,Z,W), \epsilon(X,Y,U,W,Z,V)\} = c_6$.
Ακόμη ορίζουμε $c_3 = \{\tau(a,b,c,d)\}$.
Θα επιλύσουμε κατ' αρχήν το τ του c_1 και του c_3. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Αλγόριθμο ενοποίησης και θα βρούμε τελικά την παρακάτω ενοποιήτρια (αντικαταστάτρια)

$$\theta = \{X/a, Y/b, U/c, V/d\}$$

Οπότε, $c_1\theta = \{p(a,b,d,c), \neg\tau(a,b,c,d)\}$ και $c_3\theta = c_3 \overset{\text{επίλυση}}{\Longrightarrow} c_4 = \{p(a,b,d,c)\}$.
Στην συνέχεια θα επιλύσουμε το p του c_4 με τον πρώτο όρο του c_2:
Με τον αλγόριθμο ενοποίησης θα πάρουμε ενοποιήτρια

$$\theta' = \{X/a, Y/b, U/d, V/c\}$$

Με επίλυση του $p(a,b,d,c)$ στα $c_4\theta' = c_4$ και $c_2\theta'$ παίρνουμε το $c_5 = \{\epsilon(a,b,d,b,d,c)\}$.
Τελικά θα ενοποιήσουμε το c_5 με τον πρώτο όρο του c_6 με σκοπό να επιλύσουμε στην συνέχεια το $\epsilon(a,b,d,b,d,c)$. Με τον αλγόριθμο ενοποίησης θα προκύψει τελικά η ενοποιήτρια

$$\theta'' = \{X/a, Y/b, U/d, V/b, Z/d, W/c\}$$

Οπότε προκύπτουν τα σύνολα $\left.\begin{array}{l} c_5\theta'' = c_5 = \{\epsilon(a,b,d,b,d,c)\} \\ c_6\theta'' = \{\neg\epsilon(a,b,d,b,d,c), \epsilon(a,b,d,c,d,b)\} \end{array}\right\}$
Μετά την επίλυση του $\epsilon(a,b,d,b,d,c)$ στα προηγούμενα προκύπτει το ζητούμενο.