17/03/15

27/03/15

Μαθηματική Λογική 18/2/15

π.χ. Αν $\underbrace{\text{πάμε σινεμά}}_{A}$ τότε $\underbrace{\text{χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο}}_{B}$

$(A \to B)$

Άρνηση:

Αν δεν έχουμε χρήματα για το εισιτήριο τότε δεν θα πάμε σινεμά

$((\neg B) \to (\neg A))$

Αν δεν πάμε σινεμά τότε δεν χρειαζόμαστε λεφτά για το εισιτήριο

$((\neg A) \to (\neg B))$

$\left.\begin{array}{l} A\text{: αλήθεια} \\ B\text{: αλήθεια} \end{array}\right\}$ $A \to B$ αλήθεια

$((\underset{ψ}{\neg A}) \to (\underset{ψ}{\neg B}))$ αλήθεια

$((\underset{ψ}{\neg B}) \to (\underset{ψ}{\neg A}))$ αλήθεια

Για να δώσουμε μία τιμή αλήθειας (α ή ψ) σε μία πρόταση θα χρειαστούμε τις παρακάτω πράξεις

	$\sim$
α	ψ
ψ	α

		$\sqcup$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

		$\sqcap$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

		-]
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

		[-]
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Μαθηματική Λογική 18/2/15

Μαθηματική Λογική

Προτασιακή λογική ή λογική των προτάσεων	λογική των κατηγορηματικών ή κατηγορηματική λογική ή λογική $1^{ης}$ τάξεως

Ατομική Πρόταση

Σύνθετες Προτάσεις: π.χ. *

Οι σύνθετες προτάσεις κατασκευάζονται από ατομικές προτάσεις χρησιμοποιώντας συνδέσμους.

$$* \text{π.χ. } \underbrace{\underbrace{\text{εάν ο αριθμός } a \text{ είναι πολ/σιο του } 10}_{A \text{ ατομική πρόταση}}, \underbrace{\text{τότε ο αριθμός } a \text{ είναι πολ/σιο του } 5}_{B \text{ ατομική πρόταση}}}_{\text{Σύνθετη πρόταση}}$$

ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ : Σύζευξη $\wedge$, Διάζευξη $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ (άρνηση), $\leftrightarrow$ (διπλή συνεπαγωγή)

π.χ. Κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή κάθε φυσικός είναι περιττός

$$\text{π.χ. Εάν } \underset{Z}{\underline{a<10}} \text{ και } \underset{H}{\underline{a\in N}} \text{ τότε: } \underset{A}{\underline{a=1}} \text{ ή } \underset{B}{\underline{2/a}} \text{ ή } \underset{\Gamma}{\underline{3/a}} \text{ ή } \underset{\Delta}{\underline{5/a}} \text{ ή } \underset{E}{\underline{7/a}}$$

$$Z \wedge H \xrightarrow[\text{εάν τότε}]{} A \vee B \vee \Gamma \vee \Delta \vee E$$

εαν

τότε

18/2/15

Σύστημα : $\boxed{2x+y=0}$ A $\quad A \wedge B$

$\boxed{x-3y=4}$ B

γλώσσα της προτασιακής λογικής αποτελείται από :

το αλφάβητο (A - Ω)

επίσης A_1, A_2

αριστερά / δεξιά παρένθεση

σύνδεσμοι

Τ κεφαλαίο → αποκλειστικά ατομική πρόταση

τ μικρό → ατομική ή σύνθετη πρόταση

συντακτικό δηλαδή πως φτιάχνουμε σύνθετες από ατομικές προτάσεις

κανόνες : κάθε ατομική πρόταση θεωρείται μία κανονική πρόταση

εάν σ είναι πρόταση τότε και η $(\neg\sigma)$ είναι πρόταση

εάν σ, τ. είναι προτάσεις τότε και οι παρακάτω θεωρούνται

προτάσεις : $(\sigma \wedge \tau)$, $(\sigma \vee \tau)$, $(\sigma \to \tau)$, $(\sigma \leftrightarrow \tau)$

κάθε πρόταση κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας αποκλειστικά

τους παραπάνω κανόνες

χ. είναι πρόταση η $(\neg A \wedge B \vee \Gamma)$ απαντ. όχι. για να

είναι πρέπει να είναι $((\neg A) \wedge (B \vee \Gamma))$

είναι πρόταση η $(\neg A) \to \wedge (B \vee \Gamma)$ απαντ. όχι

Για να είναι πρέπει να είναι $((\neg A) \to \cancel{\wedge}(B \vee \Gamma))$

ημαντική της προτασιακής λογικής, δηλαδή πως δίνουμε

λήθεια ή ψέματα στις προτάσεις της γλώσσας μας.

η αλήθεια ή το ψέμα μιας πρότασης εξαρτάται από την

λήθεια ή το ψέμα των ατομικών προτάσεων της πρότασης

π.χ. $(A \vee (B \vee \Gamma)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma))$

$$\underbrace{(\underset{a}{\overset{\downarrow}{A}} \vee \underbrace{(\underset{a}{\overset{\downarrow}{B}} \vee \underset{\psi}{\overset{\downarrow}{\Gamma}})}_{a})}_{a} \longleftrightarrow \underbrace{(\underbrace{(\underset{a}{\overset{\downarrow}{A}} \vee \underset{a}{\overset{\downarrow}{B}})}_{a} \wedge \underbrace{(\underset{a}{\overset{\downarrow}{A}} \vee \underset{\psi}{\overset{\downarrow}{\Gamma}})}_{a})}_{a}$$

Συνολικά η πρόταση που μας δόθηκε είναι αληθής.

Μαθ. λογική

①

(24/02/2015)

Προτασιακή λογική:

Ατομικές προτάσεις A, B

Σύνδεσμοι: σύζευξη ∧, διάζευξη ∨, συνεπαγωγή →, διπλή συνεπαγωγή ↔ (ισοδυναμία)
άρνηση ¬.

π.χ $(B \to (\neg\Gamma))$
$((\neg\Gamma) \longleftrightarrow B)$

Σημαντική των προτάσεων:

$f: Q \to \{\alpha, \psi\}$, όπου Q σύνολο ατομικών προτάσεων λέγεται απονομή αληθείας.

Αληθοπίνακες:

~	
α	ψ
ψ	α

(σύζευξη)

⊓		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

(διάζευξη)

⊔		
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(→)

−]		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

π.χ $\alpha \sqcap \alpha = \alpha$, $\psi \sqcup \alpha = \alpha$

(↔)

[−]		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

, Σχόλιο:
Έχοντας στα χέρια του κάποιος μια απονομή αληθείας και τις παραπάνω αληθοπίνακες μπορεί να ερμηνεύσει μια οποιαδήποτε πρόταση που του δωθεί.

π.χ $A: f(A) = \alpha$, $B: f(B) = \psi$, $\Gamma: f(\Gamma) = \alpha$

$\sigma = ((A \wedge B) \to \Gamma)$, $\sigma_1 = A \wedge B$, $\sigma_2 = \Gamma$

$\sigma = (\sigma_1 \to \sigma_2)$

Άρα: $f(\sigma) = f(\sigma_1) -] f(\sigma_2) \overset{(*)}{=} \psi -] f(\sigma_2) = \psi -] \alpha = \alpha$

$^{(*)} f(\sigma_1) = f(A \wedge B) = f(A) \sqcap f(B) = \alpha \sqcap \psi = \psi$

Μαθ
②
24/02

(Και να μην ξέραμε το $f(r)$ δεν θα έχανε διαφορά διότι όταν ξεκινάμε με ψ στην πράξη $-\!\!]$ ό,τι και να δώσουμε μετά $\{α, ψ\}$ θα έχουμε πάντα αλήθεια (κοιτά πίνακα))

Ορισμός: Μια εκτίμηση αλήθειας ή απλά ερμηνεία είναι μια συνάρτηση $f : S \to \{α, ψ\}$, S είναι το σύνολο όλων των προτάσεων της προτασιακής λογικής η οποία σέβεται τις παραπάνω αληθοπράξεις που αναφέραμε.

(π.χ) $f(\neg σ) = \sim f(σ)$ για οποιαδήποτε πρόταση $σ$

όμοια $f(σ_1 \wedge σ_2) = f(σ_1) \sqcap f(σ_2)$

$f(σ_1 \vee σ_2) = f(σ_1) \sqcup f(σ_2)$

$f(σ_1 \to σ_2) = f(σ_1) -\!\!] f(σ_2)$

$f(σ_1 \leftrightarrow σ_2) = f(σ_1) [\!-\!\!] f(σ_2)$

Ορισμός: Μια πρόταση $σ$ η οποία έχει την ιδιότητα να επαληθεύεται με την οποιαδήποτε ερμηνεία f θα την λέμε νόμο ή ταυτότητα ή ταυτολογία ή πάντοτε αληθής πρόταση.

(π.χ) $(A \vee (\neg A)) = σ$

Έστω f μια οποιαδήποτε ερμηνεία

$f(σ) = f(A) \sqcup (\sim f(A))$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ: 1η || $f(A) = α$, $\sim f(A) = ψ$

$f(σ) = α \sqcup ψ = α$

2η || $f(A) = ψ$, $\sim f(A) = α$

$f(σ) = f(A) \sqcup (\sim f(A)) =$

$= ψ \sqcup α = α$

(άπειρες διαφορετικές ερμηνείες που δίνουν στο A αλήθεια αλλά διαφορετικά στα Β,Γ..

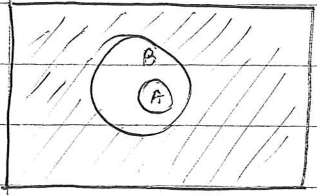
	A	B	Γ	Δ	A_1	A_2
f:	α	ψ	α	α	ψ	α
f':	α	α	α	ψ	ψ	α

⋮

Άρα το $σ$ είναι νόμος και μάλιστα λέγεται νόμος αποκλείσεως τρίτου. $σ = (A \vee (\neg A))$

Μαθ λογική
③
24/02

π.χ $A \subseteq B$, $B^c \subseteq A^c$



Έστω $A \subseteq B$ τότε $B^c \subseteq A^c$

- Αν $\boxed{x \in A}$ τότε $\boxed{x \in B}$
- Αν $x \notin B$ τότε $x \notin A$

πομικές προτάσεις → $\Gamma := x \in A$, $\Delta := x \in B$

$\left.\begin{array}{l}\Gamma := x \in A \\ \Delta := x \in B\end{array}\right\} \Rightarrow$

- Αν Γ τότε Δ , $(\Gamma \rightarrow \Delta) \longrightarrow$
- Αν $\neg\Delta$ τότε $\neg\Gamma$, $((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma))$

Άρα $(\Gamma \rightarrow \Delta) \longrightarrow ((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma))$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η παραπάνω πρόταση είναι ένας Νόμος:

$$\sigma = (\Gamma \rightarrow \Delta) \rightarrow ((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma))$$

ΛΥΣΗ: Έστω V μια τυχαία ερμηνεία. Θα δείξω ότι $V(\sigma) = \alpha$,

Περιπτώσεις:

▷ 1) Αν $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \alpha$

$V(\Gamma \rightarrow \Delta) = \alpha$, $V((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma)) = \alpha$

Άρα $V(\sigma) = \alpha \mathbin{-\!\!\sqsupset} \alpha = \alpha$

▷ 2) Αν $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \psi$

$V(\Gamma \rightarrow \Delta) = \psi$, $V((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma)) = \psi$

Άρα $V(\sigma) = \psi \mathbin{-\!\!\sqsupset} \psi = \alpha$

▷ 3) Αν $V(\Gamma) = \psi$, $V(\Delta) = \alpha$

$V(\Gamma \rightarrow \Delta) = \alpha$, $V((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma)) = \alpha$

Άρα $V(\sigma) = \alpha \mathbin{-\!\!\sqsupset} \alpha = \alpha$

▷ 4) Αν $V(\Gamma) = \psi$, $V(\Delta) = \psi$

$V(\Gamma \rightarrow \Delta) = \alpha$, $V((\neg\Delta) \rightarrow (\neg\Gamma)) = \alpha$

Άρα $V(\sigma) = \alpha \mathbin{-\!\!\sqsupset} \alpha = \alpha$

Μαθ. /

④

24/02

Σχολιο:

Εαν μας δινεται μια σ πρόταση και μας ζητείται να βρούμε τις αληθοτιμές της, τότε θα δουλεύουμε ως εξής:

- Κατασκευή ενός πινακα που στα αριστερα βάζουμε όλες τις ατομικές προτάσεις της σ. Δεξιότερα θα βάζουμε τις υποπροτάσεις της σ και τέλος στα δεξια την σ.
- Θα δίνουμε όλες τις δυνατές αληθοτιμες στις ατομικές προτάσεις της σ.

Κάθε τέτοια αποτίμηση αποτελει μια γραμμή του πινακα αλήθειας της σ.

Ⓟ π.χ $\sigma = (\Gamma \to \Delta) \to ((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma))$

	Δ	Γ	$\neg\Delta$	$\neg\Gamma$	$\Gamma \to \Delta$	$(\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)$	σ
V_1	α	α	ψ	ψ	α	α	α
V_2	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
V_3	α	ψ	ψ	α	α	α	α
V_4	ψ	ψ	α	α	α	α	α

π.χ $\emptyset \subseteq A$ Αν $\overset{\Gamma}{\boxed{x \in \emptyset}}$ τότε $\overset{\Delta}{\boxed{x \in A}}$

$\sigma = (\Gamma \to \Delta)$

- όπου Δ οποιαδήποτε ατομική πρόταση
- όπου Γ είναι μια ατομική πρόταση που κατα τη γνώμη μας είναι ψευδής

Έστω V μια τυχαία εκτίμηση αλήθεια τ.ω $V(\Gamma) = \psi$

Θ.Σ.Ο : αν V τυχαία ερμηνεία τ.ω $V(\Gamma) = \psi$ τότε $V(\sigma) = \alpha$

Γ	Δ	σ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

άρα σ νόμος

Μαθηματική λογική 2/3/15

του πίνακα αληθείας μιας πρότασης σ

Πίνακες αληθείας: Το πλήθος των γραμμών είναι πάντοτε καθορισμένο

παράδειγμα: $\sigma = (((\neg A) \wedge B) \Rightarrow \Gamma) \vee \Delta)$ $2^4 = 16$ γραμμές

σ

A	B	Γ	Δ	¬A	¬A∧B	(¬A∧B)→Γ	((¬A∧B)→Γ)∨Δ
α	α	α	α	ψ	ψ	α	α
α	α	α	ψ	ψ	ψ	α	α
α	α	ψ	α				
α	α	ψ	ψ				
α	ψ	α	α				
α	ψ	α	ψ				
α	ψ	ψ	⋮				
α	ψ	ψ					

8α

ψ ανά 4 8ψ

μέχρι το 16 ανά 2

εναλλάξ μέχρι το 16

Στην αριστερότερη ατομική στήλη του αληθοπίνακα οι μισές γραμμές είναι α και οι υπόλοιπες είναι ψ έπειτα οπωσδήποτε.

Ενώ στη δεξιότερη ατομική στήλη του αληθοπίνακα μας ενδιαφέρει ότι το α και το ψ εναλλάσσονται.

Ερώτημα: Είναι η σ πάντοτε αληθής;

Αν δεν ήταν (αληθινή) ταυτολογία η σ θα υπήρχε μια ερμηνεία V έτσι ώστε η V(σ) = ψ. Έχουμε σ = (σ1 ∨ σ2) όπου σ1 = (¬A∧B)→Γ) και σ2 = Δ. πρέπει κ' V(σ1) = ψ. κ' V(σ2) = ψ. Από V(σ1) = ψ θα πρέπει V(¬A∧B) = α και V(Γ) = ψ.

Από V(¬A∧B) = α έχουμε: V(¬A) = α και V(B) = α

Άρα τελικά $\boxed{V(A) = \psi}$, $\boxed{V(B) = \alpha}$, $\boxed{V(\Gamma) = \psi}$, $\boxed{V(\Delta) = \psi}$

Άρα από τις 16 ~~κατηγορίες~~ περιπτώσεις του αληθοπίνακα μόνο σε μία περίπτωση η σ διαψεύδεται.

σ = Αν πάμε σινεμά, τότε θα χρειαστούμε χρήματα για το εισιτήριο

Άρνηση: $\neg\sigma = A \wedge (\neg B)$

A = Εμείς πάμε σινεμά, B = Εμείς χρειαζόμαστε χρήματα...

$\sigma = A \rightarrow B$

2^2 γραμμ.

A	B	σ	¬σ	A∧(¬B)
α	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ

Οι 2 τελευταίες στήλες είναι ίδιες. Άρα ~~[illegible]~~ η ¬σ και η A∧(¬B) έχουν ακριβώς το ίδιο "νόημα".

και άρα μπορούμε να ορίσουμε σαν $\neg\sigma$ ~~≡~~ $A \wedge (\neg B)$.

Ορισμός: 2 προτάσεις σ_1, σ_2 της λογικής των προτάσεων λέγονται ισοδύναμες και γράφουμε $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ή πιο απλά $\sigma_1 = \sigma$ αν ο αληθοπίνακας ταυτίζεται με τον αληθοπίνακα της σ_2. ή ακριβέστερα για κάθε ερμηνεία V έχουμε $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$.

Π.Χ. $(A \underset{(\text{και})}{\wedge} \underset{\psi}{(\neg A)}) \equiv (B \wedge \underset{\psi}{(\neg B)})$, διότι $\forall\ V(A \wedge (\neg A)) = V(B \wedge (\neg B)) =$

$(A \vee (\neg A)) \equiv (B \vee (\neg B))$, διότι $\forall\ V(A \vee (\neg A)) = V(B \vee (\neg B)) = \alpha$.

$\neg\sigma = A \wedge (\neg B) =$ Εμείς πάρεις ομπρέλα και δε χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο.

Έστω $\sigma_1 =$ εάν δε χρειαστείς χρήματα για το εισιτήριο, τότε δεν πάρεις ομπρέλα. $\sigma_1 = ((\neg B) \rightarrow (\neg A)) = \sigma$.

A	B	σ	¬σ	σ1
α	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

Παράδειγμα: $\sigma = ((\neg A \overset{}{\underset{ή}{\wedge}} B) \rightarrow \Gamma) \vee$

αντίθετη από τη σ.

$\neg\sigma = (\neg A) \wedge B \wedge (\neg\Gamma) \wedge (\neg\Delta)$ → μοναδική περίπτωση

$V(A) = \psi$, $V(B) = \alpha$, $V(\Gamma) = \psi$, $V(\Delta) =$

Π.Χ.

A	B	σ	¬σ
α	α	α	ψ
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ

$\sigma = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg\sigma = (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$

σύζευξη → ίδια γραμμή

διάζευξη → άλλη γραμμή

Τρικ: Εάν γνωρίζουμε τον αληθοπίνακα μιας πρότασης σ τότε μπορούμε να βρούμε μια ισοδύναμη πρόταση με τη σ. Απλά: 1) εντοπίζουμε τις γραμμές που αληθεύει η σ, 2) σε κάθε τέτοια γραμμή, φτιάχνουμε μία σύζευξη από άτομα ή αρνήσεις ατόμων σύμφωνα με το πρόσημο α ή ψ που έχουν τα άτομα αυτά στη γραμμή αυτή.

Παράδειγμα:

A	B	Γ	Δ	σ
α	α	ψ	ψ	α

και

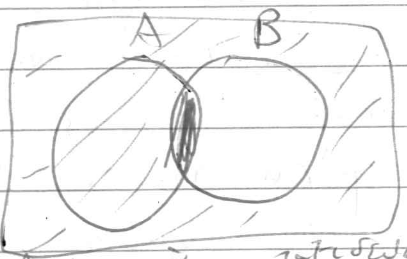
$(A\wedge B)\wedge(\neg\Gamma)\wedge(\neg\Delta)$

3) Ενώνουμε τις συζεύξεις που παίρνουμε (στο άθροισμα) με τη διάζευξη ∨.

Παράδειγμα: $\underset{\sigma 1}{(A\to B)}=\underset{\sigma 1 ''}{((\neg B)\to(\neg A))}=\underset{\sigma 2 ''}{(\neg A\vee B)}$.

A	B	¬A	¬B	σ1	σ2
α	α	ψ	ψ	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	α	α

Δείξαμε: (ταυτολογία?)
σ1 = σ2



A = φοιτητές που ταξιδεύουν για Αθήνα
B = μαθητές που το [illegible] είναι στο κορ[illegible]

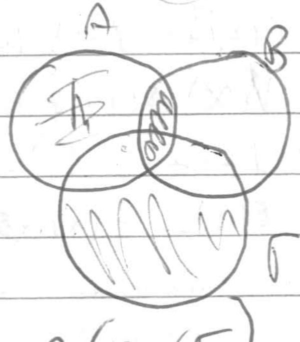
Το B→A

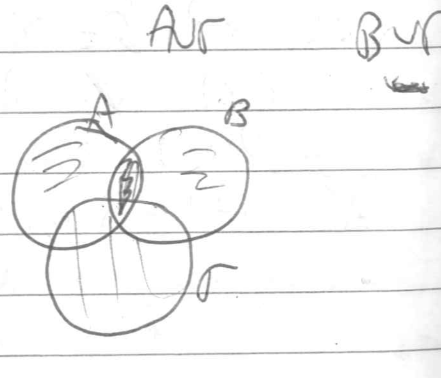
$(B\to A)=((\neg B)\vee A)$ ισοδύναμα

ένωση A
συμπλήρωμα B

Θεωρία συνόλων:

$$((A\cap B)\cup\Gamma)=(A\cup\Gamma)\cap(B\cup\Gamma)$$





$(A\cap B)$ ~~A~~ $\overset{\vee\Gamma}{}(A\vee\Gamma)\wedge(B\vee\Gamma)$

Μαθηματική λογική

3/3/15

Ορισμοί: 2 προτάσεις λέγονται ισοδύναμες ή ίσες

① και γράφουμε $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ή πιο απλά $\sigma_1 = \sigma_2$ αν
$\forall$ ερμηνεία V ισχύει ότι $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$.

② Μια πρόταση σ λέγεται νόμος ή ταυτότητα ή ταυτολογία αν
$\forall V$ $V(\sigma)=\alpha$. ή ισοδύναμα η $\sigma = A \vee (\neg A)$

③ Μια πρόταση σ λέγεται αντίφαση ή ~~αναφ~~ αντιλογία ή πάντα ψευδής αν $\forall V$ $V(\sigma)=\psi$ ή ισοδύναμα η $\sigma = A \wedge (\neg A)$ ή ισοδύναμα η $(\neg\sigma)$ είναι ένας νόμος.

④ Μια πρόταση σ λέγεται συνέπεια μιας άλλης πρότασης τ και γράφουμε $\tau \models \sigma$ αν $\forall V$ που επαληθεύει την τ, τότε αναγκαστικά επαληθεύει και την σ ή ισοδύναμα η $\tau \to \sigma$ είναι ένας νόμος.

Σχόλιο: Εάν η $\tau \models \sigma$, τότε δε συνεπάγεται ~~πάντα~~ ότι ισχύει η $\sigma \models \tau$.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η πρόταση ~~Α και Β~~ $\tau = (A \wedge B)$ έχει συνέπεια την $\sigma = B$, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή $\sigma \models \tau$

Απόδειξη: Έστω V τυχαία ερμηνεία.

1η) $V(\tau) = \alpha$, άρα έχουμε $V(A)=\alpha$ και $V(B)=\alpha$
$\Rightarrow V(B)=\alpha \Rightarrow V(\sigma)=\alpha$.

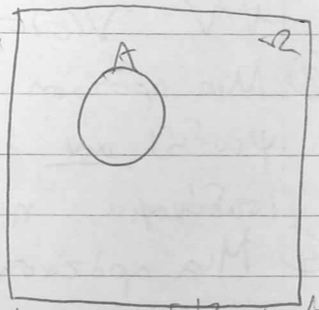
2η) $V(\tau)=\psi$, όμως ο ορισμός της συνέπειας δε μας αναγκάζει σε αυτήν την περίπτωση να ελέγξουμε αν επαληθεύεται η σ. Άρα η 2η) περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει.

Θδο η $\sigma \not\models \tau$. Θα κατασκευάσουμε μία ερμηνεία V στην οποία η σ να επαληθεύεται και παρ' όλα αυτά η τ να μην επαληθεύεται.

Έστω V έτσι ώστε $V(B)=\alpha$ και $V(A)=\psi$.
Άρα $V(\sigma)=\alpha$ και $V(\tau) = \alpha \cap \psi = \psi$. Άρα η τ δεν είναι συνέπεια της σ

Σχόλιο: Οι ισότητες μεταξύ 2 συνόλων στη θεωρία συνόλων μας βοηθάνε να αναπαραστήσουμε μαθηματικούς νόμους, αλλά και ισοδυναμίες στη μαθηματική λογική.

Παράδειγμα①: Έστω A ένα σύνολο, υποσύνολο του συνόλου αναφοράς Ω. $(A^c)^c = A$, δηλαδή ας ονομάσουμε Γ την πρόταση "$x \in A$". Έχουμε $\neg\Gamma$ εκφράζουμε το γεγονός "$x \notin A$". Έχουμε $\neg(\neg\Gamma)$ εκφράζουμε το γεγονός ότι δεν ισχύει "$x \notin A$". Άρα $\neg(\neg\Gamma) \equiv \Gamma$. και γενικά μπορούμε να δείξουμε ότι $\forall \sigma$ ισχύει $\neg(\neg\sigma) \equiv \sigma$.



σ	$\neg\sigma$	$\neg(\neg\sigma)$
α	ψ	α
ψ	α	ψ

η πρώτη και η τελευταία στήλη είναι ακριβώς ίδια. Αφού ισχύει αυτό υπάρχει ισότητα των 2 προτάσεων.

Νόμοι De Morgan:

$$(A \wedge B)^c = A^c \cup B^c \quad , \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c .$$

Νόμοι De Morgan στη μαθηματική λογική:

$$\neg(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = (\neg\sigma_1) \wedge (\neg\sigma_2) \quad , \quad \neg(\sigma_1 \vee \sigma_2) = (\neg\sigma_1) \vee (\neg\sigma_2) .$$

Νόμοι απορρόφησης: $\Omega \cap A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$,
$\phi \wedge A = \phi$, $\phi \cup A = A$

Νόμοι απορρόφησης στη μαθηματική λογική:

Το Ω αντιστοιχεί στη ταυτολογία

Μια οποιαδήποτε ταυτολογία $\wedge\ \sigma = \sigma$
ταυτ. $\vee\ \sigma =$ ταυτ.
αντίφαση $\wedge\ \sigma =$ αντ.
αντίφ. $\vee\ \sigma = \sigma$

$A\cup A^c=\Omega$, $\sigma \vee (\neg\sigma)$ = ταυτ. Νόμος αποκλείσεως τρίτου
$A\cap A^c=\phi$, $\sigma \wedge (\neg\sigma)$ = αντίφ.

Επιμεριστικοί νόμοι
$A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$, $\sigma1 \vee (\sigma2 \wedge \sigma3)=(\sigma1\vee\sigma2)\wedge(\sigma1\vee\sigma3)$
$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$, $\sigma1\wedge(\sigma2\vee\sigma3)=(\sigma1\wedge\sigma2)\vee(\sigma1\wedge\sigma3)$.

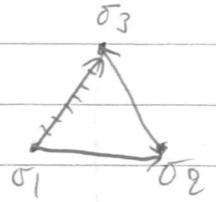
Αντιμεταθετικοί νόμοι: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

Αντιμεταθετικοί νόμοι στη Μαθηματική λογική: $\sigma1\vee\sigma2=\sigma2\vee\sigma1$, $\sigma1\wedge\sigma2=\sigma2\wedge\sigma1$.

προσεταιριστικοί νόμοι: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

προσ νόμοι στη λογική: $\sigma1\vee(\sigma2\vee\sigma3)=(\sigma1\vee\sigma2)\vee\sigma3$
$\sigma1\wedge(\sigma2\wedge\sigma3)=(\sigma1\wedge\sigma2)\wedge\sigma3$.

Πρώτος συλλογιστικός νόμος του Αριστοτέλη:
$(\sigma2\to\sigma3)\to((\sigma1\to\sigma2)\to(\sigma1\to\sigma3))$.



2ος συλλογιστικός νόμος του Αριστ.

$(\sigma1\to\sigma2)\to((\sigma2\to\sigma3)\to(\sigma1\to\sigma3))$

Πρόταση: Αν είναι γνωστό ότι $\sigma1=\sigma2$ αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\sigma1\leftrightarrow\sigma2$ είναι ένας νόμος των μαθηματικών.

Απόδειξη: "⇒"

σ1	σ2	σ1 ⟷ σ2
α	α	α
ψ	ψ	α

Υποθέτουμε ότι $\sigma1=\sigma2$. Θδο $\sigma1\leftrightarrow\sigma2$ είναι νόμος.

Από τον παραπάνω αληθοπίνακα έχουμε ότι η $\sigma1\leftrightarrow\sigma2$ είναι πάντοτε αληθινή. ΟΕΔ. (τέλειωσε)

"⇐" Έστω $\sigma1\leftrightarrow\sigma2$ είναι νόμος. Θδο $\sigma1=\sigma2$.

~~Έστω μία ερμηνεία~~

σ1	σ2	σ1 ⟷ σ2	
α	α	α	✓
α	ψ	ψ	αποκλείεται!!!
ψ	α	ψ	—»—
ψ	ψ	α	✓

Από τον παραπάνω αληθοπίνακα συμπεραίνουμε ότι οι μόνες δυνατές ερμηνείες είναι η 1η και η 4η, δηλ. όταν η σ1 και η σ2 παίρνουν ίδιες αληθοτιμές.

$(A \wedge B \wedge (\neg\Gamma)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge \Gamma) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge \Gamma) \vee$
$((\neg A) \wedge B \wedge (\neg\Gamma)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg\Gamma))$.

$\neg(\Delta\text{ΚΜ}\ \text{της}\ \sigma) = ((\neg A) \vee (\neg B) \vee \Gamma) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg\Gamma))$
$\wedge (A \vee$ [illegible] $B \vee (\neg\Gamma)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee \Gamma) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg\Gamma)) =$
$= (\Sigma\text{ΚΜ})\sigma$

Παράδειγμα:	A	B	Γ	Δ	E	σ	¬σ
4 περιπτ. ←	α	ψ	?	α	?	α	ψ
4 περ. ←	?	α	α	?	ψ	α	ψ
όλοι οι υπόλοιποι	?	?	?	?		ψ	α
περιπτώσεις ψέματα.							

$2^5 - 8 = 32 - 8 = 24$ περιπτώσεις

$(A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee (B \wedge \Gamma \wedge (\neg E)) = \Delta\text{ΚΜ}\sigma$

$((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee B) \wedge ((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee \Gamma) \wedge ((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee (\neg E)) =$

$= (A \vee B) \wedge ((\neg B) \vee B) \wedge (\Delta \vee B) \wedge (A \vee \Gamma) \wedge ((\neg B) \vee \Gamma) \wedge (\Delta \vee \Gamma) \wedge$
$\wedge (A \vee (\neg E)) \overset{T}{\wedge} ((\neg B) \vee (\neg E)) \wedge (\Delta \vee (\neg E)) =$

$= (A \vee B) \wedge (\Delta \vee B) \wedge (A \vee \Gamma) \wedge (\neg B \vee \Gamma) \wedge (\Delta \vee \Gamma) \wedge (A \vee (\neg E))$
$\wedge (\neg B \vee \neg E) \wedge (\Delta \vee \neg E)$ η ΣΚΜ της σ.
που αποτελείται μόνο από 8 παράγοντες.

Παράδειγμα: Να βρείτε τη ΣΚΜ της σ με αληθοπίνακα τον

A	B	Γ	Δ	E	Z	H	σ
	σε	όλες τις περιπτώσεις				ψ	ψ

$\sigma =$ αντιλογία $\equiv \square = A \wedge (\neg A)$ ΣΚΜ
ΣΚΜ≡ΔΚΜ.

Σχόλιο: Εάν γνωρίζουμε την ΔΚΜ ή την ΣΚΜ μιας πρότασης σ, τότε ουσιαστικά γνωρίζουμε τα αληθοτιμή τη σ και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε πανεύκολα και άρα $\sigma_1=\sigma_2$ (ΟΕΔ).

Σχόλιο: **Ορισμός:** μία πρόταση σ θα τη λέμε επαληθεύσιμη αν υπάρχει ερμηνεία V έτσι ώστε $V(\sigma)=\alpha$. Όμοια η σ θα λέγεται απλά επαληθεύσιμη εάν είναι επαληθεύσιμη, αλλά όχι ταυτολογία. ή με άλλα λόγια μια απλά επαληθεύσιμη δεν μπορεί να αληθεύει πάντα και άρα υπάρχουν δύο διαφορετικές ερμηνείες V_1 και V_2 ώστε $V_1(\sigma)=\alpha$ και $V_2(\sigma)=\psi$.

Άσκηση: Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απλά επαληθεύσιμες;

1) $((A\to B)\to A)\to A$, 2) $((A\to B)\to A)\to B$,
3) $((A\to B)\to B)\to A$

Λύση:

1)

Νόμος του Pierce

A	B	A→B	(A→B)→A	((A→B)→A)→A
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

ταυτολογία ✓.

2)

A	B	A→B	(A→B)→A	((A→B)→A)→B
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

απλά επαληθεύσιμη.

3)

A	B	A→B	(A→B)→B	((A→B)→B)→A
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	α	ψ
ψ	ψ	α	ψ	α

απλά επαληθεύσιμη.

Νόμοι συνεπαγωγής: Εις άτοπον απαγωγή $(\sigma_1\to\sigma_2)\leftrightarrow((\neg\sigma_2)\to(\neg\sigma_1))$. είναι νόμος

Σχόλιο: Από την πρόταση που αποδείξαμε προηγουμένως προκύπτει ότι ισχύει η ισότητα $σ1 \to σ2 = (\neg σ2) \to (\neg σ1)$. Δηλαδή για να συμπεράνουμε τη σ2 από τη σ1 μπορούμε να κάνουμε το εξής τρικ! Να υποθέσουμε ότι ισχύει η άρνηση της σ2 και να προσπαθήσουμε να συμπεράνουμε την άρνηση της σ1.

π.χ. Εάν έρθει το Μίνωος, εγώ θα φύγω. Είναι λογικά ισοδύναμο με το: Εάν δε φύγω, δε θα έρθει το νήσος Μίνωος.

Εάν καπνίζω πολύ, τότε υπάρχει πιθανότητα να πεθάνω.
είναι ισοδύναμο με το: Εάν δεν υπάρχει πιθανότητα να πεθάνω,
τότε δεν καπνίζω πολύ.

9/3/15

Συμβολισμοί: Με □ θα συμβολίζουμε μια οποιαδήποτε αντιλογία. Ενώ με T μια οποιαδήποτε ταυτολογία.

β) **Κανονικές μορφές:**

- **Στοιχειώδης τύπος:** Μια ατομική πρόταση π.χ. A ή η άρνησή της $\neg A$.
- **παράγοντας ή προγραμματικός τύπος:** ονομάζουμε μία διάζευξη ενός πεπερασμένου συνόλου στοιχειωδών τύπων.

π.χ. $(\neg A) \vee B \vee (\neg \Gamma)$

Ορισμός: (Συζευκτική κανονική μορφή (ΣΚΜ)) ονομάζουμε έναν παράγοντα ή μία σύζευξη κάποιων παραγόντων

π.χ. $$(\underbrace{(\neg A) \vee B \vee (\neg \Gamma)}_{σ1}) \wedge (\underbrace{A \vee (\neg B) \vee (\neg \Gamma) \vee (\neg \Delta)}_{σ2})$$

Διαζευκτική κανονική μορφή (ΔΚΜ): εννοούμε μία διάζευξη $σ1 \vee σ2 \vee \ldots \vee σκ$ όπου κάθε $σi, i=1,\ldots,κ$ είναι μία σύζευξη στοιχειωδών τύπων. Ειδικά για $κ=1$, η ~~σύζευξη~~ σ1 θεωρείται από μόνη της ΔΚΜ.

π.χ. $σ1 = (\neg A) \wedge (B) \wedge (\neg Λ)$ είναι μια ΔΚΜ.

$σ2 = A \wedge (\neg B) \wedge \Gamma$

Η $σ1 \vee σ2$ είναι ΔΚΜ.

$(A \wedge B \wedge (\neg\Gamma)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge \Gamma) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge \Gamma) \vee$
$((\neg A) \wedge B \wedge (\neg\Gamma)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge (\neg\Gamma))$.

$\neg(\Delta K M_{\neg\sigma}) = ((\neg A) \vee (\neg B) \vee \Gamma) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg\Gamma))$
$\wedge (A \vee$ [illegible] $B \vee (\neg\Gamma)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee \Gamma) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg\Gamma)) =$
$= (\Sigma K M)_\sigma$

Παράδειγμα:

	A	B	Γ	Δ	E	σ	¬σ
4 ζητ. ←	α	ψ	?	α	?	α	ψ
4 γρ. ←	?	α	α	?	ψ	α	ψ
όλοι οι υπόλοιποι περιπτώσεις ψέματα	?	?	?	?		ψ	α

$2^5 - 8 = 32 - 8 = 24$ περιπτώσεις

$(A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee (B \wedge \Gamma \wedge (\neg E)) = \Delta K M_\sigma$

$((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee B) \wedge ((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee \Gamma) \wedge ((A \wedge (\neg B) \wedge \Delta) \vee (\neg E)) =$

$= (A \vee B) \wedge \underbrace{(\neg B \vee B)} \wedge (\Delta \vee B) \wedge (A \vee \Gamma) \wedge ((\neg B) \vee \Gamma) \wedge (\Delta \vee \Gamma) \wedge$
$\wedge (A \vee (\neg E)) \overset{T}{\wedge} ((\neg B) \vee (\neg E)) \wedge (\Delta \vee (\neg E)) =$

$= (A \vee B) \wedge (\Delta \vee B) \wedge (A \vee \Gamma) \wedge (\neg B \vee \Gamma) \wedge (\Delta \vee \Gamma) \wedge (A \vee (\neg E))$
$\wedge (\neg B \vee \neg E) \wedge (\Delta \vee \neg E)$ η ΣΚΜ της σ.
που αποτελείται μόνο από 8 παράγοντες.

Παράδειγμα: Να βρείτε τη ΣΚΜ της σ με αληθοπίνακα τον

A	B	Γ	Δ	E	Z	H	σ
	σε	όλες τις περιπτώσεις				ψ	ψ

σ = αντιλογία $\equiv \square = A \wedge (\neg A)$ ΣΚΜ
ΣΚΜ≡ΔΚΜ.

Σχόλιο: Εάν γνωρίζουμε την ΔΚΜ ή την ΣΚΜ μιας πρότασης σ, τότε ουσιαστικά γνωρίζουμε τα πάντα για τη σ και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε παντελώς του αληθοπίνακά της.

π.χ. $σ = (Α \wedge (\neg Ε) \wedge Ζ) \vee (Γ \wedge Ε \wedge Β)$ είναι ΔΚΜ.

	Α	Β	Γ	Ε	Ζ	σ
4 γραμ →	α	?	?	ψ	α	α
4 γραμ →	α	?	α	α	?	α
		όλες οι υπόλοιπες				ψ.

15/3/15

$Σ \not\models σ$ Παράδειγμα: $Σ = \{Α \leftrightarrow Γ, Β \leftrightarrow Δ\ (Α \vee Β) \wedge (Γ \vee Δ)\}$,
$σ = (Α \wedge Β) \vee (Γ \wedge Δ)$

Α	Β	Γ	Δ	$Α \leftrightarrow Γ$	$Β \leftrightarrow Δ$	$(Α \vee Β) \wedge (Γ \vee Δ)$	σ
α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	ψ ???
α	ψ	α	ψ	α	α	α	
ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	ψ	

~~Σχόλιο: Στην τελευταία περίπτωση οι υποθέσεις του Σ δεν επαληθεύονται. Άρα δε μας απασχολεί. με το $Σ \models σ$.~~

~~?! Από τη 2η γραμμή του αληθοπίνακα συμπεραίνουμε ότι το $Σ \not\models σ$.~~

~~Έστω Σ ένα σύνολο υποθέσεων και σ μία πρόταση. Τότε για να δείξουμε ότι $Σ \models σ$ υπάρχουν πολλοί τρόποι όπως~~

~~1ος) με τον ορισμό.,~~

~~2ος) με αληθοπίνακες, 3ος) χρησιμοποιώντας κατάλληλους κανόνες~~ και προτάσεις αναφορικά με το $\models$.

π.χ. Ν.δ.ο. $Α \models ((\neg Β) \rightarrow (Δ \rightarrow Α))$. $Σ = Α$, $σ = ((\neg Β) \rightarrow (Δ \rightarrow Α))$.

①ος) Έστω V μία τυχαία εκτίμηση αλήθειας με $V(Α) = α$.

$V(σ) = α$? Έχουμε $V(Δ \rightarrow Α) = α$ διότι $V(Α) = α$.

Ομοίως $V(σ) = V((\neg Β) \rightarrow (Δ \rightarrow Α)) = V(\neg Β) -] V((Δ \rightarrow Α)) =$
$= V(\neg Β) -] α = α$.

0,30€ βαζσδκυ

10/03 Όταν ορίζουμε τη ΔΚΜ ή τη ΣΚΜ μιας πρότασης σ είναι πολύ εύκολο να βρούμε για ποιες εκτιμήσεις επαληθεύεται η πρότασή μας.

π.χ.

$$\sigma = \underbrace{(A \wedge B)}_{V_1} \vee \underbrace{((\neg B) \wedge \Gamma \wedge (\neg \Delta))}_{V_2} \vee \underbrace{((\neg A) \wedge (\neg B))}_{V_3}$$

Έστω V_1 η οποία επαληθεύει τη σύζευξη $A \wedge B$, δηλ.

$V_1(A) = \alpha$, $V_1(B) = \alpha$

Έστω V_2, -//-, -//-, δηλ.

$V_2(B) = \psi$, $V_2(\Gamma) = \alpha$, $V_2(\Delta) = \psi$

Έστω V_3, -//- -//- -//-, δηλ.

$V_3(A) = \psi$, $V_3(B) = \psi$

Για όλες τις άλλες εκτιμήσεις αλήθειας, η σ διαψεύδεται

$V(A) = \alpha$, $V(B) = \psi$, $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \alpha \Rightarrow V(\sigma) = \psi$

π.χ. $\sigma_1 = (A \vee B) \wedge ((\neg B) \vee \Gamma \vee (\neg \Delta)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B)) \Rightarrow$ ΣΚΜ

$V_1(A) = \alpha$, $V_1(B) = \psi$ ✓ [◆ Σχόλιο(*)]

Σχόλιο: Κάθε πρόταση σ_1 γραμμένη σε ΣΚΜ μορφή, μπορεί εύκολα να γραφεί με τη μορφή ενός συνόλου. Π.χ. η σ_1:

$\sigma_1 \rightarrow \{\{A, B\}, \{\neg B, \Gamma, \neg \Delta\}, \{\neg A, \neg B\}\}$ Τα εσωτερικά κόμματα παριστάνουν διαζεύξεις και τα εξωτερικά μεταξύ των συνόλων, παριστάνουν συζεύξεις.

Για να επαληθεύεται η σ_1, πρέπει κάθε παράγοντάς της να επαληθεύεται.

Έστω $V_1(A)=\alpha$, $V_1(B)=\psi \Rightarrow \left.\begin{matrix} V_1(A\vee B)=\alpha \;,\; V_1((\neg A)\vee(\neg B))=\alpha \\ V_1((\neg B)\vee\Gamma\vee(\neg\Delta))=\alpha \end{matrix}\right\}=\alpha$

Έστω $V_2(B)=\alpha$, $V_2(\Gamma)=\alpha$, $V_2(A)=\psi \Rightarrow V_2(\sigma)=\alpha$

Έστω $V_3(B)=\alpha$, $V_3(\Delta)=\psi$, $V_3(A)=\psi \Rightarrow V_3(\sigma)=\alpha$

▸ Για οποιαδήποτε άλλη εκτίμηση αληθείας, η $V(\sigma_1)=\psi$

∘ Σχόλιο

Έστω ότι η ΣΚΜ μιας πρότασης σ με n-πλήθος ατομικές προτάσεις, έχει m-παράγοντες με $m \geq 1$. Τότε η $ΔΚΜ_{(\sigma)}$ έχει το πολύ $(2^n - m)$-όρους

π.χ.

Για τη σ_1, έχουμε 3 παράγοντες $(m=3)$

Άρα η ΔΚΜ της σ έχει το πολύ $2^4 - 3 = 16 - 3 = 13$.

Ορισμός

Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων της Λ.Π. Το Σ θα λέγεται συνεπές σύνολο (ή επαληθεύσιμο) αν υπάρχει μία εκτίμηση τουλάχιστ V που να επαληθεύει κάθε πρόταση του Σ.

Ορισμός.

Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων της Λ.Π.. Το Σ θα λέγεται ασυνεπές σύνολο (ή μη-επαληθεύσιμο) αν-ν δεν υπάρχ εκτίμηση V που να επαληθεύει κάθε πρόταση σ.

Π.χ.

$\Sigma = \{ (A\wedge B)\to\Gamma \,,\, A\to B \}$ A B Γ

A	B	Γ	$A\wedge B$	$(A\wedge B)\to\Gamma$	$A\to B$
α	α	α	α	α	α ✓

Άρα το Σ είναι συνεπές.

Π.χ.

$$\Sigma_1 = \cancel{\{}\, \Sigma \cup \underbrace{\{ A \wedge (\neg A) \}}_{\text{αντιλογία}}$$

□

Το Σ_1 είναι ασυνεπές.

Ορισμός

Έστω σ μία πρόταση και Σ ένα σύνολο προτάσεων
Τότε λέμε ότι το Σ έχει <u>συνέπεια</u> το σ ή διαφορετικά το σ είναι συνέπεια του Σ (κ' θα γράφουμε $\models \sigma$) αν-ν για κάθε ερμηνεία V, εάν η V επαληθεύει όλες τις προτάσεις, τότε αναγκαστικά επαληθεύει και τη σ.

Π.χ.

σ_1 = "Ο Χρήστος αγαπάει τη Νικολέτα ⓗ αγαπά την Κατερίνα"
σ_2 = "Εάν ο Χρήστος αγαπάει τη Νικολέτα, τότε αγαπάει την Κατερίνα"
σ_3 = "Ο Χρήστος αγαπάει την Κατερίνα".

$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$
A = «Ο Χρήστος αγαπάει τη Νικολέτα»
B = «Ο Χρήστος αγαπάει την Κατερίνα»

$\Sigma = \{ A \vee B,\ A \rightarrow B \}$

1ο Ερώτημα: Είναι το $(A \vee B)$: συνεπές σύνολο;
Ζητάμε V, με $V(\sigma_1) = \alpha$ και $V(\sigma_2) = \alpha$
$V(A \vee B) = \alpha$ και $V(A \rightarrow B) = \alpha$
Προφανώς τέτοιο V υπάρχει ⇒ Σ: συνεπές σύνολο

2ο Ερώτημα: $\Sigma \models \sigma_3$;

Μέθοδος 1η: Με αληθοπίνακες, βρίσκουμε τις γραμμές του αληθοπίνακα που επαληθεύονται όλες οι υποθέσεις του Σ.

(Εάν δεν υπάρχουν τέτοιες γραμμές, τότε το Σ: <u>ασυνεπές</u> και όπως θα δούμε, <u>κάθε πρόταση σ</u> είναι συνέπεια του Σ)

Στη συνέχεια ελέγχουμε για τις παραπάνω γραμμές, εάν επαληθεύεται και η $σ_3$. Εάν πράγματι συμβαίνει αυτό, τότε η $σ_3$ είναι συνέπεια του Σ. Διαφορετικά δεν είναι.

Σχολιο (*)

Για να επαληθεύσουμε μια πρόταση σ, γραμμένη σε ΣΚΜ, θα πρέπει να επαληθεύσουμε κάθε παράγοντα της σ

Για πρόταση γραμμένη σε ΔΚΜ, θα πρέπει να επαληθεύσουμε έναν τουλάχιστον όρο της σ.

A	B	A∨B	A→B	B	
α	α	α	α	α	: ✓
α	ψ	α	(ψ)		: Δεν μας ενδιαφέρει.
ψ	α	α	α	α	: ✓
ψ	ψ	(ψ)			: Δεν μας ενδιαφέρει.

2η Μέθοδος: Παίρνουμε μια τυχαία αποτίμηση V, η οποία επαληθεύει όλες τις προτάσεις του Σ (υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε τέτοια V) και αποδεικνύουμε ότι $V(σ)=α$.

Έστω $V(A∨B)=α$, $V(A→B)=α$

1η ~~περίπτωση~~ $V_1(A)=α$, $V_1(B)=α$, τότε προφανώς και το $σ_3$ επαληθεύεται.

2η περίπτωση $V_2(B)=α$, $V_2(A)=?$ οπότε μέσω της V_2 επαληθεύ~~εται~~ονται όλες οι προτάσεις του Σ

Τότε προφανώς και το $σ_3=B$ επαληθεύεται.

$\boxed{Σ \models σ_3}$

π.χ. $\Sigma = \{A\}$, $\sigma = ((\neg B) \rightarrow (\Delta \rightarrow A))$ $\Sigma \models \sigma$;

A	B		Δ	A	¬B	Δ→A	σ	
α	?		?	α		α	α	:(✓)

Πράγματι η $\Sigma \models \sigma$.

— · — Παράδειγμα — · —

$\Sigma = \{ B \rightarrow A, \Gamma \rightarrow \Delta, \Delta \rightarrow B, B \vee \Gamma \vee \Delta \}$, $\sigma = A \wedge B$

(1) Σ συνεπές (2) $\Sigma \models \sigma$;

Λύση

Σχόλιο: Εάν καταλήξουμε να αποδείξουμε ότι το Σ: ασυνεπές τότε από το Σ μπορούμε να πάρουμε σαν συνέπεια κάθε πρόταση, άρα και τη σ.

(1)

A	B	Γ	Δ	B→A	Γ→Δ	Δ→B	B∨Γ∨Δ	σ
α	α	α	α	α	α	α	α	

Από την 1η γραμμή διαπιστώνουμε ότι μπορούν να επαληθευτούν όλες οι προτάσεις του Σ.
Άρα το Σ: συνεπές.

(2)

A	B	Γ	Δ	B→A	Γ→Δ	Δ→B	B∨Γ∨Δ	σ	
α	α	?	α	α	α	α	α	α	:(✓)
ψ	ψ		α	α		ⓟ ψ	α		:Δεν μας απασχολεί
?	ψ	α	ψ	α	ψ		α		:Δεν μας απασχολεί
α	ψ	ψ	α	α	α	ψ	α		: —"— —"—
ψ	α			ψ					: —"— —"—

Άρα είναι <u>Συνέπεια</u>.

◦ <u>Χρήσιμες Προτάσεις</u>

(1) Εάν το Σ είναι ασυνεπές σύνολο, Τότε κάθε πρόταση σ είναι συνέπειά του.

(2) (Κανόνας Πεπερασμένης Σύζευξης). Εάν Σ πεπερασμένο, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, τότε $\Sigma \models \sigma$ <u>αν-ν</u> $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ έχει συνέπεια το Σ.

(3) (Κανόνας του Συμπεράσματος). $\Sigma \models \sigma$ <u>αν-ν</u> $\Sigma \cup (\neg\sigma)$ είναι <u>ασυνεπές</u>, δηλαδή για νδο ένα συμπέρασμα σ αρκεί να πάρουμε την άρνηση του συμπεράσματος μέσα στις υποθέσεις μας και να καταλήξουμε σε <u>ασυνέπεια</u>.

$\cancel{n^2} - \cancel{nr} - \cancel{n_1 n} + n_1 r \geq n^2 - \cancel{n n_1} - \cancel{nr} + nk$

$n_1 r - nk \geq 1 \Rightarrow \quad n_1 r \geq nk \Rightarrow$

$n \leq \frac{n_1 r}{k}$

του αληθοπίνακά της.

π.χ. $\sigma = (A \land (\neg E) \land Z) \lor (\Gamma \land E \land B)$ είναι ΔΚΜ.

	A	B	Γ	E	Z	σ
4 γραμ →	α	?	?	ψ	α	α
4 γραμ →	α	?	α	α	?	α
		όλες οι υπόλοιπες				ψ.

15/3/15

$\Sigma \not\models \sigma$ Παράδειγμα: $\Sigma = \{A \leftrightarrow \Gamma, B \leftrightarrow \Delta\ (A \lor B) \land (\Gamma \lor \Delta)\}$, $\sigma = (A \land B) \lor (\Gamma \land \Delta)$

A	B	Γ	Δ	A↔Γ	B↔Δ	(A∨B)∧(Γ∨Δ)	σ
α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	ψ ???
α	ψ	α	ψ	α	α	α	
ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	ψ	

Σχόλιο: Στην τελευταία περίπτωση οι υποθέσεις του Σ δεν επαληθεύονται. Άρα δε μας απασχολεί. με το $\Sigma \models \sigma$.

Από τη 2η γραμμή του αληθοπίνακα συμπεραίνουμε ότι το $\Sigma \not\models \sigma$.

Έστω Σ ένα σύνολο υποθέσεων και σ μία πρόταση. Τότε για να δείξουμε ότι $\Sigma \not\models \sigma$ υπάρχουν πολλοί τρόποι όπως

1ος) με τον ορισμό.,

2ος) με αληθοπίνακες, 3ος) χρησιμοποιώντας κατάλληλους κανόνες και προτάσεις αναφορικά με την $\models$.

π.χ. Ν.δ.ο. $A \models ((\neg B) \to (\Delta \to A))$. $\Sigma = A$, $\sigma = ((\neg B) \to (\Delta \to A))$.

①ος) Έστω V μία τυχαία εκτίμηση αλήθειας με $V(A) = \alpha$.

$V(\sigma) = \alpha$? Έχουμε $V(\Delta \to A) = \alpha$ διότι $V(A) = \alpha$.

Όμοια $V(\sigma) = V((\neg B) \to (\Delta \to A)) = V(\neg B) -] V((\Delta \to A)) =$

$= V(\neg B) -] \alpha = \alpha$

2ος

A	B	Δ	A	(Δ→A)	(¬B)	(¬B)→(Δ→A)
α	?	?	α	α	?	α

όποτε το Σ επαληθεύεται, τότε και το $\sigma =$
$= ((\neg B) \to (\Delta \to A))$ επαληθεύεται.

3ος Κανόνας συνεπαγωγής: $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \Leftrightarrow ((\neg\sigma_1) \overset{\vee}{\cancel{\wedge}} (\sigma_2))$

Άρα $\Delta \to A \equiv (\neg\Delta) \vee (A)$

$(\neg B) \to (\Delta \to A) \equiv (\neg B) \to ((\neg\Delta) \vee A) = (\neg(\neg B)) \vee ((\neg\Delta) \vee A) =$

$= B \vee ((\neg\Delta) \vee A)$

Αφού το σ είναι ισοδύναμο με μια διάζευξη κάποιας ~~ατομικών~~ προτάσεων μία εκ των οποίων είναι η υπόθεσή μας (αληθεύει), είναι προφανές ότι η σ αληθεύει σε κάθε περίπτωση που η υπόθεσή μας αληθεύει.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΠΕΙΑΣ: (1) Κανόνας δυαδικής επίλυσης: Έστω Σ περιέχει προτάσεις από παράγοντες και εμφανίζεται κάποια σύγκρουση μεταξύ 2 παραγόντων, τότε μπορούμε να επιλύσουμε αυτή τη σύγκρουση.

Π.χ. $\Sigma = \{ A \vee B \vee \ldots, (\neg A) \vee B' \vee \ldots, \ldots \}$

$\models \{ B \ldots \vee B' \vee \ldots \}$

συμπέρασμα

ΣΧΟΛΙΟ: Έστω A, B, Γ, Δ σύνολα.

Τότε $(A^c \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Delta) \subseteq B \cup \Gamma \cup \Delta$

(2) Κανόνας πεπερασμένης σύζευξης: Αν $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, τότε $\Sigma \models \sigma$ αν $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \ldots \wedge \sigma_n \models \sigma$.

(3) Κανόνας του συμπεράσματος: $\Sigma \models (\sigma_1 \to \sigma_2)$ αν $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \to \sigma_2$, δηλαδή εάν θέλουμε νδο την υποθετική πρόταση $\sigma_1 \to \sigma_2$, τότε μπορούμε να προσθέσουμε στις υποθέσεις μας Σ την υπόθεση σ_1 και να προσπαθήσουμε νδο απλά τη σ_2.

Π.χ. $\Sigma \models \sigma_1 \to (\sigma_2 \to (\sigma_3 \to \sigma_4))$ είναι ισοδύναμο:

$\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models \sigma_2 \to (\sigma_3 \to \sigma_4) \overset{\text{ισοδύναμο}}{\equiv} \Sigma \cup \{\sigma_1, \sigma_2\} \models \sigma_3 \to \sigma_4 \equiv$

$\Sigma \cup \{\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3\} \models \sigma 4$.

Σχόλιο για το ①: Γενικά αν σ1, σ2, σ3 είναι 3 οποιεσδήποτε προτάσεις και $\Sigma = \{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$.

④ Modus Ponens: $\{\sigma, \sigma \to \tau\} \models \tau$

Σχόλιο: Επειδή $\sigma \to \tau$ είναι ισοδύναμο με $(\neg\sigma) \vee \tau$ έχουμε $\{\sigma, \neg\sigma \vee \tau\} \models \tau$ από κανόνα επίλυσης.
Άρα ο κανόνας Modus Ponens είναι υποπερίπτωση του κανόνα επίλυσης.

⑤ Κανόνας ενδιάμεσου αποτελέσματος: Έστω $\Sigma \models \sigma'$ και θέλουμε νδο $\Sigma \models \sigma$. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ισοδυναμία:

$\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma \cup \{\sigma'\} \models \sigma$.

⑥ Αν □ είναι μια οποιαδήποτε αντιλογία, τότε $\Sigma \models \square$ ανν Σ ασυνεπές. Όμοια αν Τ είναι μια οποιαδήποτε ταυτολογία, τότε $\Sigma \models T$ και όμοια $\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma \cup \{T\} \models \sigma$ δηλαδή οι ταυτολογίες δεν παίζουν κανένα ρόλο στις υποθέσεις μας Σ και άρα μπορούμε να τις απαλείψουμε από το Σ.

Σχόλιο: Εάν το Σ περιέχει μια □, τότε το Σ είναι δυστυχώς ασυνεπές και άρα το $\Sigma \models \sigma$, ∀ πρόταση σ.

⑦ $\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models \square$ ανν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ είναι ασυνεπές σύνολο.

Όμοια, $\Sigma \models (\neg\sigma)$ ανν $\Sigma \cup \{\neg(\neg\sigma)\} \models \square$. ανν $\Sigma \cup \{\overset{\neg\sigma}{\cancel{\sigma}}\} \models \square$ ανν $\Sigma \cup \{\sigma\}$ είναι ασυνεπές σύνολο.

Σχόλιο: Από ⑦ προκύπτει ότι $\Sigma \not\models \sigma$ ανν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ είναι συνεπές. (Επαληθεύσιμο).

π.χ. $\Sigma = \{A \leftrightarrow \Gamma, B \leftrightarrow \Delta, (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)\} \not\models \underbrace{(A \wedge B) \vee (\Gamma \wedge \Delta)}_{\alpha}$

α α ψ ψ σ α α

$\neg\sigma = (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\Gamma \vee (\neg\Delta))$, $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} = \{A \leftrightarrow \Gamma, B \leftrightarrow \Delta, (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta),$
$\underbrace{(\overset{\psi}{\neg A} \overset{\cap}{\vee} \overset{\alpha}{(\neg B)})}_{\alpha} \wedge \underbrace{(\overset{\psi}{\neg\Gamma} \overset{\cap}{\vee} \overset{\alpha}{(\neg\Delta)})}_{\alpha}\}$ είναι συνεπές.

α

✓ είναι συνεπές

Ιε $V(A) = \alpha$, $V(B) = \psi$, $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \psi$ ...

π.χ. $(A \models (\neg B)) \to (\Delta \to A)$ ανν $\{A, (\neg B)\} \models (\Delta \to A)$
ανν $\{A, (\neg B), \Delta\} \models A$ προφανώς ισχύει.

π.χ. $\Sigma = \{ \underset{①}{A \vee B \vee \Gamma}, \underset{②}{A \vee B \vee (\neg \Gamma)}, \underset{③}{A \vee (\neg B)}, \underset{⑤}{(\neg A) \vee \Gamma} \} \models \Gamma$

Από ①②: $\boxed{A \vee B}$, επιλύσαμε αφαιρώντας Γ.

Από ③,④: παίρνουμε A ⑥
και από ⑤,⑥ παίρνουμε το Γ.

17/3/15

⑧ Κανόνας Αντικατάστασης:
Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων και Σ' είναι το Σ στο οποίο έχουμε αντικαταστήσει κάποιες προτάσεις του με ισοδύναμες προτάσεις. Τότε $\forall$ πρόταση σ ισχύει: $\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma' \models \sigma$. Όμοια, ακόμα, αν $\sigma' \equiv \sigma$, τότε ισχύει $\Sigma \models \sigma$ ανν $\Sigma \models \sigma'$.

Απόδειξη: (δεύτερο κομμάτι) Έστω V τυχαία αποτίμηση και υποθέτουμε ότι $\Sigma \models \sigma$. Θδο $\Sigma \models \sigma'$. Υποθέτουμε ότι η V επαληθεύει κάποια πρόταση του Σ. Οπότε πρέπει νδο επαληθεύει και τη σ', δηλ. $V(\sigma') = \alpha$. Από τις υποθέσεις μας μπορούμε να πάρουμε $V(\sigma) = \alpha$. Αφού $\sigma' \equiv \sigma$ προκύπτει και $V(\sigma') = \alpha$. □

~~1ο Θεώρημα~~ Θεώρημα Συμπάγειας 1η μορφή: Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο προτάσεων. Τότε $\Sigma \models \sigma$ ανν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο Σ' του Σ, έστω $\Sigma' = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ έτσι ώστε $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \models \sigma$

παράδειγμα: $\Sigma = \{A_1, A_1 \to A_2, A_2 \to A_3, A_3 \to A_4, \ldots\}$
$\sigma = A_{200}$.

Θδο $\Sigma \models \sigma$. Ορίζουμε $\Sigma' = \{A_1, A_1 \to A_2, \ldots, A_{199} \to A_{200}\}$

Modus Ponens $\{\sigma_1, \sigma_1 \to \sigma_2\} \models \sigma_2$

$\{A_1, A_1 \to A_2\} \models A_2$, $\{A_2, A_2 \to A_3\} \models A_3$, $\{A_3, A_3 \to A_4\} \models A_4$

⋮

$\{A_{199}, A_{199} \to A_{200}\} \models \boxed{A_{200}}$ ✓

Θεώρημα συμπάγειας 2η μορφή: Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο προτάσεων. Τότε το Σ είναι συνεπές ανν για κάθε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ πεπερασμένο, το Σ' είναι συνεπές.

παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{ A_1, A_1 \to A_2, A_2, A_3, A_1 \to A_3, A_1 \to (A_2 \wedge A_3), A_2 \to A_3, A_2 \to (A_1 \wedge A_3), A_3 \to (A_1 \wedge A_2), \ldots$ γενικά $A_n \to$ μια πεπερασμένη σύζευξη από άτομα διαφορετικά του $A_n \}$.

Είναι άραγε επαληθεύσιμο? (συνεπές)

Έστω Σ' = τυχαίο υποσύνολο (πεπερασμένο) του Σ και ας υποθέσουμε ότι περιέχει προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (και μόνο). $\Sigma' \subseteq \{A_1, A_1 \to A_2, A_1 \to A_3, \ldots, A_1 \to A_n, \ldots, A_1 \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_2, \ldots, A_n$), $A_2 \to$ (πεπερ. σύζευξη των $A_1, A_3, \ldots, A_n$), $\ldots$, $A_n \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$)$\}$

Ορίζουμε $V(A_1) = \alpha = V(A_2) = V(A_3) = \ldots = V(A_n)$. Είναι προφανές ότι όλες οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν, και άρα η V επαληθεύει το Σ'. Άρα Σ' συνεπές.

Μαθηματική επαγωγή στη Λογική των Προτάσεων (ΛΠ):

Έστω P μία ιδιότητα και μας ζητάνε νδο για κάθε πρόταση σ της Λ.Π. ισχύει $P(\sigma)$.

Βήμα 1ο: Δείχνουμε ότι για κάθε ατομική πρόταση A ισχύει $P(A)$. επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $P(\sigma_1)$ και $P(\sigma_2)$ για 2 τυχαίες προτάσεις. Τότε δείχνουμε επίσης και τα παρακάτω:

$P(\neg \sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

19/3/15 • Σημαντικοί πίνακες του BETH:

Είναι αντεστραμμένα δυαδικά δένδρα, τα οποία έχουν κόμβους προτάσεις της Λ.Π. με κάποιο πρόσημο μπροστά. (α ή ψ)

Μαθ. λογική.

17/03/15

2η ώρα

(πχ) $\sigma = (((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3) \vee (\neg A_4))$

Νδο $\forall$ πρόταση σ το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων της είναι ίσο με το πλήθος των αριστερων.

Αποδ.

$P(\sigma)$ = Το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων της σ.

$\Delta.\Pi(\sigma) = A.\Pi.(\sigma)$.

Επίσης δείχνουμε ότι $\forall$ ατομική πρόταση σ, ισχύει η $P(\sigma)$. Εαν σ ατομική πρόταση τότε προφανως $\Delta\Pi(\sigma) = 0 = A\Pi(\sigma)$. (Τα ατομα δεν έχουν παρενθέσεις)

Θδο $P(\neg\sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$

$P(\neg\sigma_1) = \Delta\Pi(\neg\sigma_1) \overset{?}{=} A\Pi(\neg\sigma_1)$

Έχουμε $\left.\begin{aligned} \Delta\Pi(\neg\sigma_1) &= \Delta\Pi(\sigma_1)+1 \\ A\Pi(\neg\sigma_1) &= A\Pi(\sigma_1)+1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta\Pi(\sigma_1) = A\Pi(\sigma_1)$.

$P(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = \Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$

Έχουμε $\Delta\Pi(\sigma_1) = A\Pi(\sigma_1)$

$\Delta\Pi(\sigma_2) = A\Pi(\sigma_2)$.

$\left.\begin{aligned} \Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) &= \Delta\Pi(\sigma_1) + \Delta\Pi(\sigma_2) \\ A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) &= A\Pi(\sigma_1) + A\Pi(\sigma_2) \end{aligned}\right\}$ $\Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ αφού τα 2α μέλη είναι ίσα.

(πχ) Δείξτε ότι $\forall$ τυχαία αποτίμηση V και $\forall$ πρόταση σ η τιμή του $V(\sigma)$ είναι α ή ψ αλλα όχι συγχρονως και τα δύο.

$P(\sigma)$ = ~~θα~~ ή $V(\sigma) = \alpha$ ή $V(\sigma) = \psi$. αλλα όχι συγχρονως και οι 2 τιμές.

<u>1ο Βήμα</u>: έστω $\sigma = A$, για κάποια A ατομική πρόταση

Έχουμε από τον άριθμό της εκτίμησή της ότι $V(\sigma) = \alpha$.

ή $V(\sigma) = \psi$ αλλά όχι συγχρόνως. Άρα ισχύει η $P(\sigma)$.

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε $P(\sigma_1)$, $P(\sigma_2)$. Θδο $P(\neg\sigma_1)$, $P(\sigma_1 \land \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \lor \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

Θδο $P(\neg\sigma_1)$. Έχουμε ότι $V(\sigma) = a$ ή $V(\sigma) = \psi$, όχι μαζί.

Άρα δείξαμε την $P(\neg\sigma_1)$.

Θα δείξουμε τώρα την $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$.

Έχουμε ότι $V(\sigma_1) = a$ ή ψ αλλά όχι και τα 2 μαζί.

$V(\sigma_2) =$ ——— // ———.

1η περίπτωση : $V(\overset{a}{\sigma_1} \to \overset{a}{\sigma_2}) = a$

2η —//— : $V(\overset{a}{\sigma_1} \to \overset{\psi}{\sigma_2}) = \psi$

3η —//— : $V(\overset{\psi}{\sigma_1} \to \overset{a}{\sigma_2}) = a$

4η —//— : $V(\overset{\psi}{\sigma_1} \to \overset{\psi}{\sigma_2}) = a$

Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε για την $\sigma_1 \to \sigma_2$ αληθοτιμή a ή ψ αλλά όχι και τα 2 μαζί. Όμοια για τις $P(\sigma_1 \lor \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \land \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ //

(πχ) Έστω V τυχαία ερμηνεία και σ μια πρόταση που περιέχει κάποια από τα άτομα $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Νδο αν V' μια άλλη ερμηνεία τ.ω. $V(A_1) = V'(A_1)$, $V(A_2) = V'(A_2), \ldots, V(A_n) = V'(A_n)$ τότε αναγκαστικά $V(\sigma) = V'(\sigma)$.

Αποδ.

$P(\sigma) = \square$,

Βήμα 1ο: $\sigma = A$, μια οποιαδήποτε ατομική πρόταση.

$P(A) =$; 1) Αν $A = A_1$ ή κάποια από τα $A_i, i = 1, \ldots, n$. τότε προφανώς ισχύει $V(A) = V(A')$.

2) Αν $A \neq A_i$, $i = 1, \ldots, n$ αυτό δεν γίνεται γιατί η σ πρέπει πρέπει να περιέχει κάποια από αυτά.

Επαγ. βήμα: $P(\neg\sigma_1)$ Θδο αν $V(A_{*}) = V(A_i)$...

τότε $V(\neg\sigma_1) = V'(\neg\sigma_1) \Leftrightarrow -V(\sigma_1) = -V(\sigma_1) \Leftrightarrow$
$V(\sigma_1) = V'(\sigma_1)$ που ισχύει λόγω υπόθεσης $P(\sigma_1)$.
Όμοια αποδεικνύω τα $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$

Θεώρημα συμπάγειας 2η μορφή: Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο προτάσεων. Τότε το Σ είναι συνεπές ανν για κάθε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ πεπερασμένο, το Σ' είναι συνεπές.

παράδειγμα: Έστω $\Sigma = \{ A_1, A_1 \to A_2, A_2, A_3, A_1 \to A_3, A_1 \to (A_2 \wedge A_3), A_2 \to A_3, A_2 \to (A_1 \wedge A_3), A_3 \to (A_1 \wedge A_2), \ldots$ γενικά $A_n \to$ μια πεπερασμένη σύζευξη από άτομα διαφορετικά του $A_n \}$.

Είναι άραγε επαληθεύσιμο? (συνεπές)

Έστω Σ' = τυχαίο υποσύνολο (πεπερασμένο) του Σ και ας υποθέσουμε ότι περιέχει προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (και μόνο). $\Sigma' \subseteq \{A_1, A_1 \to A_2, A_1 \to A_3, \ldots, A_1 \to A_n, \ldots, A_1 \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_2, \ldots, A_n$), $A_2 \to$ (πεπερ. σύζευξη των $A_1, A_3, \ldots, A_n$), $\ldots, A_n \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$)$\}$

Ορίζουμε $V(A_1) = \alpha = V(A_2) = V(A_3) = \cdots = V(A_n)$. Είναι προφανές ότι όλες οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν, και άρα η V επαληθεύει το Σ'. Άρα Σ' συνεπές.

Μαθηματική επαγωγή στη Λογική των Προτάσεων (ΛΠ):

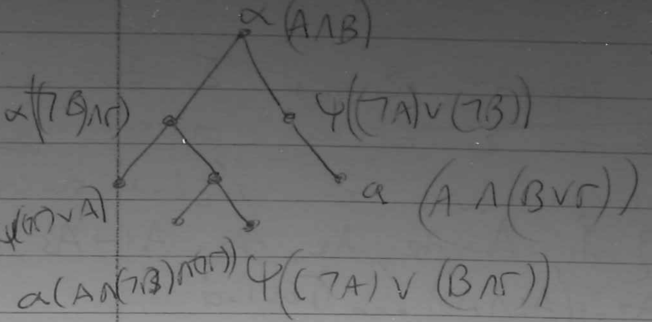
Έστω P μία ιδιότητα και μας ζητάνε νδο για κάθε πρόταση σ της Λ.Π. ισχύει $P(\sigma)$.

Βήμα 1ο: Δείχνουμε ότι για κάθε ατομική πρόταση A ισχύει $P(A)$. επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $P(\sigma_1)$ και $P(\sigma_2)$ για 2 τυχαίες προτάσεις. Τότε δείχνουμε επίσης και τα παρακάτω:

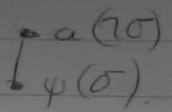
$P(\neg \sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

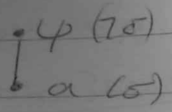
19/3/15 · Σημασιολογικοί πίνακες του BETH:

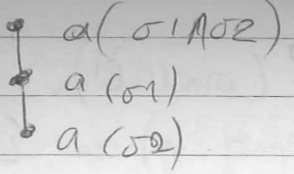
Είναι αντεστραμμένα δυαδικά δένδρα, τα οποία έχουν κόμβους προτάσεις της Λ.Π. με κάποιο πρόσημο μπροστά. (α ή ψ)

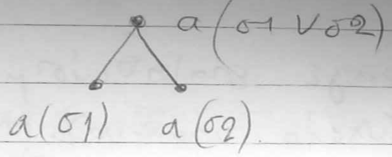


Βασικοί σημαντικοί πίνακες του Beth:

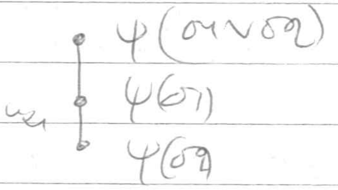


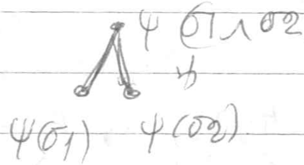


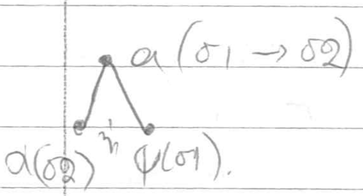


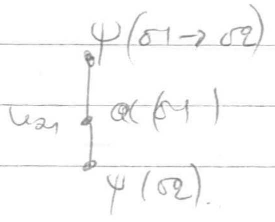


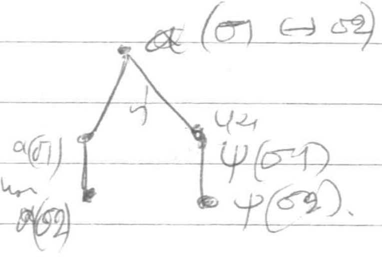
Σχόλιο: Η διακλάδωση σε ένα σημαντικό πίνακα του Beth μας δίνει τη δυνατότητα να διαλέξουμε όποιο μονοπάτι από τα 2 θέλουμε.

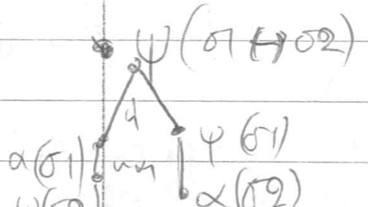










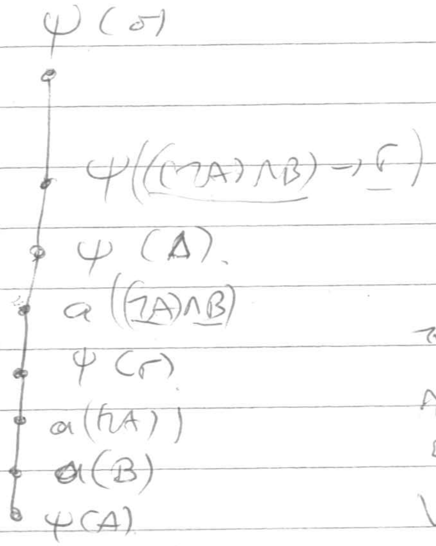


Υπάρχουν 10 βασικοί σημαντικοί πίνακες του Beth.

Σχόλιο: Μπορούμε να βλέπουμε τους σημαντικούς πίνακες του Beth ως τον "αληθοπίνακα" μιας πρότασης σ. Έτσι για παράδειγμα εάν ζητάμε να βρούμε σε ποιες ~~[illegible]~~ ερμηνείες V ισχύει V(σ)=α θα πρέπει να ξεκινήσουμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα του Beth με κορυφή α(σ) και ανάλογα αν ζητάμε V ώστε V(σ)=ψ θα πρέπει να ξεκινήσουμε την κατασκευή ενός σπ Beth με κορυφή ψ(σ).

Παράδειγμα: $\sigma = (((\neg A)\land B)\to\Gamma)\lor\Delta$

Ψεύδους περίπτωση που διαψεύδεται.



Άρα για να διαψεύσουμε την παραπάνω σ θα πρέπει να επιλέξουμε ερμηνεία V έτσι ώστε $V(A)=\psi$, $V(B)=\alpha$, $V(\Gamma)=\psi$, $V(\Delta)=\psi$.

Σχόλιο: Παίρνω $V'\neq V$

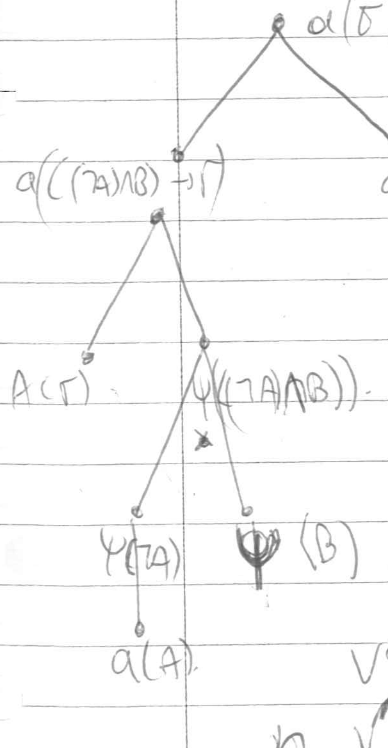
π.χ. $V'(A)=\alpha$, $V'(B)=\alpha$, $V'(\Gamma)=\psi$, $V'(\Delta)=\psi$.

Επειδή δεν εμφανίζεται ~~τα~~ V' στον πίνακα συμπεραίνουμε ότι $V'(\sigma)=\alpha$.

αλλά επαληθεύσιμη είναι η σ. ✓

δεν είναι αντιταυτολογία είτε ανάλογα.

Παράδειγμα: $\alpha((((\neg A)\land B)\to\Gamma)\lor\Delta)$



Άρα υπάρχουν μόνο 4 ~~συμπτώσεις~~ περιπτώσεις συναρτήσεων V, οι οποίες επαληθεύουν την πρότασή μας.

Πρώτη περίπτωση: $V1(\Gamma)=\alpha \Rightarrow V_1(\sigma)=\alpha$

2η -//- : $V2(A)=\alpha \Rightarrow V2(\sigma)=\alpha$.

3η -//- : $V3(B)=\psi \Rightarrow V3(\sigma)=\alpha$.

4η -//- : $V4(\Delta)=\alpha \Rightarrow V4(\sigma)=\alpha$.

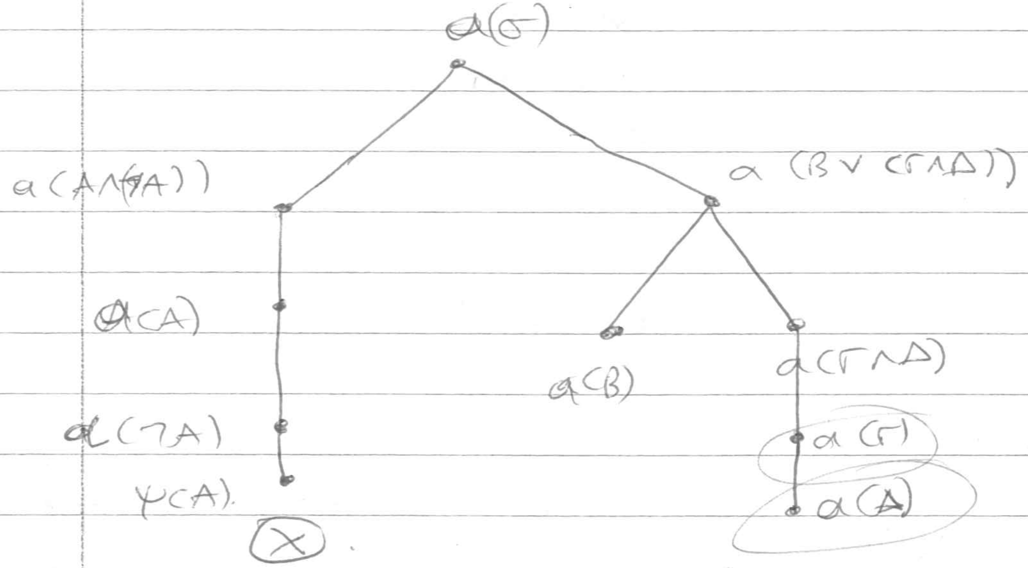
$V'(A)=\alpha$, $V''(B)=\alpha$, $V''(\Gamma)=\psi$, $V''(\Delta)=\psi$.

η V' ανήκει στη 2η περίπτωση

Ορισμός: Ένα κομμάτι (κλάδος) λέγεται αντιφατικό εάν περιέχει την α(σ) και την ψ(σ) για μία πρόταση σ.

Σχόλιο: Όταν σε ένα σημαντικό δέντρο συναντάμε έναν αντιφατικό κλάδο, τότε θα του βάζουμε το σύμβολο ⊗ που σημαίνει ότι απαγορεύεται να επεκτείνουμε τον κλάδο αυτό. Από αντιφατικούς κλάδους δεν μπορούμε να ανακαλύψουμε κάποιες ερμηνείες που επαληθεύουν ή διαψεύδουν τη ρίζα μας.

Παράδειγμα: Έστω $\sigma=(A\wedge(\neg A))\vee(B\vee(\Gamma\wedge\Delta))$. Να βρείτε όλες τις περιπτώσεις που η σ επαληθεύεται.



Άρα 1η περίπτωση: $V_1(B)=\alpha \Rightarrow V_1(\sigma)=\alpha$

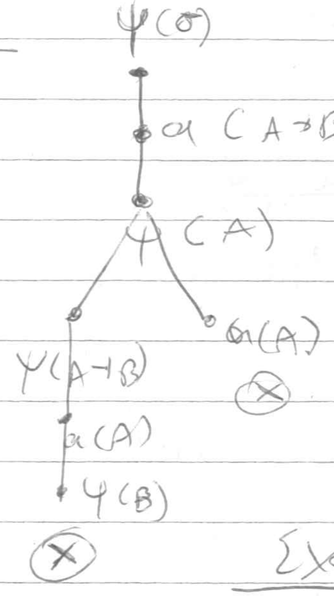
2η —//— : $V_2(\Delta)=V_2(\Gamma)=\alpha \Rightarrow V_2(\sigma)=\alpha$

Σχόλιο: Αν επιλέξουμε προσεκτικά μία ερμηνεία V που δεν ανήκει σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις, τότε η V διαψεύδει την σ.

Παράδειγμα: $V(B)=\psi,\ V(\Gamma)=\psi \Rightarrow V(\sigma)=\psi$.

Π.χ.: $\sigma=((A\to B)\to A)\to A$. Να κατασκευαστεί ο πίνακας ψ(σ). Τι συμπεραίνετε για τη σ;

<u>Λύση:</u>



1η ~~περίπτωση~~:

Δεν υπάρχουν ερμηνείες που διαψεύδεται η σ.
Άρα για τυχαία ερμηνεία V η σ επαληθεύεται.
Άρα η σ είναι <u>νόμος/ταυτολογία</u>.

<u>Σχόλιο:</u> Για νδο μία σ είναι ένας νόμος (ταυτολογία) αρκεί να κατασκευάσουμε έναν σημαντικό πίνακα του Beth με κορυφή ψ(σ) και όλους τους κλάδους τους αντιφατικούς. Στην αντιλογία ξεκινάμε με α(σ).

<u>23/3/15</u>

<u>Θεωρία</u>

<u>Σχόλιο:</u> εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι το σύνολο προτάσεων Σ είναι συνεπές, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα του Beth στην οποία η κορυφή αποτελείται από τις προτάσεις του Σ με πρόσημο α. Εάν βγουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το Σ είναι ασυνεπές. Διαφορετικά είναι συνεπές.

Εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι $\Sigma \models \sigma$, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός ΣΠ του Beth με κορυφή που αποτελείται από όλες τις προτάσεις του Σ με πρόσημο α και την πρόταση σ με πρόσημο ψ. Εάν προκύψουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το $\Sigma \models \sigma$. Διαφορετικά <u>δεν ισχύει</u> $\Sigma \models \sigma$.

<u>Σχόλιο:</u> Γενικά εάν ξεκινάμε με κορυφή α(σ) και προκύπτει ένας ΣΠ του Beth με όλους τους κλάδους αντιφατικούς, τότε αυτό σημαίνει ότι η σ είναι μία αντίφαση. Διαφορετικά η σ είναι μια επαληθεύσιμη πρόταση. ⑦

2 ώρα

Μαθ. λογική
23/03/15

Σημαντικοί πινακες του Beth

Ορισμός: Αντιφατικός κλάδος ειναι ο κλάδος που περιέχει την ίδια πρόταση έστω σ με 2 διαφορετικά πρόσημα. (ασ, ψσ, σε 2 διαφορετικους κόμβους).

Μέθοδος κατασκευής σημαντικων πινάκων

Βήμα 1ο

Ξεκινάμε με μια κορυφή που αποτελείται από μια ή παραπάνω προτάσεις προσημασμένες.

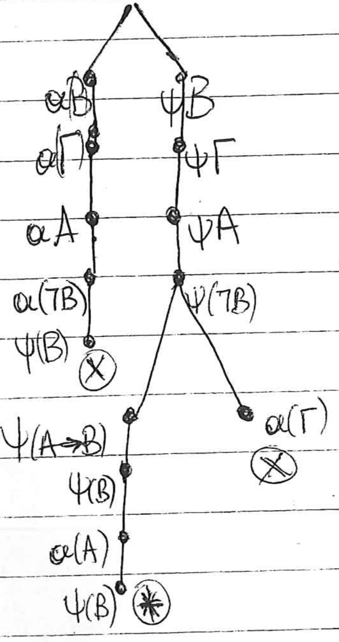
Βήμα 2ο

Αναπτύσσουμε την κορυφή χρησιμοποιώντας κάποιον από τους 10 βασικούς πινακες σε κάποια πρότασης της κορυφής. Γενικά, αν X ειναι κάποιος κόμβος που αποτελείται από μη-ατομική πρόταση, τότε μπορούμε να τον αναπτύξουμε με τον παρακάτω τρόπο. Επεκτείνω καθε μη-αντιφατικό κλαδο που διέρχεται από τον X προσαρτώντας στο τέλος του κλάδου (δηλ. στα φύλλα του) έναν ατομικό πινακα, εκείνον που έχει κορυφή τον X. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι ενα μακρύτερο δεντρο. Αφού αναπτύξουμε τον X δεν τον χρησιμοποιούμε ποτέ ξανα.

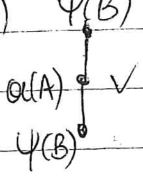
Βήμα 3ο

Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο ώστε καθε μη-αντιφατικός κλάδος να μην περιέχει αχρησιμοποίητους κόμβους. Από τους μη-αντιφατικούς κλάδους του δεντρου μας προκύπτουν ερμηνείες, οι οποίες ικανοποιούν, δηλαδή επαληθεύουν ή διαψεύδουν τις προτάσεις που βρίσκονται στην κορυφή ανάλογα με τα πρόσημα που αυτές έχουν. Από τους αντιφατικούς κλάδους δεν προκύπτει κάποια ερμηνεία και αρα δεν παίζουν κανένα ρόλο.

Πχ $\boxed{\psi(A\to B),\ \alpha((A\to B)\to\Gamma),\ \alpha(A\wedge(\neg B)),\ \alpha(B\leftrightarrow\Gamma)}$



(✱)



Έστω η ερμηνεία V τ.ω. V(A) = α και V(B) = ψ. Τότε από τα παραπάνω η V ικανοποιεί κάθε πρόταση της κορυφής.

Δηλ. $V(A\to B)=\psi$, $V((A\to B)\to\Gamma)=\alpha$, $V(A\wedge(\neg B))=\alpha$, $V(B\to\Gamma)=\alpha$.

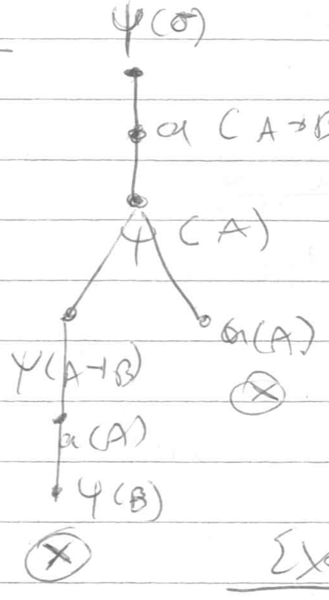
Πχ Εξετάστε αν ισχύει $\{(A\to B)\to\Gamma,\ A\wedge(\neg B), B\leftrightarrow\Gamma\}\models(A\to B)$

α) Με αληθοπίνακες...

β) Με σημαντικούς πίνακες του Beth.

Ξεκινάμε με κορυφή $\alpha((A\to B)\to\Gamma), \alpha(A\wedge(\neg B)), \alpha(B\leftrightarrow\Gamma)$ και από τον πίνακα του Beth που προκύπτει ανακαλύπτω τις ερμηνείες που ικανοποιούν την κορυφή. Ελέγχουμε αν ισχύει $V(A\to B)=\alpha$. Αν ισχύει ∀ τέτοια V, τότε προφανώς η $A\to B$ είναι συνέπεια.

Λύση:



~~1η περίπτωση:~~

Δεν υπάρχουν ερμηνείες που διαψεύδεται η σ. Άρα για τυχαία ερμηνεία V η σ αληθεύεται. Άρα η σ είναι νόμος/ταυτολογία.

Σχόλιο: Για νδο μία σ είναι ένας νόμος (ταυτολογία) αρκεί να κατασκευάσουμε έναν σημαντικό πίνακα του Beth με κορυφή ψ(σ) και όλους τους κλάδους τους αντιφατικούς. Στην αντιλογία ξεκινάμε με α(σ).

23/3/15

Β' ώρα

Σχόλιο: εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι το σύνολο προτάσεων Σ είναι συνεπές, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα του Beth στην οποία η κορυφή αποτελείται από τις προτάσεις του Σ με πρόσημο α. Εάν βγουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το Σ είναι ασυνεπές. Διαφορετικά είναι συνεπές.

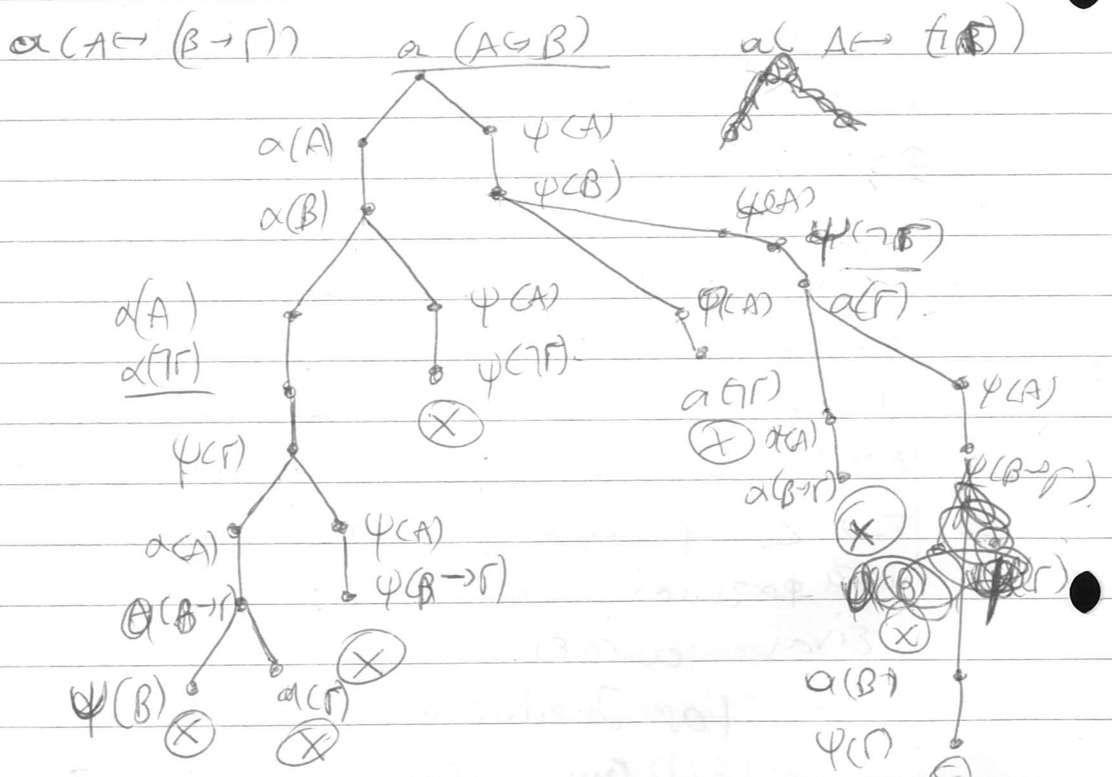
Εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι $Σ \models σ$, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός ΣΠ του Beth με κορυφή που αποτελείται από όλες τις προτάσεις του Σ με πρόσημο α και την πρόταση σ με πρόσημο ψ. Εάν προκύψουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το $Σ \models σ$. Διαφορετικά δεν ισχύει $Σ \models σ$.

Σχόλιο: Γενικά εάν ξεκινάμε με κορυφή α(σ) και προκύπτει ένας ΣΠ του Beth με όλους τους κλάδους αντιφατικούς, τότε αυτό σημαίνει ότι η σ είναι μία αντίφαση. Διαφορετικά η σ είναι μια επαληθεύσιμη πρόταση.

Εάν ξεκινάμε με κορυφή ψ(σ) και προκύπτει ΣΠ το Beth με όλους τους κλάδους αντιφατικούς, τότε αυτό σημαίνει ότι η σ είναι μια ταυτολογία, διαφορετικά η σ είναι μία διαψεύσιμη πρόταση (δηλαδή μπορούμε να ανακαλύψουμε από την κατασκευή μας μία ερμηνεία V που δίνει ψ στην πρόταση)

⊛ δηλαδή μπορούμε ... που δίνει α στην πρόταση...

π.χ. $\Sigma = \{ A \leftrightarrow (B \to \Gamma),\ A \leftrightarrow B,\ A \leftrightarrow (\neg\Gamma) \}$ ασυνεπές?

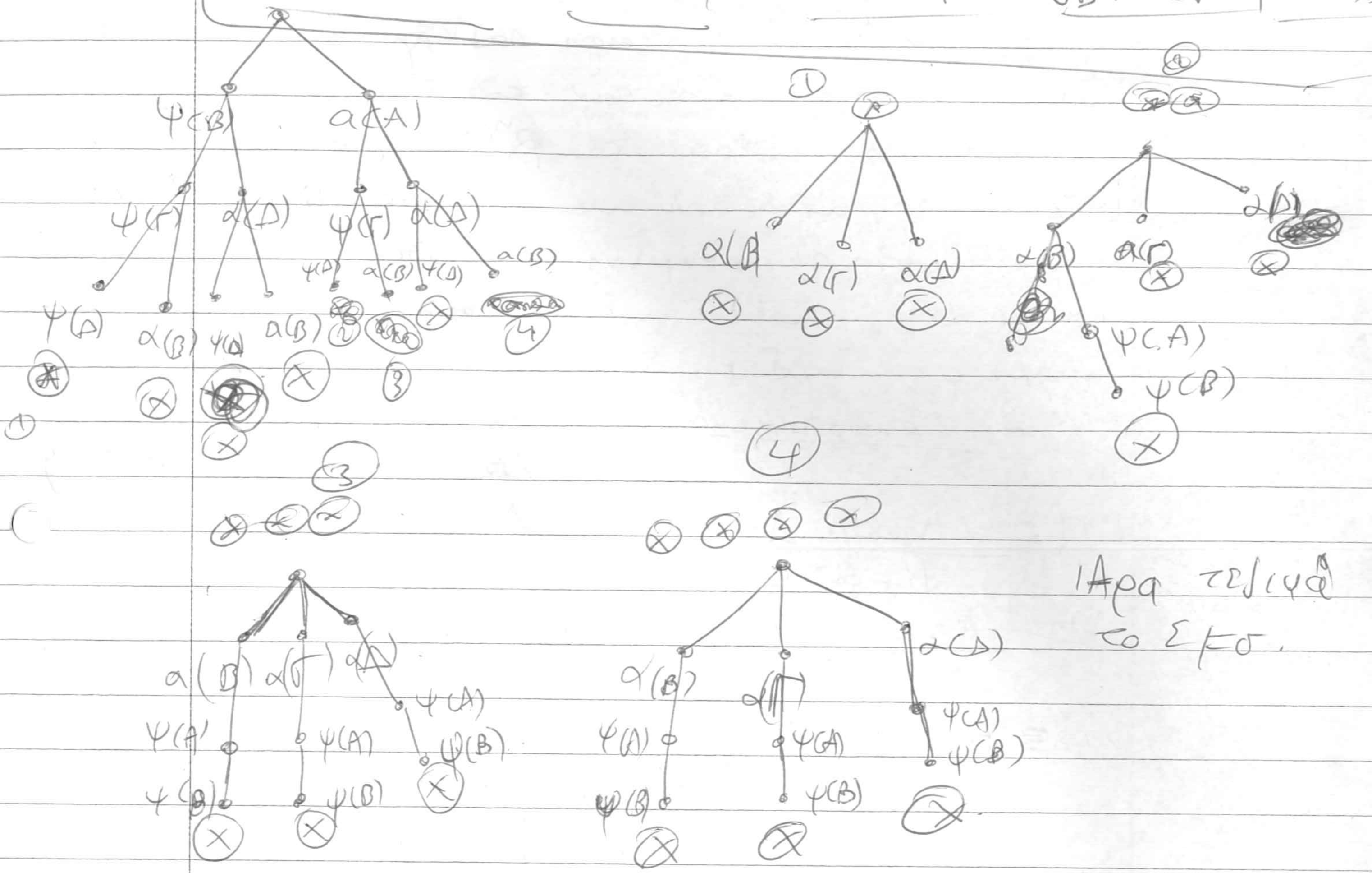


Αφού όλοι οι κλάδοι μας είναι αντιφατικοί, αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατο να επαληθεύσουμε με κάποια ερμηνεία την κορυφή μας, άρα το Σ είναι ασυνεπές.

π.χ. Να ελέγξετε εάν ισχύει $\Sigma \models \sigma$ με $\Sigma = \{ B \to A,\ \Gamma \to \Delta,\ \Delta \to B,\ B \vee \Gamma \vee \Delta \}$ και $\sigma = (A \vee B)$

Λύση:

$\alpha(B \to A)$ $\alpha(\Gamma \to \Delta)$ $\alpha(\Delta \to B)$ $\alpha(B \vee \Gamma \vee \Delta)$ $\psi(A \vee B)$



Άρα τελειώνει το ΣΚΣ.

24/3/15

Β' ώρα

Πρόταση: Δείξτε ότι εάν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, τότε αναγκαστικά και το Σ είναι ασυνεπές.

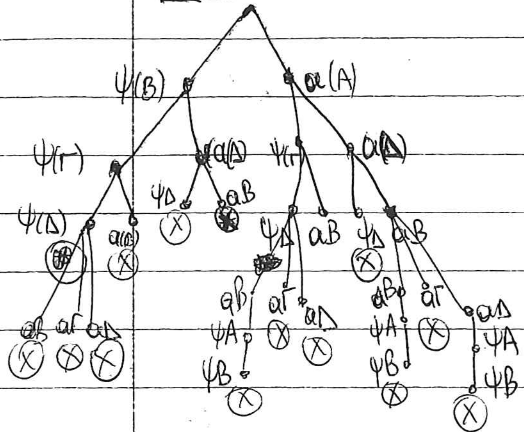
Απόδειξη: Κανόνας επίλυσης $\{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$. Άρα όλα τα στοιχεία του $R(\Sigma)$ είναι συνέπειες του Σ, δηλαδή $\Sigma \models R(\Sigma)$. Με όμοιο τρόπο $R(\Sigma) \models R^2(\Sigma) \ldots$ $R^{n-1}(\Sigma) \models R^n(\Sigma)$. Άρα από αυτές τις σχέσεις έπεται ότι το $\Sigma \models R^n(\Sigma)$. Αφού το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές έπεται ότι και το Σ είναι ασυνεπές.

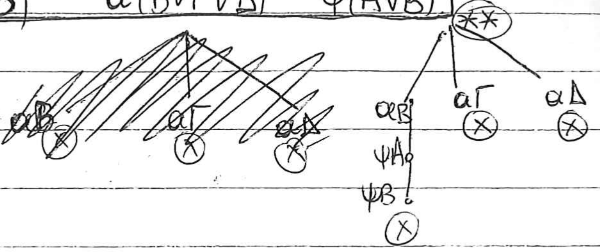
Ορισμός: Το $\emptyset$, δηλ. το $\{\ \}$ αντιστοιχεί σε μία αντιλογία και για αυτό το συμβολίζουμε με $\Box$.

Ορισμός: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων με $R^*(\Sigma)$ συμβολίζουμε την άπειρη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(\Sigma)$, δηλαδή

(ΠΧ) Να ελέγξετε αν ισχυει $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$.
$\sigma = A \vee B$.

$\alpha(B \to A) \quad \alpha(\Gamma \to \Delta) \quad \alpha(\Delta \to B) \quad \alpha(B \vee \Gamma \vee \Delta) \quad \psi(A \vee B)$





Μαθ. λογική.
24/03/15

Σχόλιο: αν Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ τότε για νδο $\Sigma \models \sigma$ αρκεί να πάρουμε την πρόταση $\tau = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ και να αποδείξουμε ότι $\tau \models \sigma$, δηλ. Θα ξεκινήσουμε απλά με την κορυφή $\alpha\tau, \psi\sigma$.

<u>Δυαδική επίλυση</u>

<u>Συνολοθεωρητική μορφή</u>: εαν η σ έχει γραφτεί σε ΣΚΜ τότε αυτή φυσικά συζεύξεις διαζεύξεων σ-στοιχειωδών τύπων, δηλ. $\sigma = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ όπου σ είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων. Μια διάζευξη στοιχειωδών τύπων μετατρέπεται εύκολα σε συνολοθεωρητική μορφή στην οποία κάθε διάζευξη έχει μεταφραπεί σε κόμμα.

(Πχ.) $(\neg A) \vee ((\neg \Delta) \vee (\neg \Gamma)) \to \{\neg A, \neg \Delta, \neg \Gamma\}$.
$A \to \{A\}$.

Στη ΣΚΜ μετατρέπουμε τις συζεύξεις μεταξύ των διαζεύξεων στοιχειωδών τύπων σε κόμματα και στη συνέχεια μετατρέπουμε καθε διάζευξη στοιχειωδών τύπων σε συνολοθεωρητική μορφή.

πχ $(\neg A) \vee ((\neg\Delta) \vee (\neg\Gamma)) \wedge (A \vee (\neg\Delta) \vee \Gamma) \rightarrow \{\{\neg A, \neg\Delta, \neg\Gamma\}, \{A, \neg\Delta, \Gamma\}\}$.

$A \vee B \rightarrow \{\{A, B\}\}$.

Ορισμός

Έστω Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ όλες γραμμένες σε συνολοθεωρητική μορφή. Έστω L μια ατομική πρόταση για την οποία υπάρχουν 2 προτάσεις σ_i, σ_j για τις οποίες ισχύει ότι $L \in \sigma_i$ και $\neg L \in \sigma_j$. Τότε μπορούμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα την πρόταση $\sigma_i \cup \sigma_j \setminus \{L, \neg L\}$. Την πρόταση αυτή την λέμε επιλύουσα των σ_i, σ_j ως προς L και συμβολίζεται $L_i(\sigma_i, \sigma_j)$.

πχ $\sigma_1 = ((\neg A) \vee (\neg\Delta) \vee \Gamma)$ $\sigma_1 = \{\neg A, \neg\Delta, \Gamma\}$

$\sigma_2 = (A \vee (\neg\Gamma) \vee (\neg B))$ $\sigma_2 = \{A, \neg\Gamma, \neg B\}$

Επιλέγουμε να επιλύσουμε ως προς το Α.

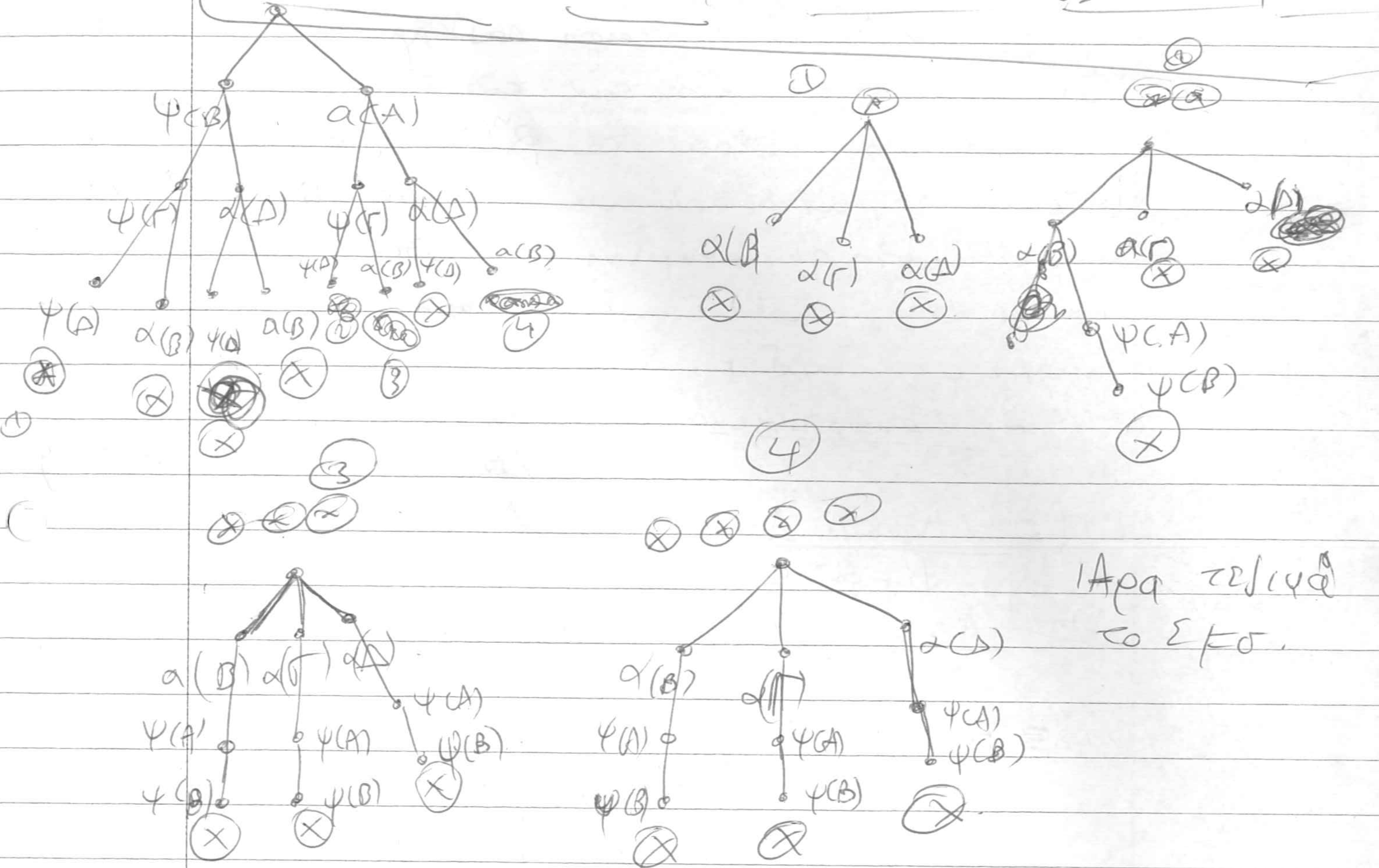
$\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus \{A, \neg A\} = \{\neg\Delta, \Gamma, \neg\Gamma, \neg B\} = R_A(\sigma_1, \sigma_2)$

$R_\Gamma(\sigma_1, \sigma_2) = \{\neg A, A, \neg\Delta, \neg B\}$ αντιστοιχεί στο $((\neg A) \vee A \vee (\neg\Delta) \vee (\neg B)) \equiv T$ //.

Ορισμός

Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων σε συνολοθεωρητική μορφή. Τότε το σύνολο $\Sigma \cup \{$ όλες οι δυνατές επιλύουσες μεταξύ των προτάσεων του σ θα ονομάζεται επιλύουσα του Σ και θα συμβολίζεται $R(\Sigma)$

$\alpha(B \to A)$ $\alpha(\Gamma \to \Delta)$ $\alpha(\Delta \to B)$ $\alpha(B \vee \Gamma \vee \Delta)$ $\psi(A \vee B)$



Άρα τελικά το $\Sigma \models \sigma$.

24/3/15

Β' ώρα

Πρόταση: Δείξτε ότι εάν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, τότε αναγκαστικά και το Σ είναι ασυνεπές.

Απόδειξη: Κανόνας επίλυσης $\{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$. Άρα όλα τα στοιχεία του $R(\Sigma)$ είναι συνέπειες του Σ, δηλαδή $\Sigma \models R(\Sigma)$. Με όμοιο τρόπο $R(\Sigma) \models R^2(\Sigma) \ldots$ $R^{n-1}(\Sigma) \models R^n(\Sigma)$. Άρα από αυτές τις σχέσεις έπεται ότι το $\Sigma \models R^n(\Sigma)$. Αφού το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές έπεται ότι και το Σ είναι ασυνεπές.

Ορισμός: Το ϕ, δηλ. το $\{\ \}$ αντιστοιχεί σε μία αντίφαση και για αυτό το συμβολίζουμε με $\square$.

Ορισμός: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων με $R^*(\Sigma)$ συμβολίζουμε την άπειρη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(\Sigma)$, δηλαδή δυαδικής

μια οποιαδήποτε πρόταση που προκύπτει από επίλυση κάποιων προτάσεων του Σ ή από δυαδική επίλυση κάποιων προτάσεων του $R^n(\Sigma)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

<u>Παρ:</u> Μπορούμε απλά να πούμε ότι $r \in R^*(\Sigma)$ <u>αν</u> υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $r_1, r_2, \ldots, r_n$ με $r_n = r$ και κάθε r_i είτε ανήκει στο Σ είτε προέκυψε με δυαδική επίλυση κάποιων ακριβώς 2 από 2 προηγούμενα βήματα r_k, r_j.

n - βήματα
r_1
r_2
$\vdots$
r_n

Έστω $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$

<u>Άσκηση:</u> Δείξτε ότι $A \in R^*(\Sigma)$ και όμοια $B \in R^*(\Sigma)$

<u>Λύση:</u> <u>Βήμα 1ο:</u> $\Sigma = \{\{\neg B, A\}, \{\neg \Gamma, \Delta\}, \{\neg \Delta, B\}, \{B, \Gamma, \Delta\}\}$

$B \to A \equiv (\neg B) \vee A = \{\neg B, A\}$

$\{\neg B, A\} = (r_1)$

$\{\neg \Delta, B\} = (r_2)$

(r_3) $R_B(r_1, r_2) = \{A, \neg \Delta\}$

(r_4) $\{\neg \Gamma, \Delta\}$

(r_5) $R_\Delta(r_3, r_4) = \{A, \neg \Gamma\}$

(r_6) $\{B, \Gamma, \Delta\}$, (r_7) $R_\Gamma(r_5, r_6) = \{A, B, \Delta\}$

(r_8) $R_\Delta(r_3, r_7) = \{A, B\}$, (r_9) $R_B(r_4, r_8) = \{A\}$

Όμοια μπορούμε ν.δ.ο. $B \in R^*(\Sigma)$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων σε συνολοθεωρητική μορφή και σ μια ~~[illegible]~~ διάζευξη στοιχειωδών τύπων σε συνολοθεωρητική μορφή. Θα γράφουμε $\Sigma \vdash_R \sigma$ <u>αν</u> $\sigma \in R^*(\Sigma)$ και θα λέμε ότι η σ είναι συνέπεια του Σ με την δυαδική επίλυση.

γενικά αν $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ είναι μια πρόταση γραμμένη σε ΣΚΜ, τότε $\Sigma \models_R \sigma$ ανν $\forall i, i = 1 \to n$ ισχύει $\Sigma \models_R \sigma_i$.

π.χ. Δείξτε ότι το $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$ (έχει συνέπεια) $\models_R A \wedge B$.

$A \wedge B$ αντιστοιχεί στο $\{\overset{\sigma_1}{\{A\}}, \overset{\sigma_2}{\{B\}}\}$.

(Άρα από τον ορισμό θα πρέπει νδο $\Sigma \models_R \sigma_1$ και $\Sigma \models_R \sigma_2$

Το κάνεις!

Σχόλιο: Έστω ότι θέλουμε νδο Σ είναι ασυνεπές. Τότε το γράφουμε σε συνολοθεωρητική μορφή και στη συνέχεια προσπαθούμε νδο $\Sigma \models_R \square$.

27/3/15

α' ώρα

$\Sigma \models_R \sigma$ αν $\sigma \in R^*(\Sigma)$ ανν $\exists$ πεπερασμένη ακολουθία βημάτων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ με $\sigma_n = \sigma$ και κάθε σ_i είναι είτε στοιχείο του Σ είτε προέρχεται από την δυαδική επίλυση 2 προηγούμενων σ_i, σ_j

Σχόλια: Ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

(1) Αν Σ ασυνεπές, τότε $\Sigma \models_R \square$ - κενό.

(2) Αν Σ είναι άπειρο, τότε ισχύουν τα γνωστά θεωρήματα της συμπάγειας $\Sigma \models_R \sigma$ ανν $\exists$ πεπερασμένο $\Sigma' \subseteq \Sigma$, έτσι ώστε $\Sigma' \models_R \sigma$. Και όμοια Σ ασυνεπές ανν $\exists$ Σ' πεπερασμένο έτσι ώστε Σ' ασυνεπές, δηλ. $\Sigma' \models_R \square$.

(3) Ισχύουν επίσης οι κανόνες συμπεράσματος και απαγωγής εις άτοπον.

δηλαδή $\Sigma \models_R \sigma_1 \to \sigma_2$ αν $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models_R \sigma_2$. (α)

και $\Sigma \models_R \sigma$ αν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models_R \square$. (β)

ΣΧΟΛΙΟ: Όλες οι προτάσεις του Σ καθώς και η σ και οι σ, ¬σ, σ1→σ2, κ.ο.κ. που αναφέρονται στα παραπάνω έχουν γραφτεί σε συνολοθεωρητική μορφή.

παράδειγμα: Δείξτε ότι το $\{A\} \models_R (\neg B) \to (B \to A)$.

Λύση:

1ος τρόπος: Από κανόνα $(3)^{(\alpha)}$ συμπεράσματος έχουμε:

$\{A, \neg B\} \models_R (B \to A)$ έχουμε το $B \to A \equiv (\neg B) \vee A$.

συνολοθεωρητική μορφή: $\{\{\neg B, A\}\}$. {{[illegible]}}

προφανώς ισχύει.

2ος τρόπος: $\neg(B) \vee (B \to A) \equiv B \vee (B \to A) \equiv$ (η → μετατρ. σε ∨) δες!

$\equiv B \vee ((\neg B) \vee A) = \underbrace{B \vee (\neg B)}_{T} \vee A = T \vee A = T$.

παράδειγμα: Έστω $\sigma = (A \leftrightarrow B)$. Να τη φέρουμε σε συνολοθεωρητική μορφή.

Λύση: $\sigma = A \to B \wedge B \to A = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ ΣΚΜ.

$\{\{\neg A, B\}, \{\neg B, A\}\}$ συνολοθεωρητική μορφή

παράδειγμα: $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$, συνολ. μορφή

$\sigma = (A \wedge B)$ Λύση:

$\sigma = \{\{A\}, \{B\}\}$

$\Sigma \models_R A$, $\Sigma \models_R B$

$\Sigma = \{\overset{\sigma_1}{\{\neg B, A\}}, \overset{\sigma_2}{\{\neg\Gamma, \Delta\}}, \overset{\sigma_3}{\{\neg\Delta, B\}}, \overset{\sigma_4}{\{B, \Gamma, \Delta\}}\}$

σ1
σ3

Απόδειξη: $R_B(\sigma1, \sigma3) = \{A, \neg\Delta\} = \sigma5$,

$R_\Delta(\sigma5, \sigma9) = \{A, \neg\Gamma\} = \sigma6$, $R_\Gamma(\sigma6, \sigma4) = \{A, B\Delta\} = \sigma7$,

$R_B(\sigma1, \sigma7) = \{\Delta, A\} = \sigma8$, $R_\Delta(\sigma5, \sigma8) = \{A\}$.

10 μοιάζει για το Β.

27/4/15 **Λογική των κατηγορημάτων (πρωτοβάθμια Λογική)**

~~**Ορισμός**: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ της ΛΚ. είναι ένα σύνολο από σύμβολα που χωρίζονται σε 2 κατηγορίες. Τα λογικά και τα ειδικά σύμβολα.~~

~~• **Λογικά σύμβολα**: α) σύμβολα μεταβλητών είναι όλα τα γράμματα ή λέξεις που ξεκινούν με κεφαλαίο~~
~~π.χ. X, Y, Z, X₁, ..., Αθηνά~~
~~β) λογικοί σύνδεσμοι: ¬, ∧, ∨, →, ↔.~~
~~γ) Βοηθητικά σύμβολα όπως παρενθέσεις, σημεία στίξεως κ.ο.κ.~~

δ) ποσοδείκτες ∀, ∃ ; ε) το σύμβολο της ισότητας =.

• **Ειδικά σύμβολα**: α΄) σύμβολα κατηγορημάτων. Αυτά ξεκινάνε συνήθως με τα τελευταία γράμματα του ~~λατινικού~~ αλφαβήτου.
π.χ. p, q, r, ...
β΄) σύμβολα συναρτήσεων π.χ. f, f₀, f₁, g, h, ...
γ΄) σύμβολα σταθερών π.χ. a, a₀, b, b₀, ...

ΣΧΟΛΙΑ: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ περιέχει οπωσδήποτε όλα τα λογικά σύμβολα και κάποια από τα ειδικά σύμβολα ανάλογα με τις ανάγκες μας.

1) παράδειγμα: Κατασκευή γλώσσας της θεωρίας αριθμών

$$\mathcal{L}_{\Theta.A.} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}.$$

27/3/2015 Β' ώρα

Θεώρημα Πληρότητας: Έστω $\Sigma \models \sigma$. Τότε το σ είναι συνέπεια του Σ με οποιαδήποτε άλλη μαθηματική μέθοδο, δηλαδή αν $\Sigma \models \sigma$ τότε:

(i) $\Sigma \models_B \sigma$

(ii) $\Sigma \models_R \sigma$

(iii) $\Sigma \models_{\text{Αξιωμ.}} \sigma$

Θεώρημα ορθότητας: Εάν το σ είναι συνέπεια του Σ χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε αποδεικτική μέθοδο, από τις παραπάνω ή από αυτές που έχουν βρεθεί κατά καιρούς, τότε σίγουρα το σ είναι συνέπεια του Σ με βάση τον ορισμό

Αξιωματική μέθοδος αποδείξεων: Επιλέγουμε κάποιες ταυτολογίες που εμείς τις θεωρούμε σημαντικές και τις βαπτίζουμε αξιώματα. Π.χ Αξιώματα με χρήση της συνεπαγωγής και της άρνησης

(i) $\sigma \to (\tau \to \sigma)$

(ii) $\sigma \to (\tau \to \phi)) \to ((\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \phi))$

(iii) $(\neg\sigma) \to (\neg\tau)) \to (\tau \to \sigma)$

Επίσης εκτός απ' τα αξιώματα, για την παραγωγή νέων προτάσεων χρησιμοποιούμε και κάποιους κανόνες, Π.Χ. τον κανόνα Modus Ponens, δηλαδή

$$\frac{\sigma, \sigma \to \tau}{\tau}$$

Ορίζουμε $Αξ = \{(i), (ii), (iii), MP\}$

Ορισμός: Έστω Αξ ένα οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα όπως για παράδειγμα το παραπάνω, θα γράφουμε $\Sigma \vdash_{Αξ.} \sigma$ ανν $\exists$ πεπερασμένη ακολουθία βημάτων $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n$ με $\sigma_n = \sigma$. και κάθε βήμα σ_i είτε είναι κάποιο αξίωμα του Αξ. είτε ανήκει στο Σ είτε προέρχεται από κάποια προηγούμενα βήματα με εφαρμογή των κανόνων που βρίσκονται μέσα στον Αξ.

Π.χ. Δείξτε ότι $\emptyset \vdash_{Aξ} A \to A$.

Απόδειξη:

1ο βήμα:

$\boxed{A \to ((B \to A) \to A)}$ είναι το (i) αξίωμα όπου $\sigma = A$, $\tau = B \to A$

2ο βήμα:

$\boxed{(A \to ((B \to A) \to A))} \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$ είναι το (ii) αξίωμα όπου $\sigma = A$, $\tau = B \to \Delta$, $\varphi = A$.

3ο βήμα:

Από Modus Ponens των δυο προηγούμενων βημάτων έχουμε ότι $(\boxed{(A \to (B \to A))} \to (A \to A))$

4ο βήμα:

Από το (i) αξίωμα έχουμε $\boxed{((A \to (B \to A))}$ με $\sigma = A$, $\tau = B$

5ο βήμα:

Από εφαρμογή Modus Ponens των δυο προηγούμενων βημάτων έχουμε $A \to A$.

Λογική των κατηγορημάτων:

Ο Πέτρος είναι θνητός.

Ο Νίκος είναι θνητός.

Ο οποιοσδήποτε άνθρωπος είναι θνητός

Σχόλιο: Στην παραπάνω πρόταση "κρύβονται" 2 ιδιότητες (κατηγορήματα). Αυτές είναι οι άνθρωπος(X), θνητός(X). Η παραπάνω πρόταση, χρησιμοποιώντας τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$, τη μεταβλητή X και τα κατηγορήματα άνθρωπος, θνητός

$(\forall X)$(άνθρωπος(X) $\to$ θνητός(X)).

π.χ.

Υπάρχει πτήση της Ολυμπιακής αεροπορείας από οποιαδήποτε μεγάλη πόλη της Ελλάδος προς την Αθήνα.

Λύση:

Πόλη της Ελλάδος (Y)

Πτήση της Ολυμπιακής προς Αθήνα (Y)

$(\forall X)$ πόλη της Ελλάδος (X) → πτήση της Ολυμπιακής προς Αθήνα (X).

σ_1
σ_3

Απόδειξη: $R_B(\sigma_1, \sigma_3) = \{A, \neg A\} = \sigma_5$,

$R_\Delta(\sigma_5, \sigma_2) = \{A, \neg\Gamma\} = \sigma_6$, $R_\Gamma(\sigma_6, \sigma_4) = \{A, B, \Delta\} = \sigma_7$,

$R_B(\sigma_1, \sigma_7) = \{\Delta, A\} = \sigma_8$, $RA(\sigma_5, \sigma_8) = \{A\}$.

Όμοια για το Β.

27/4/15 **Λογική των κατηγορημάτων (πρωτοβάθμια Λογική).**

Ορισμός: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ της ΛΚ. είναι ένα σύνολο από σύμβολα που χωρίζονται σε 2 κατηγορίες. Τα λογικά και τα ειδικά σύμβολα.

- **Λογικά σύμβολα:** α) σύμβολα μεταβλητών είναι όλα τα γράμματα ή λέξεις που ξεκινούν με κεφαλαίο π.χ. $X, Y, Z, X_1, \ldots,$ Αθηνά.
  β) λογικοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
  γ) Βοηθητικά σύμβολα όπως παρενθέσεις, σημεία στίξεως κ.ο.κ.
  δ) ποσοδείκτες $\forall, \exists$; ε) το σύμβολο της ισότητας $=$.
- **Ειδικά σύμβολα:** α΄) σύμβολα κατηγορημάτων. Από ξεκινάνε συνήθως με τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου.
  π.χ. $p, q, r, \ldots$
  β΄) σύμβολα συναρτήσεων π.χ. $f, f_0, f_1, g, h, \ldots$
  γ΄) σύμβολα σταθερών π.χ. $a, a_0, b, b_0, \ldots$

ΣΧΟΛΙΑ: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ περιέχει οπωσδήποτε όλα τα λογικά σύμβολα και κάποια από τα ειδικά σύμβολα ανάλογα με τις ανάγκες μας.

1) παράδειγμα: Κατασκευή γλώσσας της Θεωρίας αριθμών

$$\mathcal{L}_{ΘA.} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}.$$

Τα σύμβολα 0, 1 θεωρούνται σύμβολα σταθερών. Το $\leq$ θεωρούμε ότι είναι σύμβολο κατηγορήματος (διμελές σύμβολο κατηγορήματος).

Σχόλιο: Εάν το p θεωρείται ως ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος κάποιας γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε όταν γράφουμε $x p y$ θα εννοούμε $p(x,y)$. π.χ. Αντί να γράφουμε $\leq(x,y)$ γράφουμε απλώς $x \leq y$.

Η $\overset{+}{(\text{πρόσθεση})}$ και ο $\overset{\bullet}{(\text{πολλ/σμός})}$ θεωρούνται $\overset{\text{διθέσια}}{\text{σύμβολα}}$ συναρτήσεων. **Σχόλιο:** Για διθέσια σύμβολα συναρτήσεων ισχύει το ίδιο σχόλιο με το παραπάνω π.χ. $x+y$ εννοούμε $+(x,y)$

Παράδειγμα: ① Υπάρχει ένας αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους

$$(\exists x)(\forall y)\{y \neq x \to y \leq x\}.$$

② Το 2 είναι πρώτος αριθμός.

$$(\forall x)\{(x \neq 1)\ \wedge\ (x/2) \xrightarrow[(\text{τότε})]{} (x=2)\}.$$

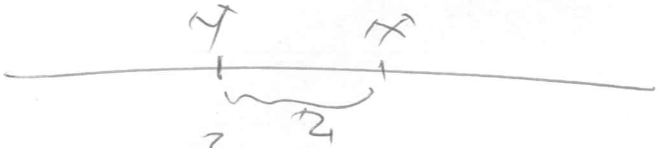
Σχόλιο: Το $x/2$ μπορεί να γραφεί στην $\mathcal{L}_{ΘΑ}$ ως εξής: $(\exists k)\ x\cdot k = 2$

Άρα $(\forall x)\{(x \neq 1) \wedge [(\exists k)\ x\cdot k = 1+1] \to (x = 1+1)\}$

Σχόλιο: Όταν μας δοθεί μια γλώσσα $\mathcal{L}$ της ΛΚ, τότε μπορούμε να προσθέσουμε καινούρια ειδικά σύμβολα, ώστε να καλύψουμε τις ανάγκες μας.

π.χ. $\mathcal{L}'_{ΘΑ} = \mathcal{L}_{ΘΑ} \cup \{\underset{\text{σύμβ. σχέσης}}{/}, \underset{\text{σύμβ. σταθερών}}{2, 3, \dots}\}$

Στην $\mathcal{L}_{ΘΑ}$ προσθέσαμε ένα καινούριο σύμβολο κατηγορήματος / (διμελές) και επίσης άπειρα το πλήθος νέα σύμβολα σταθερών. Μπορούμε επίσης σε μερικές περιπτώσεις να εξαλείψουμε κάποια από τα ειδικά σύμβολα και έτσι να κατασκευάσουμε μια μικρότερη γλώσσα.



π.χ. $\mathcal{L}''\theta A = \{+, \cdot, 0, 1\}$ ίδια αλ. με πριν.

$$(\exists X)(\forall Y)\{X \neq Y \to (\exists Z)(Y+Z = \cancel{X})\}$$

Παράδειγμα γλώσσας θεωρίας συνόλων: $\mathcal{L}\Theta\Sigma = \{\overset{\text{σταθερά}}{\emptyset}, \in\}$.

Το $\emptyset$ είναι σύμβολο μιας σταθεράς. Το $\in$ είναι σύμβολο κατηγορήματος διμελές. π.χ. $X \subseteq Y$ μπορούμε να το περιγράψουμε ως εξής: $(\forall Z)(Z \in X \to Z \in Y)$.

π.χ. $W = \{\emptyset\}$. Μπορούμε να το περιγράψουμε: $(\forall Z)(Z \in W \leftrightarrow Z = \emptyset)$. Είναι χρήσιμο να πλουτίσουμε τη γλώσσα μας δομε με νέα ειδικά σύμβολα.

π.χ. $\mathcal{L}\Theta\Sigma' = \mathcal{L}\Theta\Sigma \cup \{\underset{\text{2μελές σύμβ. σχέσεως κατηγορήματος}}{\subseteq}, \cap, \cup, \underset{\text{συμπλήρωμα}}{\setminus}, \Delta, P, \ldots\}$.

ΣΘΣ

ΣΘΣ

- η τομή είναι σύμβολο διθέσιο σύμβολο συναρτήσεων
  η ένωση
  διαφορά
  συμμετρική διαφορά
- το δυναμοσύνολο είναι σύμβολο μονοθέσιο συνάρτησης

π.χ. Έστω A,B είναι 2 υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω. Τότε ισχύει $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

ℒ'ΘΣ

$$(\forall A)(\forall B)\{(A \subseteq \Omega) \wedge (B \subseteq \Omega) \to (\Omega \setminus (A\cap B)) = (\Omega \setminus A) \vee (\Omega \setminus B)\}.$$

π.χ. ① Το δυναμοσύνολο του $\emptyset$ δεν είναι το κενό σύνολο. ℒ'ΘΣ

$$P(\emptyset) \neq \emptyset.$$

② Το δυναμοσύνολο του $\emptyset$ είναι το μονοσύνολο που περιέχ το $\emptyset$. $(\{\emptyset\})$ ℒ'ΘΣ.

Θέλουμε αυτό: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$(\forall Z)(Z \in P(\emptyset) \leftrightarrow Z = \emptyset).$$

Γλώσσα ευκλείδιας γεωμετρίας: $(\mathcal{L}E\Gamma)$

$$\mathcal{L}E\Gamma = \{\text{σημείο}, \in, \text{ευθεία}, \overset{''}{\text{παράλληλο}}, \ldots\}.$$

Το σημείο είναι μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

Η ευθεία είναι μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.
Το $\in$ είναι διμελές σύμβολο κατηγορήματος.
Το $//$ είναι κι αυτό διμελές σύμβολο κατηγορήματος.

π.χ. Για κάθε δοσμένη ευθεία υπάρχει ένα σημείο εκτός αυτής. $L_{ΕΓ}$

$$\forall x\,(ευθεία(x) \rightarrow (\exists y)(σημείο(y) \wedge \neg(y \in x)))$$

π.χ. Από 2 δοθέντα σημεία υπάρχει μια ευθεία που διέρχεται από αυτά. $L_{ΕΓ}$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)[σημείο(x_1) \wedge σημείο(x_2) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\exists y)(ευθεία(y) \wedge (x_1 \in y) \wedge (x_2 \in y)))$$

π.χ. $\exists$ ευθεία μοναδική (ε) που διέρχεται από ένα σημείο Σ εκτός της ευθείας ε' έτσι ώστε ε//ε'.

28/4/15

$$L_{ΕΓ} = \{σημείο, ευθεία, //, \in\}.$$

π.χ. Υπάρχει μοναδική ε' που διέρχεται από το σημείο Σ που βρίσκεται εκτός της ε και είναι παράλληλη στην ε. (ε'//ε).

$$(\forall Σ)(\forall E)[ευθεία(E) \wedge σημείο(Σ) \wedge \neg(Σ \in E) \rightarrow (\exists E')$$
$$\underbrace{(ευθεία(E') \wedge (Σ \in E') \wedge (E'//E))]}_{φ(E')}.$$

Κλασικά λάθη: (1) Δεν επιτρέπεται μέσα σε ένα σύμβολο κατηγορήματος να βάζουμε άλλα σύμβολα κατηγορήματος.

SOS

π.χ. $Σημείο(x) \neq Σημείο(y) \rightarrow (\exists E)((x \in E) \wedge (y \in E) \wedge ευθεία(E))$

Διόρθωση:

$(σημείο(x) \wedge σημείο(y)) \wedge (x \neq y) \rightarrow \ldots$ ✓

(2) Δεν επιτρέπεται μετά από ποσοδείκτες να βάζουμε οποιοδήποτε άλλο σύμβολο εκτός από μεταβλητές

π.χ. $(\forall ευθεία(E))(\exists σημείο(x))(\exists σημείο(y))((x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x \neq y))$

9:00 - 11:00

διόρθωση!

$(\forall E)(\exists X)(\exists Y)$(ευθεία$(E) \to$ σημείο$(X) \land$ σημείο$(Y) \land X \neq Y \land$
$\land\ X \in E \land Y \in E)$.
$\vee$

ύπαρξη ① ② μοναδικότητα

το 1ο παράδειγμα: το ίδιο $\land (\forall E_1)(\forall E_2)[$ευθεία$(E_1) \land$ ευθεία$(E_2) \land (\Sigma \in E_1) \land (\Sigma \in E_2) \land (E_1 /\!/ E) \land (E_2 /\!/ E) \to E_1 = E_2]$.

Ορισμός: $\exists!$ Από εδώ και στο εξής όταν θα γράφουμε $(\exists! Z)\,\phi(Z)$ όπου $\phi(Z)$ ένας τύπος της ~~[illegible]~~ Λ-Κατηγ. θα εννοούμε τον τύπο $[(\exists Z)\,\phi(Z)] \land (\forall Z_1)(\forall Z_2)[\phi(Z_1) \land \phi(Z_2) \to Z_1 = Z_2]$

παράδειγμα:

$(\forall \Sigma)(\forall E)[$ευθεία$(E) \land$ σημείο$(\Sigma) \land \Sigma \notin E \to$
$(\exists! E')[\phi(E')]]$.

π.χ. Υπάρχει πτήση της Ολυμπιακής Αεροπορίας από οποιαδήποτε ~~κάθε~~ μεγάλη πόλη της Ελλάδος προς στην Αθήνα.

τιμές μετ/. σαν σταθερές — σχέσ/ συμβ. κατηγορ.

$\mathcal{L} = \{$ Ελλάδα, αθήνα, ολυμπιακή αεροπορία, μεγάλη πόλη$(\cdot,\cdot)$, πτήση$(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\}$
2-θέση — 4-θέσιο

σταθερά

$(\forall X)[$μεγάλη πόλη$(X,$ Ελλάδα$) \to (\exists Y)$ πτήση$(Y,$ Ο.αερ.$, X,$ Αθήνα$)]$

~~π.χ.~~ $\mathcal{L}' = \{$μεγάλη πόλη της Ελλάδος$(\cdot)$, πτήση ολυμπιακής για αθήνα$(\cdot)\}$.

$(\forall X)[$μεγάλη πόλη της Ελλάδος$(X) \to$ πτήση ολυμπιακής για αθήνα$(X)]$.

π.χ. Κάθε θετικός αριθμός έχει μια μοναδική τετραγωνική ρίζα.

μοναδιαίο σύμβ. κατηγορ. — σύμβολο συνάρτησης μονοθέσιο

$\mathcal{L} = \{$θετικός αριθμός$(\cdot)$, τετραγωνική ρίζα$(\cdot)\}$.
είσοδος-έξοδος

$(\forall X)[$θετικός αριθμός$(X) \to (\exists! Z)($τετραγωνική ρίζα$(X) = Z)]$.

ή $\mathcal{L}' = \{0, \sqrt[2]{\cdot}, >\}$

σταθερά — σύμβ. συνάρτησης μονοθέσιο — σύμβ. σχέσης 2-θέσιων.

$(\forall x)[(x>0)\to(\exists! z)$ ~~[illegible]~~ $(\sqrt[2]{x}=z)]$.

Όρος: Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων. Τότε ένας όρος είναι: (1) Ένα οποιοδήποτε σύμβολο σταθεράς c ($c\in\mathcal{L}$), (2) μια οποιαδήποτε μεταβλητή, (3) ένα οποιοδήποτε σύμβολο συνάρτησης f που στις θέσεις του έχουμε βάλει κάποιους όρους που ήδη έχουμε κατασκευάσει.

π.χ. $\mathcal{L}_{ΘΑ}=\{0,1,\le,+,\cdot\}$. $1\overset{}{+}1$ όρος (+ σύμβολο συνάρτησης),

$x^2\to x\cdot x$ όρος (· σύμβ. συνάρτησης, x μεταβλητή), $x+32$ όρος, $((x+1)+1)+1)+\dots$,

$x\cdot y+2z$ όρος

Σχόλιο: Οποιοδήποτε πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές είναι ένας όρος της $\mathcal{L}_{ΘΑ}$.

π.χ. $\mathcal{L}_{ΘΣ}=\{\underset{σταθ.}{\emptyset},\underset{σχέσης}{\in}\}$. $\boxed{\emptyset \text{ όρος}}$ Σε αυτήν την γλώσσα μοναδικοί όροι είναι το $\emptyset$ και οποιαδήποτε μεταβλητή x.

$\mathcal{L}'_{ΘΣ}=\{\emptyset,\in,\cup,\cap,\setminus,\triangle,P(\cdot)\}$.

$\emptyset$-όρος, μεταβλητές-όροι, $x\cup\emptyset$, $x\cup y$, $x\setminus y$, …

$P(\emptyset)$, $P(\emptyset)\cup\emptyset$, $P(\emptyset\cup P(\emptyset))$, … όροι

Ορισμός ατομικού τύπου: Άτομο ή ατομικός τύπος για τη γλώσσα $\mathcal{L}$ ονομάζουμε κάθε κατηγόρημα $P\in\mathcal{L}$ που τα μέλη του έχουν καταλάβει κάποιοι όροι της $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}_{ΘΑ}$: $0\le 1$, $0=1$, $x\le 3$ $(1+1+1)$ (κτλ.), $x\ne y\to$ όχι άτομο, η άρνηση δεν υπάρχει.

άτομα

$\mathcal{L}_{ΘΣ}$ $\left\{\begin{array}{l} A\in B \\ A=B \\ \emptyset\in\emptyset \end{array}\right\}$

$\mathcal{L}'_{ΘΣ}$ $\left\{\begin{array}{l} P(\emptyset)=P(\emptyset) \\ x\in y \\ y=x \\ \emptyset\in P(\emptyset) \\ A\cap B=B\cap A \\ A\subseteq B \;\times \end{array}\right.$

∈ και ίσον

$$\frac{\epsilon\, d^2Y}{\epsilon^2 dt^2} + \frac{(1+\epsilon)}{\epsilon}\frac{dY}{dt} + Y = 0$$

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{d^2Y}{d\tau^2} + \frac{(1+\epsilon)}{\epsilon}\frac{dY}{dt} + Y = 0$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} + (1+\varepsilon)\frac{dY}{dt} + \epsilon Y = 0 \quad , \; Y(0) = 0.$$

Για όρους $O(1)$ έχουμε

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} + \frac{dY}{d\tau} = 0 \quad \text{και} \quad Y(0) = 0 \; , \; Y = Y_0 + \epsilon Y_1 + \dots$$

Χ.Π. $\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ και $\lambda = -1$.

$Y = C_1 e^{-\tau} + C_2$ και $Y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$ ή

$Y(\tau) = C_1(1 - e^{-\tau})$ εξωτ. λύση.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το C.

Θέλουμε (*) $\lim\limits_{t\to} y_0(t) \doteq e = C_1 = \lim\limits_{t\to\infty} Y(\tau)$

Άρα $C_1 = e$. Επομένως $Y(\tau) = e(1 - e^{-\tau})$.

Γράφουμε την ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση.

$y_0 = y_0(t)$, $Y(\tau) = Y(\frac{t}{\varepsilon})$. $y \simeq y_0(t) + Y(\frac{t}{\varepsilon}) -$ κοινό όριο

$y \simeq e^{1-t} + e(1 - e^{-t/\varepsilon}) - \cancel{e} \Leftrightarrow$

$y \simeq e^{1-t} - e^{-t/\varepsilon}$.

Μαθ. λογική

30/04/15

Έστω $\mathcal{L}$, μια γλώσσα της Λ.Κ., τότε με $O(\mathcal{L})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των όρων της γλώσσας. Όμοια με $AT(\alpha)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ατομικών τύπων της γλώσσας μας.

Υπενθύμιση

$AT(\alpha) = \{ P(T_1, T_2, \dots, T_n) :$ όπου p είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος της $\mathcal{L}$ και $T_1, T_2, \dots, T_n$ είναι όροι της γλώσσας $\mathcal{L}$ να έχουν καταλάβει της θέσεις του p}

Ορισμός τύπου

Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα της Λ.Κ., τότε (α) κάθε ατομικός τύπος της $\mathcal{L}$ είναι ένας τύπος. (β) Έστω σ_1, σ_2 τύποι της $\mathcal{L}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τύπους είτε χρησιμοποιώντας συνδέσμους π.χ. $(\neg\sigma_1)(\sigma_1 \wedge \sigma_2)(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $(\sigma_1 \to \sigma_2)(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$, είτε χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες π.χ. $((\forall X)\sigma_1)((\exists Y)\sigma_2)$ κλπ., (γ) τύποι είναι μόνο ακολουθίες συμβόλων που ικανοποιούν τους παραπάνω κανόνες (α), (β).

(Πχ) $\mathcal{L} = \{<, f, p, q\}$ όπου η < είναι ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος, το f να είναι μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης και τα p, q να είναι μονομελή σύμβολα συνάρτησης.

$$(\forall \underset{(*)}{X,} Y)\ (f(Y) \underset{(*)}{>} \underset{(*)}{p}(Z) \to q(X)).$$ (Λ).

$$(\forall X)(\forall Y)(\underbrace{[\underbrace{(Z < f(Y))}_{\text{ατομικός τύπος}} \wedge \underbrace{p(Z)}_{\text{ατομικός τύπος}}]}_{\text{τύπος}} \to q(X)).$$ (Σ)

(Πχ) $$(\forall\ \underset{(*)}{\text{άνθρωπος}}(Z))\Big[\underbrace{(\underbrace{\text{ηλικία}(Z)}_{\text{συνάρτηση}}) > 120}_{\text{ατομικός τύπος}} \to (\text{νεκρός}(Z))\Big]$$ (Λ)

$$(\forall Z)[\text{άνθρωπος}(Z) \wedge (\text{ηλικία}(Z)) > 120] \to \text{νεκρός}(Z))$$ (Σ)

(Πχ) Ο Γιάννης αγαπάει το φαγητό.

Το μήλο είναι φαγητό.

Το κοτόπουλο -||-.

Οτιδήποτε τρώγεται χωρίς να προκαλεί θάνατο είναι φαγητό.

Η Μαρία τρώει ό,τι και ο Χρήστος.

Φτιάξτε μια κατάλληλη γλώσσα $\mathcal{L}$ στην οποία να εκφράσετε τις παραπάνω

Εκφράσεις της με κατάλληλους τύπους της.

$\lambda = \{$ ο γιαννης, η μαρια, ο χρηστος, μηλο, κοτοπουλο, φαγητό$(\circ)$, αγαπαει$(\circ,\circ)$, τρωει$(\circ,\circ)$, νεκρος$(\circ)$ $\}$.

αγαπαει: διμελές συμβολο κατηγορηματος. τρωει: μονομελές συμβολο κατηγορηματος. νεκρος: μονομελές συμβολο κατηγορηματος. φαγητό: μονομελές συμβολο κατηγορηματος.

$\text{αγαπαει}(\text{γιαννης}, \text{φαγητό}(X))$ (Λ) (ποτέ κατηγόρημα σε κατηγόρημα)

$\text{φαγητό}(X) \rightarrow \text{αγαπαει}(\text{γιαννης}, X)$ (Σ)

$(\forall X)\ \text{φαγητό}(X) \rightarrow (\text{αγαπαει}(\text{γιαννης}, X))$ (Σ).

φαγητο (μηλο)
φαγητό (κοτοπουλο)

$(\forall Y)(\forall Z)(\text{τρωει}(Z, Y) \land \neg(\text{νεκρός}(Z)) \rightarrow \text{φαγητο}(Y))$.

η

$(\forall Y)(\text{φαγητό}(Y) \leftrightarrow (\exists Z)(\text{τρωει}(Z, Y) \land \neg(\text{νεκρός}(Z)))$.

$$\underbrace{(\forall Z)\ \underbrace{(\underbrace{\text{τρωει}(\text{χρηστος}, Z)}_{\text{ατομικός τύπος}} \rightarrow \underbrace{\text{τρωει}(\text{μαρια}, Z)}_{\text{ατομικός τύπος}})}_{\text{τυπος}}}_{\text{τύπος}}$$

Β' ώρα

30/4/15

Ορισμός1: Μια εμφάνιση της μεταβλητής x μέσα σε ένα οποιοδήποτε υποτύπο σ του τύπου τ με $\sigma = (\forall x)\,\phi$ είτε $\sigma = (\exists x)\,\phi$ λέγεται δεσμευμένη εμφάνιση της x μέσα στο τ.

Ορισμός2: Μια εμφάνιση της μεταβλητής x μέσα σε έναν τύπο τ λέγεται ελεύθερη εμφάνιση της x, εάν η συγκεκριμένη εμφάνιση δεν είναι δεσμευμένη στο τ.

π.χ. $\tau = \left[(\forall \overset{\text{δεσμ.εμφ}}{x})\; p(\overset{\text{δ.ε.}}{x}, \overset{\text{ε.ε.}}{y})\right] \rightarrow \left[(\forall \overset{\text{δ.ε.}}{z})\; q(\overset{\text{δ.ε}}{z}, \overset{\text{ε.ε}}{x})\right]$ όπου p, q είναι διμελή σύμβολα κατηγορημάτων.

Ορισμός3: Μια μεταβλητή x που εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε έναν τύπο τ καλείται ελεύθερη αν μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία ελεύθερη εμφάνιση της x μέσα στο τ. Διαφορετικά η μεταβλητή x λέγεται δεσμευμένη στον τύπο τ.

παράδειγμα: η μεταβλητή x εμφανίζεται στο τ μία φορά ως ε.ε., άρα είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τ. Η μεταβλητή z εμφανίζεται στον τ 2 φορές ως δ.ε., άρα είναι δεσμευμένη μέσα στον τ. Η y εμφανίζεται στον τ μία φορά ως ε.ε., άρα είναι ελεύθερη στον τ.

Ορισμός 4: Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές λέγεται πρόταση.

παράδειγμα: $\underset{\text{δ.ε}}{(\exists x)}\;\underset{\text{δ.ε.}}{(\exists y)}\left[\underset{\substack{\text{διμελές}\\\text{σύμβολο}\\\text{κατηγορήματος}}}{\text{δάσκαλος}}(\overset{\text{δε}}{x}, \overset{\text{δε}}{y}) \land \text{διδάσκει}(\underset{\text{δε}}{x}, \underset{\text{δε}}{y}, \underset{\text{εε}}{z})\right]$.

σύμβολο 3μελές κατηγορήματος

Δεν είναι πρόταση.

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[\,\text{δ.}\_\_\_\,]$ ίδιο → πρόταση.

Σχόλιο: όπως θα δούμε παρακάτω ένας τύπος μπορεί να έχει πολλές σημασίες σε έναν "κόσμο" (ερμηνεία) ενώ μία πρόταση έχει πάντοτε μία και μοναδική σημασία (ναι ή όχι) σε έναν οποιοδήποτε κόσμο.

__Ορισμός 5:__ Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα της Λ.Κ. και θέλαμε να "ερμηνεύσουμε" τους τύπους της $\mathcal{L}$. Μία __ερμηνεία__ ή δομή ή μοντέλο $\mathcal{A}$ της $\mathcal{L}$ αποτελείται από τα παρακάτω: (1) ένα μη κενό σύνολο A που λέγεται σύμπαν της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|A|$,
(2) Για κάθε σύμβολο σταθεράς $c \in \mathcal{L}$, ∃ ένα μοναδικό στοιχείο του A που συμβολίζεται με $\varepsilon_{\mathcal{A}}(c)$ ή απλά $\varepsilon(c)$. Το $\varepsilon(c)$ θα το λέμε ερμηνεία του c μέσω της $\mathcal{A}$. (3) Για κάθε n-θέσιο σύμβολο συνάρτησης $f \in \mathcal{L}$ αντιστοιχεί μια μοναδική συνάρτηση $\varepsilon_{\mathcal{A}}(f)$ ή $\varepsilon(f): A^n \to A$. (4) Για κάθε n-μελές σύμβολο κατηγορήματος $p \in \mathcal{L}$ αντιστοιχεί μια μοναδική σχέση $\varepsilon_{\mathcal{A}}(p)$ ή απλά $\varepsilon(p) \subseteq A^n$.

__4/5/15__

__Ορισμός ερμηνείας (δομής ή μοντέλου):__ Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα της Λ.Κ. (και θέλαμε να "ερμηνεύσουμε" κάθε τύπο της $\mathcal{L}$). Μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων που αποτελείται από τα παρακάτω: (1) ένα μη κενό σύνολο A που λέγεται σύμπαν της $\mathcal{A}$, (2) ∀ σύμβολο σταθεράς $c \in \mathcal{L}$ υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_{\mathcal{A}}(c)$ ή απλά $\varepsilon(c)$, (3) ∀ n-μελές σύμβολο κατηγορήματος $p \in \mathcal{L}$ υπάρχει μια μοναδική σχέση στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_{\mathcal{A}}(p)$ ή απλά $\varepsilon(p)$ και ισχύει $\varepsilon(p) \subseteq A^n$, (4) για κάθε n-θέσιο σύμβολο συνάρτησης $f \in \mathcal{L}$ υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_{\mathcal{A}}(f)$ ή απλά $\varepsilon(f)$. Ισχύει $\varepsilon(f): A^n \to A$. Η ερμηνεία $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλα τα παραπάνω αντικείμενα, δηλαδή το σύμπαν A και τις ερμηνείες $\varepsilon(c)$, $\varepsilon(p)$, $\varepsilon(f)$ για όλες τις σταθερές, σχέσεις, συναρτήσεις αντίστοιχα που υπάρχουν μέσα στη γλώσσα $\mathcal{L}$.

__Πχ ①:__ $\mathcal{L}_{\Theta A} = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, $\mathcal{A}$: $A = \mathbb{N}$ $\varepsilon(+) =$ η γνωστή πρόσθεση στους φυσικούς.

ερμηνεία με την οποία εργαζόμαστε.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\mathcal{A}$ είναι μία ερμηνεία για την γλώσσα $\mathcal{L}$ και A το σύμπαν της. Τότε μία <u>αποτίμηση v</u> στην $\mathcal{A}$ είναι μια συνάρτηση που δίνει μια μοναδική τιμή (από το A) σε κάθε μεταβλητή x της γλώσσας $\mathcal{L}$.

~~π.χ.~~ $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία με σύμπαν A οι φυσικοί αριθ/οί. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία αποτίμηση v:
$v(x)=5$, $v(y)=7$, $v(z)=8$

<u>Σχόλιο:</u> Δεν είναι σωστό να λέμε "ερμηνεύουμε" μία μεταβλητή x. Το σωστό είναι να λέμε <u>αποτιμούμε</u> την x δίνοντας σ' αυτήν μια συγκεκριμένη τιμή με τη βοήθεια κάποιας αποτίμησης v μέσα σε κάποια ερμηνεία $\mathcal{A}$.

<u>Σχόλιο:</u> Με την χρήση μιας αποτίμησης v μπορούμε να ερμηνεύσουμε μέσα σε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ τύπους που περιέχουν ελεύθερες μεταβλητές.

<u>π.χ. ③:</u> τύπος $\tau = x \le 1$ και η ερμηνεία $\mathcal{A}$: $A=\mathbb{N}$, $\varepsilon(\le)$ = το γνωστό $\underset{*}{\le}$ στους $\mathbb{N}$. $\varepsilon(1) = 1_{\mathbb{N}}$.

Για να ερμηνεύσουμε τον τύπο τ είμαστε αναγκασμένοι να δουλέψουμε με μια συγκεκριμένη αποτίμηση v.

<u>π.χ.</u> $v(x)=11$, $v(z)=0$ για οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή z. Τότε η τ είναι <u>ψευδής</u> στην ερμηνεία $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας την συγκεκριμένη v, διότι:

$$v(x)\ \varepsilon(\le)\ v(1) \Rightarrow 11 \le 1 \ ↯.$$

<u>π.χ.</u> $v'(x)=\underset{*}{0}$, $v'(z)=7$ για οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή z. Τότε η τ είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$, αλλά χρησιμοποιώντας την v', διότι

$$v'(x)\ \varepsilon(\le)\ v'(1) \Rightarrow 0 \le 1 \ ✓.$$

<u>Σχόλιο:</u> Η ερμηνεία ενός τύπου τ εξαρτάται από 2 παράγοντες: την ερμηνεία $\mathcal{A}$ στην οποία ερμηνεύουμε τα σύμβολα της γλώσσας μας $\mathcal{L}$ και από την αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ με την οποία αποτιμούμε όλες τις <u>μεταβλητές</u> της γλώσσας μας $\mathcal{L}$.

$\mathcal{E}(\cdot)$ = ο γνωστός πολ/σμός στους φυσικούς, $\mathcal{E}(0)$ = το μηδέν $= 0_A$,
$\mathcal{E}(1)$ = το 1_A, $\mathcal{E}(\leq)$ = το γνωστό $\leq$ στους φυσικούς $(\leq_A)$.
$\mathcal{E}(3) = \mathcal{E}(1+1+1) = \mathcal{E}(1)\ \mathcal{E}(+)\ \mathcal{E}(1)\ \mathcal{E}(+)\ \mathcal{E}(1) = 3_A$.

<u>άλλη ερμηνεία:</u> $\mathcal{A}' : \underset{\text{άρτιοι}}{A'} = \{0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{N}$.

$\mathcal{E}(0) = 0 = 0_{A'}$, $\mathcal{E}(1) = 2 = 2_{A'}$, $\mathcal{E}(\leq)$ = το γνωστό $\leq$ στους άρτιους φυσικούς,
$\mathcal{E}(+)$ = η γνωστή πρόσθεση στο $2\mathbb{N}$, $\mathcal{E}(\cdot)$ = ο πολ/σμός στο $2\mathbb{N}$.

⊛ $(\forall X)\,(\exists Y)\,(X = (1+1)\cdot Y \vee X = (1+1)Y+1)$.

<u>άλλη ερμηνεία:</u> $\mathcal{A}'' : A'' = \mathbb{N}$, $\mathcal{E}(0) = 0 = 0_{A''}$, $\mathcal{E}(1) = 0$ (μηδέν) $= 0_{A''}$,

$\mathcal{E}(+)$, $\mathcal{E}(\cdot)$, $\mathcal{E}(\leq)$ οι ερμηνείες κατά τα γνωστά.
Στην ⊛ → προφανώς σε αυτή την ερμηνεία δεν μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο των φυσικών σε άρτιους και περιττούς.

<u>π.χ. ②:</u> $\mathcal{L}_{ΘΣ} = \{\emptyset, \in\}$ $\mathcal{B} : B = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$
$\mathcal{E}(\emptyset) = 0_B$, $\mathcal{E}(\in) \subseteq B^2$ (διμελής σχέση). Ορίζουμε $\mathcal{E}(\in) = \leq$ στους ακεραίους $\mathbb{Z}$.

<u>π.χ.</u> $-1\ \mathcal{E}(\in)\ 2$?? Ισχύει.

$(\forall X)\,(X \notin \emptyset)$ → η πρόταση αυτή δεν αληθεύει (τουλάχιστον διαισθητικά) στην παραπάνω ερμηνεία $\mathcal{B}$, διότι $\mathcal{E}(\emptyset)$ περιέχει όλα τα μικρότερα ή ίσα του μηδενός ($\mathcal{B}$).

<u>π.χ.</u> $\mathcal{B}' : B = \{1_{\mathbb{N}}\}$, $\mathcal{E}(\emptyset) = 1_{\mathbb{N}}$, $\mathcal{E}(\in) = \emptyset$. Σε αυτήν την τετριμμένη ερμηνεία $\mathcal{B}'$ το $\mathcal{E}(\emptyset)$ είναι ένα αντικείμενο που δεν περιέχει τίποτα.

<u>π.χ.</u> $\mathcal{B}'' : B'' = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ $\mathcal{E}(\emptyset) = 0_{B''}$
$\mathcal{E}(\in)$ = το $<_{B''}$ = η σχέση του μικρότερου στους φυσικούς

$3_{B''} = \{\overset{\mathcal{E}(\emptyset)}{0}, 1_{B''}, 2_{B''}\}$

<u>**Σχόλιο:**</u> Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται διαισθητικά ότι η αλήθεια ή το ψέμα ενός τύπου τ εξαρτάται από τη συγκεκριμένη

Ορισμός: Θα γράφουμε $\mathcal{A}, v$ (ικανοποιεί) $\models \tau$ και συμβολίζουμε το γεγονός ότι η τ αληθεύει στην $\mathcal{A}$ με χρήση της αποτίμησης v.

π.χ. $\mathcal{A}, v \not\models x \leq 1$
$\mathcal{A}, v' \models x \leq 1$

11/5/2015

Για ποιες περιπτώσεις η αληθοτιμή ενός τύπου τ δεν εξαρτάται από την δοθείσα αποτίμηση v;

π.χ. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ΘΑ}$ και τ ο τύπος $x_1 + x_2 = x_3$, $\mathcal{A}$ = η δομή των φυσικών αριθμών με τις συνήθεις ερμηνείες για το $(+)$, $(\cdot)$, $(\leq)$, (0), (1). Έστω επίσης $v(x_1) = 7$, $v(x_2) = 5$, $v(x_3) = 12$. Τότε είναι προφανές ότι $\mathcal{A}, v \models \tau$. Έστω $v'(x_1) = 7$, $v'(x_2) = 5$, $v'(x_3) = 11$. Τότε είναι προφανές ότι $\mathcal{A}, v \not\models \tau$.

Θεωρούμε τώρα την $\tau' = (\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$. Έχουμε $\mathcal{A}, v \models \tau'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός, έστω a_3, έτσι ώστε $\mathcal{A}, v[x_3/a_3]$ ικανοποιεί το $x_1 + x_2 = x_3$. Προφανώς ισχύει για $a_3 = 12$. Έχουμε $\mathcal{A}, v' \models \tau'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός a_3' έτσι ώστε ---- (όμοια). Προφανώς ισχύει για $a_3' = 12$.

Θεωρούμε τώρα την $\tau_2 = (\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$. Έχουμε $\mathcal{A}, v \models \tau_2$ ανν για κάθε φυσικό, έστω a_3, ισχύει $\mathcal{A}, v[x_3/a_3] \models x_1 + x_2 = x_3$. Προφανώς δεν ισχύει!!! Όμοια δουλεύουμε για την v'.

Συμπέρασμα: Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι ένας τύπος τ παίρνει κάποια αληθοτιμή (α ή ψ) ανεξάρτητα από τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές που εμφανίζονται δεσμευμένες μέσα στον τύπο τ. **Παράδειγμα:** στο $(\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ το x_3 είναι δεσμευμένο και άρα το γεγονός $\mathcal{A}, v \models (\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ δεν εξαρτάται από την τιμή $v(x_3)$. Ισχύει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Αν v, v' είναι 2 διαφορετικές αποτιμήσεις, οι οποίες, όμως, συμφωνούν (δηλ. δίνουν τις ίδιες τιμές) σε μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες μέσα στον τύπο τ

5/5/15

Ορισμός: Ο όρος σε μία γλώσσα $\mathcal{L}$ εννοούμε 1) κάθε σύμβολο σταθεράς $c \in \mathcal{L}$, 2) κάθε μεταβλητή $X \in M(\mathcal{L})$, όπου $M(\mathcal{L})$ παριστάνουμε το σύνολο των μεταβλητών της $\mathcal{L}$, 3) κάθε σύμβολο συνάρτησης $f \in \mathcal{L}$ όπου στις θέσεις της έχουμε τοποθετήσει ήδη κατασκευασμένους όρους από προηγούμενα βήματα.

Ερώτημα: Πώς δίνουμε κάποιες τιμές σε όρους της γλώσσας μας?

Απάντηση: Εάν $\mathcal{A}$ είναι μία ερμηνεία, τότε μπορούμε να δώσουμε την τιμή $\mathcal{E}(c)$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c. Έστω v μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$, τότε μπορούμε να δώσουμε την τιμή $v(X)$ σε κάθε μεταβλητή X, $X \in M(\mathcal{L})$. Όμως για να δώσουμε κάποια τιμή σε κάποιον πιο σύνθετο τύπο τ θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο σε μία συνάρτηση v^* που δίνει μια μοναδική τιμή μέσα από το σύμπαν A της $\mathcal{A}$ (ερμηνείας) και μάλιστα με τις παρακάτω ιδιότητες: (1) Αν $\tau = c$ με $c \in \mathcal{L}$ ένα σύμβολο σταθεράς, τότε $v^*(\tau) = \mathcal{E}(c)$, (2) Αν $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ και f σύμβολο συνάρτησης της $\mathcal{L}$ και $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ όροι της $\mathcal{L}$, τότε $v^*(\tau) =$ Ερμηνεία της $f = \mathcal{E}(f)\,(v^*(\tau_1), v^*(\tau_2), \ldots, v^*(\tau_n))$

Παράδειγμα: $\mathcal{L}_{ΘΑ} = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$, $\mathcal{A}$: $A = \mathbb{N}$, $\varepsilon(\leq) =$ συνήθης ερμηνεία του $\leq$, $\varepsilon(+) =$ συνήθης πρόσθεση στους $\mathbb{N}$, $\varepsilon(\cdot) =$ συνήθης πολ/σμός στους $\mathbb{N}$, $\varepsilon(0) =$ μηδέν$_{\mathbb{N}}$, $\varepsilon(1) =$ άσσος$_{\mathbb{N}}$.

$\tau = X^2 + 5 = X \cdot X + (1+1+1+1+1)$ Έστω v τ.ω. $v(X) = 2$, $v(Y) = 4$, $v(Z) = 0$ για $Z \neq X, Y$.

$v^*(\tau) = v(X)\ \varepsilon(\cdot)\ v(X)\ \varepsilon(+)\ (\varepsilon(1)\ \varepsilon(+) \ldots) =$

$= 2\ \varepsilon(\cdot)\ 2\ \varepsilon(+)\ (1\ \varepsilon(+)\ 1\ \varepsilon(+) \ldots) = 4\ \cancel{+5}\ \varepsilon(+)5 = 9_{\mathbb{N}}$

$\mathcal{A}'$: $|\mathcal{A}'| = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\varepsilon(+) = +\bmod 5$, $\varepsilon(\cdot) = \cdot \bmod 5$, $\varepsilon(0) = 0_5$, $\varepsilon(1) = 1^{\text{σύμπαν}}_{A'}$, η v όπως παραπάνω ορίζεται

$v^*(\tau) = v(X)\ \varepsilon(\cdot)\ v(X)\ \varepsilon(+)\ (\varepsilon(1)\ \varepsilon(+)\ \varepsilon(1) \ldots) =$

$= 2\ \varepsilon(\cdot)\ 2\ \varepsilon(+)\ (0 \bmod 5) = 4$

Σχόλιο: Η τιμή $v^*(\tau)$ που θα πάρει ο όρος τ εξαρτάται από την v αλλά και από την ερμηνεία $\mathcal{A}$ με την οποία δουλεύουμε. Ακόμα, είναι φανερό ότι αν v_1, v_2 είναι 2 διαφορετικές αποτιμήσεις οι οποίες όμως δίνουν την ίδια τιμή σε όλες τις μεταβλητές X που εμφανίζονται μέσα στο τ, τότε $v_1^*(\tau) = v_2^*(\tau)$.

πχ. Αν $\tau = x_1 \cdot x_2 + 5$ και $v_1(x_1) = v_2(x_1) = 2_N$ και $v_1(x_2) = v_2(x_2) = 3_N$ και $v_1(z) \neq v_2(z)$ για όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές z, τότε αναγκαστικά $v_1^*(\tau) = v_1(x_1)\ \mathcal{E}(\cdot)\ v_1(x_2)\ \mathcal{E}(+)\ \mathcal{E}(5) =$
$= v_2(x_2)\ \mathcal{E}(\cdot)\ v_2(x_2)\ \mathcal{E}(+)\ \mathcal{E}(5) = v_2^*(\tau)$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία και v μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα που αναφέραμε οι v επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια συνάρτηση v^* που δίνει μια τιμή μοναδική σε κάθε όρο της γλώσσας μας. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $v(\tau)$ αντί του σωστού $v^*(\tau)$ για λόγους απλότητας. σύμπαν

Ορισμός: (Τοπική αλλαγή μίας αποτίμησης v) Έστω $a \in |\mathcal{A}|$ και v μία αποτίμηση. Τότε με $v[x/a]$ θα εννοούμε την αποτίμηση ω που δίνει την ~~[illegible]~~ τιμή $v(z)$ σε κάθε μεταβλητή $z \neq x$, ενώ για $z = x$ έχουμε ~~ω(x) είναι διαφορετική του v(x)~~ ~~[illegible]~~ $\omega(x) = a$.

Παράδειγμα ①: $\underbrace{v[x_2/3]}_{\omega}(x_1) = v(x_1)$. $v[x_2/3](x_2) = 3$,
$v[x_2/3](z) = v(z)$

②: $\underbrace{v[x_1/0][x_2/3]}_{\omega}[x_1/4](x_1) = 4$

την πιο δεξιά τιμή

$v[x_1/0][x_2/3][x_1/4](x_2) = 3$

Ορισμός αλήθειας του Tarski: Έστω $\mathcal{A}$ μία δομή (ερμηνεία) στην $\mathcal{L}$ και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Έστω ϕ ένας τύπος της $\mathcal{L}$. Τότε λέμε ότι ο ϕ αληθεύει ή ικανοποιείται στη δομή $\mathcal{A}$ και ~~[illegible]~~ για την αποτίμηση v (γράφουμε συμβολικά $\mathcal{A}, v \models \phi$) αν ισχύουν τα παρακάτω: (1) ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $\tau_1 = \tau_2$ και τ_1, τ_2 όροι της γλώσσας μας $\mathcal{L}$ και ισχύει $v(\tau_1) = v(\tau_2)$,
(2) Εάν ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ όπου P είναι σύμβολο κατηγορήματος με n-μέλη τους όρους $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, τότε θα πρέπει η n-άδα $(v(\tau_1), v(\tau_2), \ldots, v(\tau_n))$ να ανήκει στην ερμηνεία $\mathcal{E}(P)$.

Παράδειγμα: $\phi = x < y$. Τότε ~~[illegible]~~ για να αληθεύει ο ϕ, δηλ. για να ισχύει $\mathcal{A}, v \models \phi$ θα πρέπει $(v(x), v(y)) \in \mathcal{E}(\leq)$ ή με άλλα λόγια $v(x)\ \mathcal{E}(\leq)\ v(y)$

(3) Έστω $\phi = (\neg \psi)$ με ψ ένας τύπος της γλώσσας μας.

Τότε για να αληθεύει ο φ θα πρέπει ο ψ να μην αληθεύει ή με άλλα λόγια $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν $\mathcal{A}, v \not\models \psi$. (4) Έστω ~~Εάν~~ $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ με ϕ_1, ϕ_2 τύποι της γλώσσας μας, τότε για να αληθεύει ο φ θα πρέπει και οι ϕ_1, ϕ_2 να αληθεύουν, δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν $\mathcal{A}, v \models \phi_1$ και $\mathcal{A}, v \models \phi_2$. (5) Έστω $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$, τότε για να αληθεύει ο φ θα πρέπει ένα τουλάχιστον εκ των ϕ_1 ϕ_2 να αληθεύει, δηλ. $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν $\mathcal{A}, v \models \phi_1$ ή $\mathcal{A}, v \models \phi_2$ (6) Έστω $\phi = \phi_1 \to \phi_2$, τότε για να αληθεύει ο φ θα πρέπει να αληθεύει ο ϕ_2 ~~κάθε φορά~~ στην περίπτωση που ο ϕ_1 είναι αληθινός, δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν $\mathcal{A}, v \models \phi_1 \Rightarrow \mathcal{A}, v \models \phi_2$, (7) Έστω $\phi = \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$, για να αληθεύει ο φ θα πρέπει οι τύποι ϕ_1, ϕ_2 να παίρνουν την ίδια αληθοτιμή, δηλ. $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν $(\mathcal{A}, v \models \phi_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \models \phi_2)$. (8) Έστω $\phi = (\forall x)\psi$, όπου ψ είναι ένας τύπος και x μεταβλητή. Τότε ο φ αληθεύει ανν ο ψ αληθεύει για την αποτίμηση $v[x/a]$ όπου a είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του σύμπαντος της ερμηνείας $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{A} v \models \phi$ ανν για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} v[x/a] \models \psi$. (9) Έστω $\phi = (\exists x)\psi$, όπου ψ είναι ένας τύπος της γλώσσας μας. Τότε ο φ αληθεύει ανν ο ψ αληθεύει για την αποτίμηση $v[x/a_0]$ όπου a_0 είναι ένα κατάλληλο στοιχείο του σύμπαντος $|\mathcal{A}|$, δηλ. $\mathcal{A}, v \models \phi$ ανν υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$ έτσι ώστε $\mathcal{A}, v[x/a_0] \models \psi$.

Μαθ. Λογική

7/5/15

SOS

<u>Ορισμός</u> (Tarski): Έστω τ ένας τύπος σε μια γλώσσα $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ μι
ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε
$\mathcal{A}, v \models \tau$ ανν 1) 2) 3) κλπ. 8) Εάν $\tau = (\forall X)\varphi$ τότε $\mathcal{A}, v \models \tau$
$\iff$ για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A}, v[X|a] \models \varphi$. 9) Εάν $\tau = (\exists X)\varphi$
τότε $\mathcal{A}, v \models \tau \iff$ υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A}, v[X|a_0] \models \varphi$.

Π.χ. Έστω p, q δύο μονομελή σύμβολα κατηγορημάτων σε κάποιο γλώ
και $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.
) τύπος $\tau = (\exists X)(\exists Z)(\forall X_2)([p(Z) \wedge \neg q(X)] \vee \neg p(Z) \vee q(X_2)$

$\mathcal{A}, v \models \tau \iff$ υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$ τ.ω. $\mathcal{A}, v[X|a_0] \models (\exists Z)(\forall X_2) \ldots$
<u>ανν</u> υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$: υπάρχει $a_0' \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A}, v[X|a_0][Z|a_0'] \models (\forall X_2)$
<u>ανν</u> υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$: υπάρχει $a_0' \in |\mathcal{A}|$: για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει:
$\mathcal{A}, \underbrace{v[X|a_0][Z|a_0'][X_2|a]}_{w} \models ([p(Z) \wedge \neg q(X)] \vee \neg p(Z) \vee q(X_2))$ <u>ανν</u>

αι τουλάχιστον εκ των παρακάτω ισχύει: 1) $A, w \models p(Z) \wedge \neg q(X)$
2) $A, w \models \neg p(Z)$
3) $A, w \models q(X_2)$

<u>ανν</u> 1) $\mathcal{A}, w \models p(Z)$ και συγχρόνως $\mathcal{A}, w \models \neg q(X)$
2) $\mathcal{A}, w \models \neg p(Z)$
3) $\mathcal{A}, w \models q(X_2)$

<u>Π.χ.</u> $\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}| = \{\mu, \nu\}$
$\mathcal{E}(p) = \{\mu, \nu\}$
$\mathcal{E}(q) = \{\mu\}$

Έχουμε $\mathcal{A}, w \not\models q(X_2)$ για $a = \nu$
Έχουμε $\mathcal{A}, w \not\models \neg(p(Z)$ διότι όλα τα a_0' του $\overbrace{\text{σύμπαντος}}^{\{\mu,\nu\}}$ επαληθεύουν το
(Z) ή με άλλα λόγια ανήκουν στην $\mathcal{E}(p)$.

Εχουμε $\mathcal{A},\omega \models P(z) \wedge \neg q(x)$ διοτι για $a_0 = v$ και αξ[redacted]
[redacted] του συμπαντος ισχυει: $\mathcal{A},\omega \models P(z) \wedge \neg q(x)$. Δηλ. ισχυουν
υτοχρονως οτι $a \in \varepsilon(p)$ και $a_0 = v \notin \varepsilon(q)$

Ερωτημα: Αραγε μπορουμε να κατασκευασουμε μια καταλληλη ερμηνεια B
αι αποτιμηση υ' στην B τ.ω. να μην αληθευει ο τυπος τ;

[redacted] Απαντηση: Θα πρεπει για καθε a_0 του συμπαντος $|\mathcal{B}|$: για κα
λό του συμπαντος $|\mathcal{B}|$: υπαρχει $a \in |\mathcal{B}|$: $\mathcal{B}, \underbrace{v'[X|a_0][z|a_0'][X_2|a]}_{\omega'}$
$\neg([\ldots]\ldots)$

νν $\mathcal{B},\omega' \models \neg[P(z) \wedge q(x)] \wedge P(z) \wedge \neg q(X_2)$.

νν $\begin{cases} \varepsilon(p) = \{\mu, v\} \\ \varepsilon(q) = \{\mu, v\} \end{cases}$ (εαν θελουμε να επαληθευεται η πρωτη συζευξη)

μως στην προσπαθεια μας να ικανοποιησουμε την πρωτη και την δευτερη συζευ
τυχαινουμε να ικανοποιησουμε την τριτη, αρα τετοια ερμηνεια απο δυ
οιχεια δεν μπορει να υπαρχει.

Μεθοδολογια: 1) Εάν ο τ ειναι απλά ενα κατηγορημα (π.χ. τ=p
ότε $\mathcal{A},v \models p(t_1,t_2,t_3)$ ανν [redacted] $(\varepsilon(t_1),\varepsilon(t_2),\varepsilon(t_3)) \in \varepsilon(p)$

2) Εάν ο τ ειναι μια ισοτητα (π.χ. $\tau = t_1 = t_2$ οπου t_1, t_2 ειναι οροι της $\mathcal{L}$) τοτε $\mathcal{A},v \not\models t_1 = t_2$ ανν $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2)$

3) Εάν $\tau = (\forall X)\varphi$ τοτε [redacted] $\mathcal{A},v \not\models \tau$
νν δεν ισχυει $\mathcal{A},v \models (\forall X)\varphi$ ανν δεν ισχυει για καθε $a \in |\mathcal{A}|$
σχυει $\mathcal{A},v[X|a] \models \varphi$ ανν υπαρχει $a \in |\mathcal{A}|$ δεν ισχυει $\mathcal{A},v[X|a] \models \varphi$
νν υπαρχει $a \in |\mathcal{A}|$, $A,v[X|a] \models \neg\varphi$ ανν $\mathcal{A},v \models (\exists X)\neg\varphi$.

4) Εάν $\tau = (\exists X)\varphi$ τοτε $\mathcal{A},v \not\models \tau$ ανν $\mathcal{A},v \models (\forall X)\neg\varphi$.

.χ. $\mathcal{B},v' \not\models (\exists X)(\exists z)(\forall x_2)([P(z) \wedge \neg q(x)] \vee \neg P(z) \vee q(x_2))$ αν

$\mathcal{B},v' \models (\forall X)(\forall z)(\exists x_2)([\neg P(z) \vee q(x)] \wedge P(z) \wedge \neg q(x_2))$

ωv για τυχαίο $a_0 \in |\mathcal{B}|$, για τυχαίο $a_0' \in |\mathcal{B}|$ να μπορέσουμε να βρούμε κατάλληλο $a \in |\mathcal{B}|$ (το a προφανώς πιθανά θα εξαρτάται από a_0', a_0) έτσι ώστε

$$\mathcal{B}, v'[x/a_0][z/a_0'][x_2/a] \models \left(\underbrace{[\neg P(2) \vee q(x)]}_{\textcircled{1}} \wedge \underbrace{P(2)}_{\textcircled{2}} \wedge \neg \underbrace{q(x_2)}_{\textcircled{3}} \right)$$

ωv $a_0' \in \mathcal{E}(p)$ (από ②)

$a \notin \mathcal{E}(q)$ (από ③) } Δεν μπορούν να ισχύουν συγχρόνως και άρα δεν υπάρχει

$a \in \mathcal{E}(q)$ (από ①) } $\mathcal{B}$ που να διαψεύδει τον τύπο τ.

Ορισμός: Έστω τ ένας τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε αυτός θα λέγεται ταυτολογία ή ταυτότητα ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ ισχύει ότι $\mathcal{A}, v \models \tau$.

Μερικά παραδείγματα ταυτολογιών

) $x_1 = x_1$, 2) $(\exists x)(x=x)$, 3) $(\forall x)(x=x)$, 4) $(\neg(\forall x)\varphi) \longleftrightarrow (\exists x)\neg\varphi$ για τυχαίο τύπο φ), 5) $\neg(\exists x)\varphi \longleftrightarrow (\forall x)\neg\varphi$

Ορισμός: Έστω τ ένας τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε αυτός θα λέγεται αντιφατικός ή αντίφαση ή αντιλογία ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ ισχύει ότι $\mathcal{A}, v \not\models \tau$.

Π.χ. 1) $x_1 \neq x_1$, 2) $(\forall x)(x \neq x)$, 3) $(\exists x)(x \neq x)$, 4) $(\forall x)\varphi \wedge (\exists x)\neg\varphi$, 5) $(\exists x)\varphi \wedge (\forall x)\neg\varphi$.

$Y = c_1 + c_2 e^{-p(0)\cdot\tau}$

Για $Y(0) = \alpha \Leftrightarrow c_1 + c_2 = \alpha \Leftrightarrow c_2 = \alpha - c_1$ και

$Y(\tau) = c_1 + (\alpha - c_2)\, e^{-p(0)\cdot\tau}$

Συναρμογή $\lim_{\tau\to\infty} Y(\tau) = C_1 = b\exp\left(\int_0^1 \frac{q(s)}{p(s)}\right) = \lim_{t\to 0} y_0(t)$

$C_1 = C$

Τελικά $y \simeq y_0(t) + Y(t/\varepsilon) - c_1$

Μαθ. λογική.
7/05/15.

2η ωρα.

Μεθοδολογια: 1) Εαν ο τ ειναι απλά ένα κατηγόρημα π.χ. $\tau = P(\circ,\circ,\circ)$ τότε $\mathcal{A},\upsilon \models p(t_1,t_2,t_3)$ ανν $(\varepsilon(t_1),\varepsilon(t_2),\varepsilon(t_3)) \in \varepsilon(p)$.

2) Εαν το τ ειναι μια ισοτητα (π.χ. $\tau = t_1 = t_2$, οπου t_1, t_2 ειναι όροι της L) τότε $\mathcal{A},\upsilon \models t_1 = t_2$ ανν $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2)$

3) Εαν $\tau = (\forall X)\varphi$ τότε $\mathcal{A},\upsilon \not\models \tau$ ανν δεν ισχυει $\mathcal{A},\upsilon \models (\forall X)\varphi$
ανν δεν ισχυει για καθε $\alpha \in |\mathcal{A}|$ ισχυει $\mathcal{A},\upsilon[X|\alpha] \models \varphi$.
ανν υπαρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$ δεν ισχυει $\mathcal{A},\upsilon[X|\alpha] \models \varphi$
ανν υπαρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A},\upsilon[X|\alpha] \models \neg\varphi$
ανν $\mathcal{A},\upsilon \models (\exists X)\neg\varphi$

4) Εαν $Z = (\exists X)\varphi$ τότε $\mathcal{A},\upsilon \not\models \tau$ ανν $\mathcal{A},\upsilon \models (\forall X)\neg\varphi$.

(πχ) $\mathcal{B},\upsilon' \not\models (\exists X)(\exists Z)(\forall X_2)(\{P(Z) \wedge \neg q(X)\} \vee \neg P(Z) \vee q(X_2)) \Leftrightarrow$
$\mathcal{B},\upsilon' \models (\forall X)(\forall Z)(\exists X_2)(\neg(\{P(Z) \wedge \neg q(X)\} \vee \neg P(Z) \vee \neg q(X_2) \Leftrightarrow$
$\mathcal{B},\upsilon' \models (\ )(\ )(\ )(\{\neg P(Z) \vee q(X)\} \wedge P(Z) \wedge \neg q(X_2))$.

ανν για τυχαιο $\alpha_0 \in |\mathcal{B}|$, για τυχαιο $\alpha_0' \in |\mathcal{B}|$ να μπορέσουμε να βρουμε κασποιο κατάλληλο $\alpha \in |\mathcal{B}|$, (*)
(Σχόλιο: α εξαρτάται πιθανότατα από τις δοθείσες τιμές των α_0, α_0'.) (*) έτσι ώστε $\mathcal{B},\upsilon'[X|\alpha_0][Z|\alpha_0'][X_2|\alpha] \models$

$$(\overset{①}{\{\exists P(z) \lor q(x)\}} \text{[illegible]} \land \overset{②}{P(Z)} \land \overset{③}{\neg q(x_2)})$$

<u>ανν</u> $a_0 \in E(p)$ (απο ②)

$a \notin E(q)$ (από ③)

$a_0 \in E(q)$ (από ①)

Αυτά δεν μπορουν να ισχυουν συγχρονως και αρα δεν υπαρχει $\mathfrak{B}$ που να διαψευδει τον τύπο τ.

<u>Ορισμός</u>

Έστω τ ένας τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε αυτός θα λέγεται ταυτολογια ή ταυτότητα <u>ανν</u> για καθε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση υ στην $\mathfrak{A}$ ισχυει ότι $\mathfrak{A}, υ \models Z$.

ⓅⓍ ταυτολογίες 1) $x_1 = x_1$, 2) $(\exists x)(x = x)$, 3) $(\forall x)(x = x)$, 4) $(\neg(\forall x)\phi \leftrightarrow (\exists x)\neg\phi)$
5) $\neg(\exists x)\phi \leftrightarrow (\forall x)\neg\phi$.

<u>Ορισμος</u>

Ένας τύπος τ μιας γλώσσας $\mathcal{L}$, θα λέγεται αντίφαση ή αντιλογια <u>ανν</u> για καθε ερμηνεία $\mathfrak{A}$ και για καθε υ αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$ ισχυει $\mathfrak{A}, υ \not\models τ$.

(πχ) $x_1 \neq x_1$, $(\forall x)(x \neq x)$, $(\exists x)(x \neq x)$, $(\forall x)\phi \land (\exists x)\neg\phi$, $(\exists x)\phi \land (\forall x)\neg\phi$.

Ορισμός: Θα γράφουμε $\mathcal{A}, v$ (ικανοποιεί) $\models \tau$ και συμβολίζουμε το γεγονός ότι η τ αληθεύει στην $\mathcal{A}$ με χρήση της αποτίμησης v.

π.χ. $\mathcal{A}, v \not\models x \leq 1$.
$\mathcal{A}, v' \models x \leq 1$.

11/5/2015

Για ποιες περιπτώσεις η αληθοτιμή ενός τύπου τ δεν εξαρτάται από την δοθείσα αποτίμηση v;

π.χ. $L = L_{ΘA}$ και τ ο τύπος $x_1 + x_2 = x_3$, $\mathcal{A}$ = η δομή των φυσικών αριθμών με τις συνήθεις ερμηνείες για το $(+), (\cdot), (\leq), (0), (1)$. Έστω επίσης $v(x_1) = 7$, $v(x_2) = 5$, $v(x_3) = 12$. Τότε είναι προφανές ότι $\mathcal{A}, v \models \tau$. Έστω $v'(x_1) = 7$, $v'(x_2) = 5$, $v'(x_3) = 11$. Τότε είναι προφανές ότι $\mathcal{A}, v \not\models \tau$.

Θεωρούμε τώρα την $\tau' = (\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$. Έχουμε $\mathcal{A}, v \models \tau'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός, έστω a_3, έτσι ώστε $\mathcal{A}, v[x_3/a_3]$ ικανοποιεί το $x_1 + x_2 = x_3$. Προφανώς ισχύει για $a_3 = 12$. Έχουμε $\mathcal{A}, v' \models \tau'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός a_3' έτσι ώστε ...... (όμοια). Προφανώς ισχύει για $a_3' = 12$.

Θεωρούμε τώρα την $\tau_2 = (\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$. Έχουμε $\mathcal{A}, v \models \tau_2$ ανν για κάθε φυσικό, έστω a_3, ισχύει $\mathcal{A}, v[x_3/a_3] \models x_1 + x_2 = x_3$. Προφανώς δεν ισχύει!!!
Όμοια δουλεύουμε για την v'.

Συμπέρασμα: Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι ένας τύπος τ παίρνει κάποια αληθοτιμή (α ή ψ) ανεξάρτητα από τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές που εμφανίζονται δεσμευμένες μέσα στον τύπο τ. **Παράδειγμα:** στο $(\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ το x_3 είναι δεσμευμένο και άρα το γεγονός $\mathcal{A}, v \models (\forall x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ δεν εξαρτάται από την τιμή $v(x_3)$.
Ισχύει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Αν v, v' είναι 2 διαφορετικές αποτιμήσεις, οι οποίες, όμως, συμφωνούν (δηλ. δίνουν τις ίδιες τιμές) σε μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες μέσα στο τύπο τ

τότε $\mathcal{A}, v \models \tau$ ανν $\mathcal{A}, v' \models \tau$ π.χ. $\tau = (\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$.
ελεύθερες: x_1, x_2, δεσμευμένη: x_3. Έχουμε, λοιπόν, ότι εάν $v(x_1) = v'(x_1)$ και $v(x_2 = v'(x_2)$, τότε $\mathcal{A}, v \models \tau$ ανν $\mathcal{A}, v' \models \tau$.

Παρατήρηση: Εάν η τ δεν ~~έχει~~ καθόλου ελεύθερες μεταβλητές (δηλ. η τ είναι πρόταση), τότε η τ είτε θα αληθεύει για όλες τις αποτιμήσεις v είτε θα διαψεύδεται για όλες τις αποτιμήσεις v.

π.χ. $\tau' = (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$, έχουμε για τυχαίο v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, v \models \tau'$ ανν
$\mathcal{A}, v[x_1/a_1][x_2/a_2][x_3/a_3] \models x_1 + x_2 = x_3$
ανν υπάρχει κατάλληλο $a_1 \in \mathbb{N}$, για τυχαίο $a_2 \in \mathbb{N}$, υπάρχει κατάλληλο a_3: $a_1 (+) a_2 = a_3$ ισχύει!
$a_1 = 1$, για τυχαίο a_2, $a_3 = 1 + a_2$.
αληθεύει στην $\mathcal{A}$.

$\tau_2 = (\exists x_1)(\exists x_3)(\forall x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$. Έχουμε για τυχαίο v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}, v' \models \tau_2$ ανν
$\mathcal{A}, v[x_1/a_1][x_3/a_3][x_2/a_2] \models x_1 + x_2 = x_3$
ανν υπάρχει κατάλληλο a_1, υπάρχει κατάλληλο a_3, για τυχαίο a_2 ισχύει $a_1 (+) a_2 = a_3$. Όμως αυτό δεν ισχύει για $a_2 = a_3$ δηλ. $a_1 + a_3 \neq a_3$.

Σχόλιο: Όπως είδαμε από τα παραπάνω παραδείγματα η σειρά των ποσοδεικτών μέσα σε έναν τύπο τ παίζει ρόλο στο αν ο τύπος αληθεύει ή όχι. π.χ. $\mathcal{A}, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ ανεξάρτητα ποιο είναι το v.
$\mathcal{A}, v \not\models (\exists x_1)(\exists x_3)(\forall x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$ -//- το v.

Αργότερα θα μάθουμε κάποιους νόμους με τη μετακίνηση των ποσοδεικτών όπως: (1) $\mathcal{A}, v \models (\exists x_1)(\exists x_2)\tau$ ανν
$\mathcal{A}, v \models (\exists x_2)(\exists x_1)\tau$, (2) $\mathcal{A}, v \models (\forall x_1)(x_2)\tau$ ανν
$\mathcal{A}, v \models (\forall x_2)(\forall x_1)\tau$, (3) $\mathcal{A}, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)\tau$ τότε
$\mathcal{A}, v \models (\forall x_2)(\exists x_1)\tau$.
Το αντίστροφο του τελευταίου νόμου δεν ισχύει.

π.χ. $\mathcal{A}$ = Η δομή των $\mathbb{N}$ και $\tau = x_2 \neq x_1 \to x_1 < x_2$.
Έχουμε $\mathcal{A}, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)\tau$ ανν $\mathcal{A}, v[x_1/a_1][x_2/a_2] \models (x_2 \neq x_1 \to x_1 < x_2)$ ανν υπάρχει κατάλληλο $a_1 \in \mathbb{N}$, για τυχαίο $a_2 \in \mathbb{N}$, εάν $a_2 \neq a_1$, τότε $a_1\, \varepsilon(<)\, a_2$. Παίρνουμε το $a_1 = 1$

π.χ. $\mathcal{A}, v \not\models (\forall x_2)(\exists x_1)(x_2 \neq x_1 \to x_1 < x_2)$
για $a_2 = 1$, τότε δεν μπορούμε να βρούμε κατάλληλο $a_1 \neq a_2$ τώ $a_1 < a_2$.
~~για $a_2 = 2$~~. Και αυτός ο τύπος αληθεύει.

Έστω $\tau : (\exists x_1)(\forall x_2)(x_1 \leq x_2)$ αληθεύει
$\tau' : (\exists x_1)(\forall x_2)(x_1 + 1 \geq x_2)$ $\mathcal{A}, v \not\models \tau$ δεν αληθεύει
$\tau'' : (\forall x_2)(\exists x_1)(x_1 + 1 \geq x_2)$ όπου $\mathcal{A} = (\mathbb{N}$.
αληθεύει δηλ. $\mathcal{A}, v \models \tau''$. $(a_1 = a_2)$

ξο) Άσκηση: Δίνεται ο τύπος $\tau : (\forall x_1)(\forall x_3)[x_1 \leq x_3 \to (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)]$ στη γλώσσα $\mathcal{L}_{ΘΑ} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$
~~Άσκηση~~ (1) Γιατί η αληθοτιμή του παραπάνω τύπου δεν εξαρτάται από την αποτίμηση που παίρνουμε???
(2) Αν η δομή $\mathcal{A}$ είχε μόνο 2 στοιχεία πώς θα ερμηνεύατε τα σύμβολα της $\mathcal{L}_{ΘΑ}$ έτσι ώστε ο παραπάνω τύπος να αληθεύει στην $\mathcal{A}$??? (3) Εάν η δομή $\mathcal{A}$ είχε μόνο ένα στοιχείο, τότε θα μπορούσε να αληθεύει ο τ στην $\mathcal{A}$???

Λύση: (1) ο τύπος τ δεν έχει ανεξάρτητες μεταβλητές, άρα η αληθοτιμή του δεν εξαρτάται από την αποτίμηση με την οποία δουλεύουμε.
(2) Έστω $|\mathcal{A}| = \{m, n\}$ όπου m, n δύο διαφορετικά αντικείμενα $\varepsilon(0) = m$, $\varepsilon(1) = n$,
$m\, \varepsilon(<)\, n$.

$\varepsilon(+)$	m	n
m	m	n
n	n	m

$\mathcal{A}, v[x_1/m][x_3/n] \models (x_1 < x_3 \to (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3))$
ισχύει αν για $[x_2/n]$.
$\mathcal{A}, v[x_1/n][x_3/n] \models \psi \to$? αληθεύει.
$\{\psi \to \ldots\}$ αληθεύει

$\mathcal{A}, v[x_1/u][x_3/m] \not\models (\varphi \to ?)$ αλήθεια.

$\mathcal{A}, v[x_1/w][x_3/m] \models (\varphi \to ?]$ αλήθεια

δηλ. με ένα στοιχείο.., ώστε ικανοποιείται

12/[redacted]

Β' ώρα

5ο

Έστω $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ όπου $\cdot$ είναι ένα σύμβολο διθέσιας συνάρτησης. (1) Να γράψετε κατάλληλα αξιώματα στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έτσι ώστε η $\cdot$ να έχει τις ιδιότητες που θα είχε σε μια ομάδα. (κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ουδέτερο στοιχείο, αντίστροφος)
(2) Να κατασκευάσετε μία δομή $\mathcal{A}$ στην οποία να ισχύουν όλα τα παραπάνω αξιώματα της ομάδος και μια άλλη δομή $\mathcal{B}$ στην οποία ισχύουν όλα εκτός από το αξίωμα της ύπαρξης αντιστρόφου.

Λύση: **Κλειστότητα:** $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(xy = z)$

Προσεταιριστικότητα: $(\forall x)(\forall y)(\forall k)[(xy)k = x(yk)]$

ουδέτερο: Υπάρχει : $(\exists z)(\forall x)[(xz = x) \wedge (zx = x)]$

αντίστροφος: $(\forall x)(\exists y)[(xy = \text{ουδέτερο} \wedge (yx) = \text{ουδέτερο}]$

Επειδή η λέξη ουδέτερο δεν υπάρχει στη γλώσσα μας θα πρέπει να την αντικαταστήσουμε με μία μεταβλητή που έχει κατάλληλες ιδιότητες.

$$(\exists z)(\forall x)(\exists y)[\underbrace{xz = x \wedge zx = x}_{z=\text{ουδέτερο}} \wedge xy = z \wedge yx = z]$$

Σχόλιο: Όλα τα παραπάνω αξιώματα είναι προφανώς προτάσεις. Μερικές εξ αυτών ξεκινάν με καθολικούς ποσοδείκτες η 1η, 2η, 4η.

Άρα για τυχαία $\mathcal{A}$ δομή έχουμε $\mathcal{A}, v \models (\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \cdot y = z)$
και τυχαία αποτίμηση
ανν $\mathcal{A}, v[x/a][y/b] \models (\exists z)(x \cdot y = z)$ για τυχαία a, b, v ανν $\mathcal{A}, w \models (\exists z)(xy = z)$ για τυχαία αποτίμηση w. Με άλλα λόγια μπορούμε σε ~~κάθε τύπο~~ καθε πρόταση που ξεκινάει από ένα αριστερά με καθολικούς ποσοδείκτες $(\forall x), (\forall y), \ldots$ αυτούς να τους ξεχνάμε απαλείφουμε.

2 στοιχεία πως θα ερμηνεύατε τα σύμβολα της ~~ΔθΑ~~ έτσι ώστε ο παραπάνω τύπος να αληθεύει στην A ; 3) Αν η δομή είχε μόνο ένα στοιχείο, τότε θα μπορούσε να αληθεύει ο στην A;

Απ.

1) Ο τύπος τ δεν έχει ανεξάρτητες μεταβλητές άρα η αληθοτιμή του δεν εξαρτάται από την αποτίμηση με την οποία δουλεύουμε

2) Έστω $|A| = \{\mu, \nu\}$ όπου μ, ν 2 διαφορετικά αντικείμενα.
$\mathcal{E}(0) = \mu$, $\mathcal{E}(1) = \nu$.

$\mathcal{E}(+)$	μ	ν
μ	μ	ν
ν	ν	μ

$\mu \; \mathcal{E}(<) \; \nu$

- $A, u[X_1|\mu][X_3|\nu] \models (X_1 < X_3) \to (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$.
ισχύει για $[X_2|\nu]$
- $A, u[X_1|\nu][X_3|\overset{\nu}{\cancel{\mu}}] \models (\psi \to ;)$ αληθεύει.
- $A, u[X_1|\nu][X_3|\mu] \models (\psi \to ;)$ αληθεύει.
- $A, u[X_1|\mu][X_3|\mu] \models (\psi \to ;)$ —||—.

Μαθ. λογική
12/05/15

Σχόλια: υπάρχουν περιπτώσεις που ένας τύπος αληθεύει ή διαψεύδεται ανεξάρτητα από ποια αποτίμηση χρησιμοποιούμε.

(ΠΧ) Έστω $\mathcal{A}$ η δομή των φυσικών με τις γνωστές ερμηνείες για τα σύμβολα $+, \cdot, \leq, 0, 1$ και $\tau = (\forall x_1)(x_1 < x_3) \to (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$.
Τότε ανεξάρτητα από το ποιά αποτίμηση u, έχουμε ότι $\mathcal{A}, u \models \tau$ διότι απλούστατα η τ είναι της μορφής $\alpha \to \beta$ με το α να είναι ο τύπος $(\forall x_1)(x_1 < x_3)$ που είναι ψευδής.
$\mathcal{A}, u \models (\forall x_1)(x_1 < x_3)$ <u>ανν</u> $\mathcal{A}, u[x_1|a_1] \models (x_1 < x_3)$ για τυχαίο $a_1 \Leftrightarrow a_1\ \varepsilon(<)\ u(x_3)$ για τυχαίο a_1.
Όμως αυτό δεν ισχύει για $a_1 = u(x_3) + 1$. Ψευδές.
Συνεπώς $\mathcal{A}, u \models \tau$ για οποιοδήποτε u.

<u>Άσκηση</u> Δίνεται ο τύπος $\tau = (\forall x_1)(\forall x_3)[x_1 < x_3 \to (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)]$. Εάν έχουμε μια δομή $\mathcal{A}$ με ένα μόνο στοιχείο θα μπορούσε ο τύπος να αληθεύει, θα μπορούσε να διαψεύδεται;

<u>Λύση</u>: $|\mathcal{A}| = \{m\}$ $\quad \varepsilon(+): m\ \varepsilon(+)\ m = m$

$\varepsilon(<): m\ \varepsilon(<)\ m$

Αφού ο τ είναι πρόταση θα πρέπει είτε να επαληθεύεται για όλες τις αποτιμήσεις ή να διαψεύδεται για όλες τις u.
Έστω u τυχαία αποτίμηση $\mathcal{A}, u \models \tau$ <u>ανν</u> $\mathcal{A}, u[x_1|m][x_2|m] \models (x_1 < x_3) \to (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$ ισχύει!

<u>**Σχόλιο**</u>
Κατασκευάζουμε νέα δομή $\mathcal{A}'$ που το σύμπαν περιέχει ένα μόνο στοιχείο $\{n\}$ και $\varepsilon(<) = \emptyset$.
Σε αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι $\mathcal{A}', u[x_1|m][x_2|m] \not\models (x_1 < x_3)$. Άρα συνολικά ο τύπος αληθεύει.
Με ένα μόνο στοιχείο δε γίνεται να διαψεύσουμε την τ.

(ΠΧ)

Να βρεθεί κατάλληλη ερμηνεία που να διαψεύδει την τ.

$\mathcal{E}(<)$: $m\ \mathcal{E}(<)\ n$

$m\ \mathcal{E}(<)\ m$

$\mathcal{E}(+)$	m	n
m	n	n
n	n	m

$\mathcal{A}, u \models \tau$ διότι $\mathcal{A}, u[X_1|m][X_2|n] \models (X_1 < X_3)$ το $\mathcal{A}, u[X_1|m][X_3|n] \models (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$.

(πx) Βρείτε 2 δομές έτσι ώστε η παρακάτω πρόταση να αληθεύει στη μία και όχι στην άλλη.
$(\forall X)(\exists Y)(X \circ Y = X)$. στην $\mathcal{L}_{\Theta A}$.

<u>Λύση</u>:
Η δομή των πραγματικών αριθμών όπου η $\mathcal{E}(\circ)$ είναι η συνήθης. Σε αυτήν έχουμε για κάθε αποτίμηση u, $\mathcal{A}, u \models \tau$ <u>ανν</u> $\mathcal{A}, u[X|a][Y|b] \models (X \circ Y = X)$ <u>ανν</u> $a\ \mathcal{E}(\circ)\ b = a$, όπου a τυχαίο και b κατάλληλο, δηλ. $b = 1$.
$\mathcal{A}'$ η δομή $|\mathcal{A}'| = \{m, n\}$.

ντιπαράδειγμα

$\mathcal{E}(\circ)$	m	n
ⓜ	n	n
n	m	m

$\mathcal{A}', u[X|m] \models (\exists Y)(X \circ Y = X)$.
$\mathcal{A}_2'$ δομή των φυσικών αριθμών με $\mathcal{E}(\circ) =$ η συνήθης πρόσθεση. Είναι προφανές ότι δεν αληθεύει στην $\mathcal{A}_2'$.

(πx) Έστω $\mathcal{L} = \{\circ\}$, όπου $\circ$ είναι ένα σύμβολο διθέσιας συνάρτησης. 1) Να γράψετε κατάλληλα αξιώματα στην $\mathcal{L}$ έτσι ώστε η $\circ$ να έχει τις ιδιότητες που θα είχε σε μια ομάδα. (Κλειστότητα, προσεταιριστικότητα, ύπαρξη ουδετέρου, ύπαρξη αντιστρόφου). Να κατασκευάσετε μια δομή $\mathcal{A}$ στην οποία να ισχύουν όλα τα παραπάνω αξιώματα της ομάδος και μια άλλη δομή $\mathcal{B}$ στην οποία ισχύουν όλα εκτός το αξίωμα του αντιστρόφου.

Κλειστότητα : $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(X \cdot Y = Z)$

Προσεταιριστικότητα : $(\forall X)(\forall Y)(\forall \underset{K}{Z})[X(Y \cdot K) = (X \cdot Y)K]$

Ουδέτερο : $(\exists Z)(\forall X)[(X \cdot Z = X) \wedge (Z \cdot X = X)]$

Αντίστροφο : $(\forall X)(\exists Y)[(X Y = \text{ουδ.}) \wedge (Y \cdot X = \text{ουδ.})]$

Επειδή η λέξη ουδέτερο δεν υπάρχει στη γλώσσα μας θα πρέπει να την αντικαταστήσουμε με μεταβλητή που έχει κατάλληλες ιδιότητες :

$$(\exists Z)(\forall X)(\exists Y)[\underbrace{(X \cdot Z = X) \wedge (Z \cdot X = X)}_{Z \text{ ουδέτερο}} \wedge (X \cdot Y = Z) \wedge (Y \cdot X = Z)]$$

<u>Σχόλιο</u> : όλα τα παραπάνω αξιώματα είναι προφανώς προτάσεις. Μερικές εξ αυτών ξεκινάνε με καθολικούς ποσοδείκτες. Όπως για παράδειγμα το πρώτο αξίωμα. Άρα για τυχαία δομή A και τυχαία αποτίμηση u, έχουμε :

$A, u \models (\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(X \cdot Y = Z)$ <u>αν</u> $A, u[X/a][Y/b] \models (\exists Z)(X \cdot Y = Z)$ για τυχαία a, b, u <u>αν</u> $A, \omega \models (\exists Z)(X \cdot Y = Z)$ για τυχαία αποτίμηση ω.

Με άλλα λόγια μπορούμε σε κάθε τύπο ή πρόταση που ξεκινάει με καθολικούς ποσοδείκτες $(\forall X)(\forall Y)$, να τους απαλείψουμε.

Θεωρούμε B την δομή των φυσικών αριθμών όπου η τελεστέα ερμηνεύεται $\varepsilon(\cdot) =$ ο γνωστός μας πολ/σμός. Τότε προφανώς όλα τα αξιώματα ισχύουν εκτός την ύπαρξη του αντίστροφου.

Θεωρούμε ως A την δομή των ακεραίων όπου η $\varepsilon(\cdot)$ ερμηνεύεται $\varepsilon(\cdot) =$ η γνωστή μας πρόσθεση στους ακεραίους, οπότε κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.

(πχ) $A, u[Z/0][X/a][Y/-a] \models [(X \cdot Z = X) \wedge (Z X = X) \wedge (X Y = Z) \wedge (Y X = Z)]$ για τυχαίο $a \in \mathbb{Z}$, <u>αν</u> $a \,\varepsilon(\cdot)\, 0 = a$ και $0 \,\varepsilon(\cdot)\, a = a$ και $a \,\varepsilon(\cdot) -a = 0$ και $-a \,\varepsilon(\cdot)\, a = 0$ για τυχαίο a προφανώς ισχύει.

στην κλειστ., προσ., ουδ., αντίστροφο βγάζουμε τα ∀..

• Θεωρούμε 𝔅 τη δομή των φυσικών αριθμών όπου ο πολλαπλασιασμός ερμηνεύεται με $\varepsilon(\circ) =$ ο γνωστός μας πολλ/σμός. Τότε προφανώς όλα τα αξιώματα ισχύουν εκτός της ύπαρξης του αντιστρόφου. Θεωρούμε ως 𝔄 τη δομή των ακεραίων όπου η $\circ$ ερμηνεύεται με $\varepsilon(\circ) =$ η πρόσθεση στους $\mathbb{Z}$, οπότε κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο ως προς την πρόσθεση.

π.χ. $\mathcal{A}, v[z_1|0][x|a][y|-a] \models [x z_1 = x \land (z_1 x = x) \land x y = z_1 \land y x = z_1]$ για τυχαίο $a \in \mathbb{Z}$ αφού $a\,\varepsilon(\cdot)\,0 = a$ και $0\,\varepsilon(\cdot)\,a = a$ και $a\,\varepsilon(\cdot)(-a) = 0$ και $-a\,\varepsilon(\cdot)\,a = 0$ για τυχαίο α ισχύει.

Σχόλιο:

Το $\mathbb{Z}_6^{*} = \{1,2,3,4,5\}$ όπου $\varepsilon(\circ) =$ πολλ/σμός mod 6 δεν ικανοποιεί το αξίωμα του αντιστρόφου, διότι το 4 δεν έχει αντίστροφο!

Τα 2 τελευταία αξιώματα μπορούν να συμπτυχθούν στο τελευταίο αξίωμα του αντιστρόφου, διότι σε αυτό εμφανίζεται η έννοια του ουδετέρου. (το z_1 παίζει το ρόλο του ουδετέρου).

Σχόλιο: Το ουδέτερο z_1 από τα παραπάνω αξιώματα είναι μοναδικό.

Άσκηση: Δείξτε ότι, για τυχαία $\mathcal{A}, v$ ισχύει $\mathcal{A}, v \models (\forall x)[(z_1 \cdot x) = (x \cdot z_1) = (x)] \land (\forall x)[(z_2 \cdot x) = (x \cdot z_2) = (x)] \to z_1 = z_2$.

18/5/15

$(\forall x)(\phi \land \psi) \leftrightarrow (\forall x)\phi \land (\forall x)\psi$ ταυτολογία

$(\forall x)(\phi \lor \psi) \leftrightarrow (\forall x)\phi \lor (\forall x)\psi$ απλά ικανοποιήσιμος

π.χ. Έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία που το $|\mathcal{A}|$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $|\mathcal{A}| = \{m\}$, τότε ο παραπάνω τύπος αληθεύει στην $\mathcal{A}$ και για οποιαδήποτε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}, v \models (\forall x)\phi \lor (\forall x)\psi \Longleftrightarrow$ ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω ισχύει:

$\mathcal{A}, v \models (\forall x)\phi$, $\mathcal{A}, v \models (\forall x)\psi$ αν

① ⑨

$\Rightarrow \mathcal{A},v[x/m]\models\phi$ και $\mathcal{A},v[x/m]\models y$.

$\Leftrightarrow \mathcal{A},v[x/m]\models\phi\vee y \Leftrightarrow \mathcal{A},v\models(\forall x)(\phi\vee y)$.

π.χ. φ: ο x είναι οπαδός του ολυμπιακού.
y: ο x δεν είναι οπαδός του ολυμπιακού $=\neg\phi$.
και $\mathcal{A}$ έχει σύμπαν τους κατοίκους του Καρλοβάσου.
Προφανώς για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει:
$\mathcal{A},v\models(\forall x)(\phi\vee y)$, $\mathcal{A},v\not\models(\forall x)\phi$ (δεν ισχύει!),
$\mathcal{A},v\not\models(\forall x)y$. Άρα $\mathcal{A},v\not\models(\forall x)\phi\vee(\forall x)y$

Άσκηση: Δίνεται ο τύπος $(\exists x)(\phi\wedge y)\leftrightarrow(\exists x)\phi\wedge(\exists x)y$.
ο τύπος είναι αντιλογία, ταυτολογία ή απλά ικανοποιήσιμος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση: 1ος τρόπος: ο παραπάνω τύπος είναι απλά ικανοποιήσιμος, διότι αν πάρουμε για φ: ο x δεν είναι οπαδός του ολυμπιακού και y: ¬φ, οπότε
$(\phi\wedge y)=\neg(\overset{\phi_1}{\underline{\text{ο } x \text{ είναι οπαδός του Ολυμπιακού}}}\vee\overset{y_1}{\underline{\text{ο } x \text{ δεν είναι οπαδός του ολυμπιακού}}})=\neg(\phi_1\vee y_1)$ και άρα το:

$$(\exists x)(\phi\wedge y)\leftrightarrow(\exists x)(\neg\phi_1\vee y_1))\leftrightarrow\neg[\forall x](\phi_1\vee y_1)\not\leftrightarrow$$
$$\neg[(\forall x)\phi_1\vee(\forall x)y_1]\leftrightarrow[\neg(\forall x)\phi_1\wedge\neg(\forall x)y_1]\leftrightarrow$$
$$[(\exists x)\phi\wedge(\exists x)y]$$

2ος τρόπος: Είναι εύκολο να δείξουμε ότι εάν το σύμπαν της ερμηνείας είναι μονοσύνολο, τότε ισχύει η παραπάνω σύζευξη. Όμως, εάν δεν είναι μονοσύνολο, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

π.χ. $|\mathcal{A}|=\{m,n\}$, $\phi: x=o$, $y: x\neq o$. Έστω v τυχαία αποτίμηση. Τότε $\mathcal{A},v\models(\exists x)\phi\wedge(\exists x)y$.
με $\varepsilon(o)=m$.

$\mathcal{A},v[x/m]\models\phi$ ✓, $\mathcal{A},v[x/n]\models y$ ✓

$\mathcal{A},v\models(\exists x)\phi\wedge y\Rightarrow$ δεν ισχύει αυτό.

Άρα η παραπάνω σύζευξη δεν είναι νόμος!
Είναι απλά ικανοποιήσιμη.

Σχόλιο: Αφού το $(\forall x)\phi\wedge y\leftrightarrow(\forall x)\phi\wedge(\forall x)y$ είναι ένας νόμος (Ταυτολογία), άρα και ο τύπος;

$\neg(\forall x)(\phi \wedge y) \leftrightarrow \neg((\forall x)\phi \wedge (\forall x)y)$ είναι ένας νόμος και άρα και ο $(\exists x)(\neg\phi \vee \neg y) \leftrightarrow (\exists x \neg\phi \vee \exists x \neg y)$ και ο $\exists x(\phi' \vee y') \leftrightarrow [(\exists x)\phi'] \vee [(\exists x)y']$ είναι ένας νόμος για οποιαδήποτε ϕ' και y'.

<u>Σχόλιο:</u> Έστω ϕ, y δύο τύποι για τους οποίους η ισοδυναμία $\phi \leftrightarrow y$ είναι ταυτολογία. Τότε εάν αληθεύει ο ϕ, αληθεύει και ο y και αντίστροφα. Δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \models y$ $\forall$ ερμηνεία $\mathcal{A}$ και αποτίμηση $v \in \mathcal{A}$. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα γράφουμε $\phi \equiv y$ ή πιο απλά $\phi = y$ και μπορούμε να αντικαθιστούμε τον ϕ με τον y σε οποιονδήποτε τύπο τ, στον οποίο εμφανίζεται ο ϕ, χωρίς να αλλάξει η αληθοτιμή του τ.

Νόμοι π.χ. (1) $\neg(\forall x)\phi \equiv (\exists x)\neg\phi$ (2) $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$
(3) $(\forall x)\phi \wedge y \equiv (\forall x)\phi \wedge (\forall x)y$.

19/5/15 Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών:

- Εάν ο ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά ο x δεν εμφανίζεται ελεύθερος στον τύπο ϕ, τότε $(\forall x)(\phi \to y) \equiv \phi \to (\forall x)y$. Όμοια $(\exists x)(\phi \to y) \equiv \phi \to (\exists x)y$. Όμοια αντί $\to$ να βάλουμε $\wedge$ ή $\vee$.

<u>Σχόλιο:</u> (στις σημειώσεις βρίσκονται στο site)
$[(\forall x)y] \to \phi \equiv (\forall x)(y \to \phi)$ με ϕ να πληροί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε στα αριστερά.

<u>ΛΑΘΟΣ:</u> σωστό: $[(\forall x)y] \to \phi \equiv \neg[(\forall x)y] \vee \phi \equiv$
$\equiv [(\exists x)\neg y] \vee \phi \overset{\text{ΝΜΠ}}{\equiv} (\exists x)(\neg y \vee \phi) \equiv (\exists x)(y \to \phi)$

<u>Σχόλιο:</u> Προσοχή όταν έχουμε $\to$ πού βρίσκεται ο νόμος ϕ μέσα στην $(\forall x)(\phi \to y) \equiv \phi \to (\forall x)y$.

<u>Θεώρημα:</u> (χωρίς απόδειξη) Θεώρημα αλφαβητικών παραλλαγών
Για κάθε τύπο ϕ υπάρχει τύπος ψ ισοδύναμος με τον ϕ, δηλαδή $\phi \equiv \psi$ έτσι ώστε στον ψ δεν υπάρχει μεταβλητή x που άλλοτε εμφανίζεται ελεύθερη και άλλοτε δεσμευμένη. (Η με άλλα λόγια

Νόμοι αντικατάστασης μεταβλητών

Ορισμός 1

Έστω ϕ ένας οποιοσδήποτε τύπος της γλώσσας L, τ ένας όρος της L και X μια μεταβλητή τότε με $\phi[X|\tau]$ παριστάνουμε τον τύπο που προκύπτει από τον ϕ, όταν αντικαταστήσαμε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της X (μέσα στον ϕ) με τον όρο τ.

Ⓟχ $\phi: (\exists X)(X+2=Y \rightarrow (\forall Y)(X<Y) \quad \tau = Y^2+X$

$\phi[X|\tau]: (\exists X)(X+2=Y) \rightarrow (\forall Y)(Y^2+X<Y)$

$\phi[Y|\tau]: (X+2 = Y^2+X) \rightarrow (\forall Y)(X<Y)$.

Ορισμός 2

Έστω ϕ, τ όπως παραπάνω. Τότε θα λέμε ότι ο τ μπορεί να αντικαταστήσει την X στον ϕ <u>ανν</u> δεν υπάρχει υποτύπος ϕ_1 του ϕ στον οποίο εμφανίζεται ο X ελεύθερα και ο ϕ_1 είναι της μορφής $(\forall Y)\phi_2$ είτε $(\exists Y)\phi_2$ και η Y βρίσκεται μέσα στον τ.

Πχ $\phi = (\exists \overset{(*)}{Y})(Y \neq X) \quad , \tau = Y$

Ερώτηση: μπορεί ο τ να αντικαταστήσει την X μέσα στον τύπο ϕ;

ποι του (*) → $Y \neq X, \ \underbrace{(\exists Y)(Y \neq X)}_{\phi_1}$

Απάντηση: δεν μπορεί να αντικαταστήσει στην περίπτωση αυτή ο τ τον X.

αληθεύει και ο ψ και αντίστροφα.
$\mathcal{A}, υ \models φ \iff \mathcal{A}, υ \models ψ$ για κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$ και $υ$ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα γράφουμε $φ \equiv ψ$ ή πιο απλά $φ = ψ$ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον φ με τον ψ σε οποιοδήποτε τύπο τ στον οποίο εμφανίζεται ο φ χωρίς να αλλάζει η αληθοτιμή του τ.

(πχ) $\neg(\forall X)φ \equiv (\exists X)\neg φ$.
$\neg(φ_1 \wedge φ_2) \equiv \neg φ_1 \vee \neg φ_2$
$(\forall X)(φ \wedge ψ) \equiv (\forall X)φ \wedge (\forall X)ψ$

Νόμοι απορρόφησης

Έστω φ ένας νόμος ή διαφορετικά στον φ δεν εμφανίζεται ελεύθερη η μεταβλητή X. Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το φ με το $(\exists X)φ$ ή $(\forall X)φ$ όποτε θέλουμε. Αυτό διότι αποδεικνύεται στα μαθηματικά ότι $φ \equiv (\exists X)φ \equiv (\forall X)φ$ δηλ. $φ \leftrightarrow (\exists X)φ \iff (\forall X)φ$ είναι ένας νόμος.

(πχ) $(\forall X)(\exists Y)\underbrace{(Z>2)}_{φ} \equiv (Z>2)$ Δεν εμφανίζονται στον φ ελεύθερα τα X και Y. Άρα το $(\forall X)(\exists Y)(Z>2) \equiv (\exists Y)(Z>2) \equiv (Z>2)$.

(πχ) $(\forall X)(\forall X)φ \equiv (\forall X)φ$
$(\exists X)(\exists X)φ \equiv (\exists X)φ$.
Διότι αν ονομάσουμε $φ' = (\forall X)φ$ τότε στον φ' εμφανίζεται δεσμευμένα το X και άρα μπορούμε να ξεχάσουμε οποιοδήποτε $(\exists X)$ ή $(\forall X)$ μπροστά από τον φ'.
$(\exists X)(\forall X)φ \equiv (\forall X)φ$
$(\forall X)(\exists X)φ \equiv (\exists X)φ$.

(πχ) $\phi = (\exists Y)(Y \neq X)$, $\tau = Z$. Μπορεί να αντικαταστήσει ο τ τον X.

Νόμος αντικατάστασης

Το $(\forall X)\phi \to \phi[X|\tau]$ είναι νόμος για οποιονδήποτε όρο τ που μπορεί να αντικαταστήσει τον X μέσα στον ϕ.

Σχόλιο: δεν ισχύει γενικά ότι είναι νόμος ο $(\forall X)\phi \to \phi[X|\tau]$.

(πχ) $\phi = (\exists X)(Y \neq X)$ και $\tau = Y$, τότε ο τύπος $(\forall X)(\exists Y)(Y \neq X) \to \phi[X|\tau]$ δηλ. ο τύπος $(\forall X)(\exists Y)(Y \neq X) \to (\exists Y)(Y \neq$ δεν μπορεί να είναι νόμος.

Αντιπαράδειγμα

$\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}| = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Έστω υ μια οποιαδήποτε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε

$\mathcal{A}, \upsilon \models (\forall X)(\exists Y)(Y \neq X)$.

Προφανώς $\mathcal{A}, \upsilon \not\models (\exists Y)(Y \neq Y)$.

Νόμοι εναλλαγής

$(\forall X)(\forall Y)\phi \leftrightarrow (\forall Y)(\forall X)\phi$.

$(\exists X)(\exists Y)\phi \leftrightarrow (\exists Y)(\exists X)\phi$

Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών

Έστω ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά δεν εμφανίζεται ελεύθερη η μεταβλητή X σε αυτόν και ψ είναι οποιοσδήποτε τύπος. Τότε $(\forall X)(\phi \wedge \psi) \equiv \phi \wedge (\forall X)\psi$ και όμοια αν στη θέση της $\wedge$ βάλουμε ένα οποιοδήποτε σύμβολο από τα $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$

(πχ) Δείξτε ότι εάν ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά δεν εμφανίζεται ο X ελεύθερα στον ϕ τότε το $(\exists X)\phi \equiv (\forall X)\phi$.

Αποδ.

Από νόμο απορρόφησης έχουμε $(\exists x)\phi \equiv \phi$, όμοια $(\forall x)\phi \equiv \phi$ $\Rightarrow$ το ζητούμενο.

ⓅΧ $(\exists x)(\phi \to \psi) \equiv \phi \to (\exists x)\psi$ ✓

$(\forall x)(\psi \to \phi) \equiv (\forall x)(\neg\psi \vee \phi) \equiv (\forall x)(\phi \vee \neg\psi) \equiv \phi \vee (\forall x)(\neg\psi) \equiv$

$\equiv \phi \vee \neg(\exists x)\psi \equiv [(\exists x)\psi] \to \phi$.

$\neg(\forall x)(\phi\wedge y)\leftrightarrow\neg((\forall x)\phi\wedge(\forall x)y)$ είναι ένας νόμος και άρα και ο $(\exists x)(\neg\phi\vee\neg y)\leftrightarrow(\exists x\neg\phi\vee\exists x\neg y)$ και ο $\exists x(\phi'\vee y')\leftrightarrow[(\exists x)\phi']\vee[(\exists x)y']$ είναι ένας νόμος για οποιαδήποτε ϕ' και y'.

__Σχόλιο:__ Έστω ϕ, y δύο τύποι για τους οποίους η ισοδυναμία $\phi\leftrightarrow y$ είναι ταυτολογία. Τότε εάν αληθεύει ο ϕ, αληθεύει και ο y και αντίστροφα. Δηλαδή $\mathcal{A},v\models\phi \Leftrightarrow \mathcal{A},v\models y$ $\forall$ ερμηνεία $\mathcal{A}$ και αποτίμηση $v\in\mathcal{A}$. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα γράφουμε $\phi\equiv y$ ή πιο απλά $\phi=y$ και μπορούμε να αντικαθιστούμε τον ϕ με τον y σε οποιονδήποτε τύπο τ, στον οποίο εμφανίζεται ο ϕ, χωρίς να αλλάξει η αληθοτιμή του τ.

Νόμοι __π.χ.__ (1) $\neg(\forall x)\phi\equiv(\exists x)\neg\phi$ (2) $\neg(\phi_1\wedge\phi_2)\equiv\neg\phi_1\vee\neg\phi_2$ (3) $(\forall x)\phi\wedge y\equiv(\forall x)\phi\wedge(\forall x)y$.

__19/5/15__ __Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών:__

- Εάν ο ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά ο x δεν εμφανίζεται ελεύθερος στον τύπο ϕ, τότε $(\forall x)(\phi\rightarrow y)\equiv\phi\rightarrow(\forall x)y$. Όμοια $(\exists x)(\phi\rightarrow y)\equiv\phi\rightarrow(\exists x)y$. Όμοια αντί $\rightarrow$ να βάλουμε $\wedge$ ή $\vee$.

__Σχόλιο:__ (οι σημειώσεις βρίσκονται στο site)
$[(\forall x)y]\rightarrow\phi\equiv(\forall x)(y\rightarrow\phi)$ με ϕ να πληροί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε στα αριστερά.

__ΛΑΘΟΣ:__ σωστό: $[(\forall x)y]\rightarrow\phi\equiv\neg[(\forall x)y]\vee\phi\equiv$
$\equiv[(\exists x)\neg y]\vee\phi\overset{\text{ΝΜΠ}}{\equiv}(\exists x)(\neg y\vee\phi)\equiv(\exists x)(y\rightarrow\phi.)$

__Σχόλιο:__ Προσοχή όταν έχουμε $\rightarrow$ πού βρίσκεται ο νόμος ϕ μέσα στην $(\forall x)(\phi\rightarrow y)\equiv\phi\rightarrow(\forall x)y$.

__Θεώρημα:__ (χωρίς απόδειξη) Θεώρημα αλφαβητικών παραλλαγών
Για κάθε τύπο ϕ υπάρχει τύπος ψ ισοδύναμος με τον ϕ, δηλαδή $\phi\equiv\psi$ έτσι ώστε στον ψ δεν υπάρχει μεταβλητή x που άλλοτε εμφανίζεται ελεύθερη και άλλοτε δεσμευμένη. (Η με άλλα λόγια

$(\forall E)(\exists \Delta)(\forall x)[(0<E)\rightarrow[(0<\Delta)\wedge\{|x-x_0|<\Delta\rightarrow |f(x)-Y_0|<E\}]]$.

Σχόλιο: Τα απόλυτα π.χ. $|f(x)-Y_0|<E$ είναι συντομογραφία ενός κανονικού τύπου της $\mathcal{L}$:
$(f(x)<E+Y_0)\wedge(Y_0<f(x)+E)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq Y_0$ ανν $\neg(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=Y_0)$

$(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)\rightarrow[0<E\wedge(0\not<\Delta\vee\neg\{\ \ \})]$

ανν

$(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)[0<E\wedge(0<\Delta\rightarrow\neg\{\ \ \})]\equiv$

$\equiv(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)[0<E\wedge(0<\Delta\rightarrow\{|x-x_0|<\Delta\wedge|f(x)-Y_0|<E\})]$

δηλ. με άλλα λόγια $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)\{|x-x_0|<\delta\wedge |f(x)-y_0|\not<\varepsilon\}$ δηλ. $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)$ $x-\delta<x<x_0+\delta$
$|f(x)-y_0|\not<\varepsilon$.

$\neg\phi\vee\psi\equiv\phi\rightarrow\psi$.

π.χ. $f(x)=[x]+1$, $x_0=2$ Α.α.β

$$\lim_{x\to 2} f(x)\neq 3.$$

- **Παράδοξο του ψεύτη:** ο Πέτρος ισχυρίζεται ότι είναι ψεύτης. Εάν πράγματι είναι ψεύτης, τότε ό,τι λέει είναι ψέματα, άρα δεν μπορεί να είναι ψεύτης. Άρα αφού δεν είναι ψεύτης, ό,τι ισχυρίζεται είναι προφανώς αληθινό. Άρα θα πρέπει να δεχτούμε και τον ισχυρισμό του, δηλ. ότι μπορεί να είναι ψεύτης
- **Εξήγηση του παραδόξου:** φτιάχνουμε μία γλώσσα $\mathcal{L}$, στην οποία κάθε πρόταση της ελληνικής αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά της $\mathcal{L}$.

π.χ. "Εγώ είμαι ψεύτης" αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά έστω c. Έχουμε ένα μονομελές κατηγόρημα στη $\mathcal{L}$ ψεύδεται_ο_Πέτρος(·)

κάθε δεσμευμένη εμφάνιση μιας μεταβλητής φ που είναι ελεύθερη στον φ μπορεί να μετονομαστεί σε μια νέα μεταβλητή.

π.χ. υπάρχει $\phi = [(\exists X')\, q(X')] \to q(X')$ όπου q είναι ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος. Παρατηρούμε ότι στον φ η X ~~εμφανίζεται~~ είναι ελεύθερη, η X, όμως, εμφανίζεται στον υποτύπο $(\exists X)\, q(X')$ δεσμευμένη. Από θεώρημα των Αλφαβητικών παραλλαγών μπορούμε να μετονομάσουμε τη δεσμευμένη εμφάνιση της X σε κάτι εντελώς νέο, οπότε θα πάρουμε $\psi \equiv (\exists X_1)\, q(X_1) \to q(X') \equiv \phi$.

Σχόλιο: Το παραπάνω θεώρημα στηρίζεται σε κάποιες προτάσεις της Λογικής:

(1) Αν η ~~ψ~~ δεν εμφανίζεται καθόλου στον $(\forall X)\phi$, τότε ισχύει ότι: $(\forall X')\phi \equiv (\forall Y)\phi[X/Y]$ — , όπου x ελεύθερο αντικ. με Y

και όμοια: $(\exists X')\phi \equiv (\exists Y)\,\phi[X/Y]$

(2) Στην περίπτωση που ο φ δεν έχει ποσοδείκτες π.χ. ο φ είναι ένας ατομικός τύπος, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες ή τουλάχιστον μερικές από τις εμφανίσεις της μεταβλητής X με μια άλλη οποιαδήποτε μεταβλητή Y και να πάρουμε ένα ισοδύναμο τύπο ψ δηλ. $\phi \equiv \psi$.

Άσκηση ①: Για κάθε φ το $(\forall X')\phi \to (\exists X')\phi$ δείξτε ότι είναι ταυτολογία.

Λύση: Έχουμε $[(\forall X')\phi] \to [(\exists X')\phi] \equiv \neg(\forall X)\phi \vee (\exists X)\phi \equiv$

$$\equiv \underbrace{[(\exists X)\neg\phi] \vee [(\exists X')\phi]}_{\text{Νόμος}} \equiv (\exists X)(\neg\phi \vee \phi) \equiv (\exists X')(\text{ταυτολογία})$$

Από νόμος απορρόφησης ≡ ταυτολογία.

Άσκηση ②: Έστω $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ είναι 2 μονομελή σύμβολα κατηγορήματος σε κάποια γλώσσα $\mathcal{L}$. Νδο η παρακάτω πρόταση είναι μια ταυτολογία.

$$\phi = [(\forall X')\,(p(x) \to q(x))] \to \big[[(\forall X)\, p(x)] \to [(\forall X)\, q(x)]\big].$$

Απόδειξη: (1) Έστω $\mathcal{A}$ τυχαία ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}, v \models$ — ορισμός αλήθειας Tarski.

(2) $\phi \equiv \neg(\quad) \vee [\quad] \equiv$

X = ασφαλεία

$$\equiv [\overset{①}{(\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x))}] \vee [[\overset{②}{(\exists x)\neg p(x)}] \vee [\overset{③}{(\forall x)\, q(x)}]]$$

Από ΝΜΠ

$$\equiv (\forall x)\{(\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x)) \vee [(\exists x)\, \neg p(x)] \vee q(x)\} \equiv (\forall x)(\exists x)\underbrace{((p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \neg p(x))}_{\text{ο } x \text{ δεσμευμένος}} \vee \underbrace{q(x)}_{\text{ο } x \text{ ελεύθερα εμφανίζεται}}\}$$

Νόμοι των Αλφαβητ. παραλλ.: μπορούμε να μετονομάσουμε το δεσμευμένο σε μια <u>νέα</u> εντελώς μεταβλητή π.χ. x_1.

$$\equiv (\forall x)\{(\exists x_1)([p(x_1) \wedge \neg q(x_1)] \vee \neg p(x_1)) \vee q(x)$$

από ΝΜΠ $$\equiv (\forall x)(\exists x_1)\{[p(x_1) \wedge \neg q(x_1)] \vee \neg p(x_1) \vee q(x)\}$$

από Επιμεριστ. $$\equiv (\forall x)(\exists x_1)\{[p(x_1) \vee \neg p(x_1)] \wedge [\neg q(x_1) \vee \neg p(x_1)] \vee q(x)\}$$

$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)\{\underline{\neg q(x_1)} \vee \neg p(x_1) \vee \underline{q(x)}\}$$

≡ Λάθος!!!

Νόμος

σπίτι

<u>Άσκηση</u>: Νδο $(\forall x)(\exists x_1)\{\neg q(x_1) \vee q(x)\}$ είναι νόμος χρησιμ. τον ορισμό του Tarski

t.v.

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται η γλώσσα

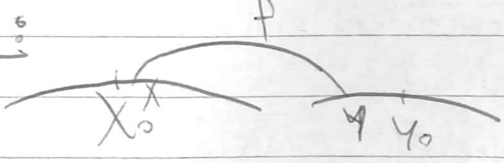
$\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, 0, 1, f\}$ όπου το f είναι ένα μονοθέσιο σύμβολο κατηγορήματος.

(1) Να ορίσετε με κατάλληλο τύπο της $\mathcal{L}$ το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

(2) Εάν η παράσταση $|x - x_0| < \Delta$ είναι η συντομογραφία του τύπου $(x_0 < x + \Delta) \wedge (\cancel{x_0} < x_0 + \Delta)$ πώς θα περιγράφατε την έκφραση $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq y_0$ στην $\mathcal{L}$;

<u>Λύση:</u>

(1)



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$
$$\forall x \, (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

$(\forall E)(\exists \Delta)(\forall x)[(0<E)\to[(0<\Delta)\wedge\{|x-x_0|<\Delta\to |f(x)-Y_0|<E\}]]$.

<u>Σχόλιο</u>: Τα απόλυτα π.χ. $|f(x)-Y_0|<E$ είναι συντομογραφία ενός <u>κανονικού τύπου</u> της $\mathcal{L}$: $(f(x)<E+Y_0)\wedge(Y_0<f(x)+E)$.

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq Y_0$ <u>ανν</u> $\neg(\lim_{x\to x_0} f(x)=Y_0)$

$(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)\to[0<E\wedge(0\not<\Delta\vee\neg\{\quad\})]$

ανν.

$(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)[0<E\wedge(0<\Delta\to\neg\{\quad\})]\equiv$

$\equiv(\exists E)(\forall\Delta)(\exists x)[0<E\wedge(0<\Delta\to\{|x-x_0|<\Delta\wedge|f(x)-Y_0|\not<E\})]$

δηλ. με άλλα λόγια $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)\{|x-x_0|<\delta\wedge |f(x)-y_0|\not<\varepsilon\}$ δηλ. $(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)$ $x-\delta<x<x_0+\delta$ $|f(x)-y_0|\not<\varepsilon$.

$\neg\phi\vee\psi\equiv\phi\to\psi$.

<u>π.χ.</u> $f(x)=[x]+1$, $x_0=2$ Λ.α.β

$$\lim_{x\to2} f(x)\neq3.$$

- <u>Παράδοξο του ψεύτη</u>: ο Πέτρος ισχυρίζεται ότι <u>είναι ψεύτης</u>. Εάν πράγματι είναι ψεύτης, τότε ό,τι λέει είναι ψέματα, άρα δεν μπορεί να είναι ψεύτης. Άρα αφού δεν είναι ψεύτης, ό,τι ισχυρίζεται είναι προφανώς αληθινό. Άρα θα πρέπει να δεχτούμε και τον ισχυρισμό του, δηλ. ότι μπορεί να είναι ψεύτης
- <u>Εξήγηση του παραδόξου</u>: φτιάχνουμε μία γλώσσα $\mathcal{L}$, στην οποία κάθε πρόταση της ελληνικής αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά της $\mathcal{L}$.

π.χ. "Εγώ είμαι ψεύτης". αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά c ενώ έχουμε ένα μονομερές κατηγόρημα στην $\mathcal{L}$ ψεύδεται_ο_Πέτρος(·)

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία στην παραπάνω γλώσσα $\mathcal{L}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.

περίπτωση (1): $\mathcal{A}, v \models (\forall X)$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X).

Άρα $\mathcal{A}, v[X|c_0] \models$ ψεύδεται_ο_πέτρος(c_0). Αυτό, όμως, δεν συνεπάγεται ότι ο πέτρος λέει πάντα την αλήθεια, δηλ. $\mathcal{A}, v \models (\forall X) \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X). Το τελευταίο δεν μπορεί να ισχύει, διότι έχουμε ήδη υποθέσει ότι.

περίπτωση (2): Να υποθέσουμε ότι υπάρχει

$\mathcal{A}, v \models \underset{\substack{\downarrow \\ \text{τον}}}{(\exists X)} \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X) $\not\Rightarrow$ ΛΑΘΟΣ!

$\mathcal{A}, v \models \underset{\substack{\downarrow \\ \text{δεν ισχύει όταν } X/\mu}}{(\forall X)} \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X).

Σχόλιο: $(\forall X)\phi \to (\exists X)\phi$ το αντίστροφο $(\exists X)\phi \to (\forall X)\phi$ είναι απλά ικανοποιήσιμος

Αντιπαράδειγμα: $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = \{\mu, \nu\}$ και $\mathcal{E}($ψεύδεται_ο_πέτρος$) = \{\mu\}$.

Κανόνας γενίκευσης: Το $\phi \to (\forall X)\phi$ δεν είναι νόμος.

Άσκηση: Να κατασκευάσετε κατάλληλη ερμηνεία και αποτίμηση έτσι ώστε να μην ισχύει ότι:

$\mathcal{A}, v \not\models q(X) \to (\forall X)\, q(X)$, όπου $q(\cdot)$ είναι ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

Νόμος γενίκευσης: $\phi \to (\forall X)\phi$ είναι νόμος (ταυτολογία), εάν υποθέσουμε ότι η X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή διαφορετικά ο ϕ είναι νόμος.

~~ούτε το ανάποδο~~

Σχόλιο: Το $(\forall X)\phi \to \phi$ είναι νόμος και μάλιστα γενικεύεται στο $(\forall X)\phi \to \phi[X/t]$ είναι νόμοι όπου t είναι ένας όρος που μπορεί να αντικαταστήσει τον X στον ϕ.

Έστω αυθαίρετα $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία στην παραπάνω γλώσσα $\mathcal{L}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.

περίπτωση (1): $\mathcal{A}, v \models (\forall X)$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X).
Άρα $\mathcal{A}, v[X|Co] \models$ ψεύδεται_ο_πέτρος(Co). Αυτό, όμως, δεν συνεπάγεται ότι ο πέτρος λέει πάντα την αλήθεια, δηλ. $\mathcal{A}, v \models (\forall X) \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X). Το τελευταίο δεν μπορεί να ισχύει, διότι έχουμε ήδη υποθέσει ότι.

περίπτωση (2): Να υποθέσουμε ότι υπάρχει;
$\mathcal{A}, v \models (\exists X) \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X) $\not\Rightarrow$ ΛΑΘΟΣ!
τον
$\mathcal{A}, v \models (\forall X) \neg$ ψεύδεται_ο_πέτρος(X).
δεν ισχύει όταν X/μ.

Σχόλιο: $(\forall X)\phi \to (\exists X)\phi$ το αντίστροφο $(\exists X)\phi \to (\forall X)\phi$ είναι αλλά ικανοποιήσιμος

Αντιπαράδειγμα: $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = \{\mu, \nu\}$. και ε(ψεύδεται_ο_πέτρος) $= \{\mu\}$.

Κανόνας γενίκευσης: Το $\phi \to (\forall X)\phi$ δεν είναι νόμος.
Άσκηση: Να κατασκευάσετε κατάλληλη ερμηνεία και αποτίμηση έτσι ώστε να μην ισχύει ότι:
$\mathcal{A}, v \not\models q(X) \to (\forall X)\, q(X)$, όπου $q(\cdot)$ είναι ένα μονοθέσιο σύμβολο κατηγορήματος.

~~Άσκηση~~ Νόμος γενίκευσης: $\phi \to (\forall X)\phi$ είναι νόμος (ταυτολογία), εάν υποθέσουμε ότι η X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή διαφορετικά ο ϕ είναι νόμος.
~~όχι το ανάποδο~~

Σχόλιο: Το $(\forall X)\phi \to \phi$ είναι νόμος και μάλιστα γενικεύεται στο $(\forall X)\phi \to \phi[X/t]$ είναι νόμος όπου t είναι ένας όρος που μπορεί να αντικαταστήσει τον X στον ϕ.

25/5/15

Σχόλιο: Ο Νόμος γενίκευσης: $\phi \to (\forall X)\phi$ ισχύει με την προϋπόθεση ότι ~~το~~ X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Διαφορετικά δεν έπεται ότι είναι νόμος.

Αντιπαράδειγμα: Έστω q ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος και θεωρούμε τον τύπο $q(X) \to (\forall X) q(X)$

Κατασκευάζουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}$ με $|\mathcal{A}| = \{\mu, \nu\}$. $\mathcal{E}(q) = \{\mu\}$.

Έστω v ~~τυχαία~~ μία αποτίμηση με $v(X) = \mu$. Τότε προφανώς $\mathcal{A}, v \models q(X)$ (διότι το X αποτιμάται στο μ που το $\mu \in \mathcal{E}(q)$), ενώ το $\mathcal{A}, v \not\models (\forall X) q(X)$, διότι $\mathcal{A}, v[X|v] \not\models q(X)$.

Νόμος αντικατάστασης μεταβλητών: $(\forall X)\phi \to \phi[X/\tau]$ όπου τ είναι ένας όρος της γλώσσας μας που μπορεί να αντικαταστήσει την X στον φ, δηλαδή εάν η Y είναι μια οποιαδήποτε μεταβλητή του τ, τότε δεν υπάρχει υποτύπος φ' του φ στον οποίο η X εμφανίζεται ελεύθερη και ο φ' ξεκινάει με $(\forall Y)$ ή $(\exists Y)$.

① π.χ. $\tau = c$ με c σύμβολο σταθεράς της γλώσσας: $(\forall X)\phi \to \phi[X/c]$

② π.χ. $\tau = X$: $(\forall X)\phi \to \phi[X/X]$ δηλ. $(\forall X)\phi \to \phi$ (ίδιο). νόμος.

③ π.χ. $\tau = Y$ κ' $\phi: (\exists Y)(Y \neq X)$.

~~$(\forall X)\phi \to \phi[X/Y]$~~ $(\forall X)\overbrace{(\exists Y)(Y \neq X)}^{\phi} \to (\exists Y)(Y \neq Y)$

~~$(\forall X)\phi \to \exists$~~

δεν είναι νόμος!

ο X στον φ' = φ εμφανίζεται ελεύθερη

Άσκηση:

Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι νόμοι και ποιοι όχι;

(α) $(\forall Y)[(\forall X)\underbrace{(p(X) \to p(X))}_{\phi} \to (p(c) \to p(c))]$ όπου c σύμβολο σταθεράς. Είναι νόμος με $\tau = c$. αντικατάστασης από το $(\forall X)$ ...

και είναι νόμος από το $(\forall Y)$ ... από νόμο απορρόφησης έχουμε $(\forall Y)\phi \equiv \phi$ εάν φ είναι νόμος ή διαφορετικά ~~[illegible]~~ δεν εμφανίζεται πουθενά ελεύθερα στον φ ~~το~~ Y.

2ος τρόπος: Ως γνωστόν το $\phi \to \phi$ είναι ένας νόμος της λογικής, κατά συνέπεια το $p(c) \to p(c)$ είναι νόμος άρα και (φ→α) $[(\forall X)(p(X) \to p(X)) \to p(c) \to p(c)]$ είναι νόμος. και άρα το $(\forall Y)[\_\_\_]$ είναι νόμος (από νόμο απορρόφησης).

(β) $p(X) \to (\forall Y) p(Y)$ με p μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

δεν είναι νόμος, διότι το $(\forall Y)\, p(Y) \equiv (\forall X)\, p(X)$ και γνωρίζουμε ότι το $p(X) \to (\forall X)\, p(X)$ δεν είναι νόμος.

(γ) $(\forall X)\underbrace{(\exists Y)\, q(X,Y)}_{\phi} \to (\exists Y)\, q(Y,Y)$ για $\phi' = \phi$, $\tau = Y$. δεν είναι νόμος.

(δ) $(\forall X)\left[\underbrace{(\exists Y)\, q(X,Y)}_{\phi = \phi'} \to (\exists Y)\, q(Y,Y)\right]$ όχι νόμος

X/Y

γιατί υπάρχει υποτύπος που ξεκινάει με (∃Y)

Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το X με το Y διότι ∃ υποτύπος $\phi' = (\exists Y)\, q(X,Y)$ που ξεκινάει με (∃Y)... ή (∀Y).

(ε) $(\underbrace{p(Y) \to (\forall X)\, p(X)}_{\phi}) \to (\forall X)(\underbrace{p(Y) \to (\forall X)\, p(X)}_{\phi})$

$\to (\forall X)$

είναι νόμος, διότι ισχύει $\phi \to (\forall X)\phi$ με X να είναι δεσμευμένο στον φ.

Σχόλιο: αν είχα $\phi \to (\forall Y)\phi$ δεν είναι νόμος, γιατί το Y είναι ελεύθερο στον φ.

(στ) $X_2 = X_0 \to [\, p(X_2, f(X_1, X_2)) \leftrightarrow p(X_2, f(X_1, X_0))\,]$

όπου f διθέσιο σύμβολο συνάρτησης.

(είναι όλα ατομικοί τύποι, άρα νόμος)

Σχόλιο: Νόμος αντικατάστασης στους ατομικούς τύπους: Εάν φ είναι ένας ατομικός τύπος, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε μέσα στον φ μία μεταβλητή X με κάποια άλλη Y σε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις της X με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε $X = Y$.

Άρα είναι νόμος.

Δεσμευμένη έμπροσθεν κανονική μορφή (ΔΕΚΜ): Ένας τύπος φ είναι σε ΔΕΚΜ εάν είναι γραμμένος στη μορφή $(Q_1 X_1)(Q_2 X_2)\ldots(Q_n X_n)\sigma$ όπου $Q_1, Q_2, \ldots$ είναι κάποιο από τα ∀ ή ∃ και σ είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες γραμμένος σε Συζευκτική κανονική μορφή.

Θεώρημα: Κάθε τύπος φ των μαθηματικών γράφεται ισοδύναμα σε ΔΕΚΜ μορφή.

ΣΘΣ

ισοδύναμα

Ασκήσεις: ① Γράψτε τον παρακάτω τύπο σε ΔΕΚΜ:

$$\underbrace{(\forall x)(\forall y)(\exists z)[p(x,z)\land p(y,z)]}_{A} \to \underbrace{(\forall x)(\forall y)(\exists u)(r(x,y,u))}_{B}$$

όπου p, r 2 σύμβολα κατηγορήματος σε κάποια γλώσσα. Θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους απορρόφησης, αντικατάστασης και μετονομασίας μεταβλητών

(1) $\phi \overset{\leftrightarrow}{\equiv} (\forall x)\phi$ με προϋπόθεση x δεν εμφ. ελεύθερα στο φ

(2) $(\forall x)\phi \leftrightarrow (\forall z)\phi[x/z]$ " z άγνωστο στο φ

(3) $(\exists x)\phi \leftrightarrow (\exists z)\phi[x/z]$ (δηλ. z δεν εμφανίζεται καθόλου στον φ).

(4) $\phi \to (\forall x)\psi \leftrightarrow (\forall x)(\phi \to \psi)$ με την προϋπόθεση ότι φ νόμος ή το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στον φ

⋮

$$A \to B \equiv (\neg A)\lor B \equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg p(x,z)\lor \neg p(y,z)]\lor$$

$$\lor[(\forall x)(\forall y)(\exists u)\, r(x,y,u)] \equiv$$

$$(\exists x)[(\exists y)(\forall z)\_\_ \lor B] \equiv$$

$$(\exists x)(\exists y)[(\forall z)[\_\_] \lor B] \equiv$$

(∀x)(∀y)(∃u

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg p(x,z)\lor \neg p(y,z)\lor$$

$$r(x,y,u)] \equiv$$

$(x=x_1)$ δεν μπορείς να το πάρεις αλλαγή ονομ.

νόμοι μετονομασίας

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\_\_ \lor (\forall x_1)(\forall y_1)(\exists u)\, r(x_1,y_1,u)]$$

$$\equiv \underbrace{(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall x_1)(\forall y_1)(\exists u)}_{\equiv \Delta EKM.}\underbrace{[\_\ \lor\ \lor\ ]}_{\text{συζευκτική κανονική μορφή}}$$

οι ποσοδείκτες είναι στα δεξιά.

ⓟⓧ $\Sigma = \{A \vee (\neg B) \vee (\neg \Gamma), B \vee \Delta, (\neg A) \vee (\neg \Delta)\}$

$\underbrace{\{A, \neg B, \neg \Gamma\}}_{\sigma_1} \quad \underbrace{\{B, \Delta\}}_{\sigma_2} \quad \underbrace{\{\neg A, \neg \Delta\}}_{\sigma_3}$

$R(\Sigma) = \Sigma \cup \{R_B(\sigma_1, \sigma_2), R_A(\sigma_1, \sigma_3), R_\Delta(\sigma_2, \sigma_3)\} =$
$= \Sigma \cup \{\underbrace{\{A, \neg \Gamma, \Delta\}}_{\sigma_4}, \underbrace{\{\neg B, \neg \Gamma, \neg \Delta\}}_{\sigma_5}, \underbrace{\{B, \neg A\}}_{\sigma_6}\}.$

$R(R(\Sigma)) = R(\Sigma) \cup \{R_A(\sigma_1, \sigma_6), R_B(\sigma_1, \sigma_6), R_B(\sigma_2, \sigma_3), R_\Delta(\sigma_2, \sigma_5), R_A(\sigma_3, \sigma_4), R_\Delta(\sigma_3, \sigma$
$R_A(\sigma_4, \sigma_6), R_B(\sigma_3, \sigma_6)\}.$

$R_A(\sigma_1, \sigma_6) = \{\neg B, \neg \Gamma, B\} = T$
$R_A(\sigma_3, \sigma_4) = \{\neg \Delta, \neg \Gamma, \Delta\} = T$

Το $R^2(\Sigma)$, δηλ. το $R(R(\Sigma))$ είναι 14 διαφορετικές προτάσεις //

Σχόλιο

Εαν Σ είναι πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων τότε θα βρούμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $R^n(\Sigma) = R^{n+1}(\Sigma) = R^{n+2}(\Sigma) = \ldots$ δηλ. από ένα n και πάνω δεν προκύπτουν νέες επιλύουσες.

$\{\neg A$

ⓟⓧ. Αν $\Sigma = \{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}\}$ $\quad R(\Sigma) = \{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}, R_A(\sigma_1, \sigma_3)\} = \{\{A\}, \{B\}, \{\ \}\}$
$R^2(\Sigma) \cup \{$οι επιλύουσες μεταξύ των στοιχείων του $R(\Sigma)\}. = R(\Sigma)$ για $n=1$.

Σχόλιο: εαν ένα Σ περιέχει το $\emptyset$, τότε προφανώς είναι ασυνεπές

Πρόταση

Δείξτε ότι εαν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, τότε αναγκαστικά και το Σ είναι ασυνεπές.

Αποδ.

Κανόνας επίλυσης: $\{(\neg \sigma_1) \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$, άρα όλα τα στοιχεία του $R(\Sigma)$ είναι συνεπής του Σ, δηλ. $\Sigma \models R(\Sigma)$. Με όμοιο