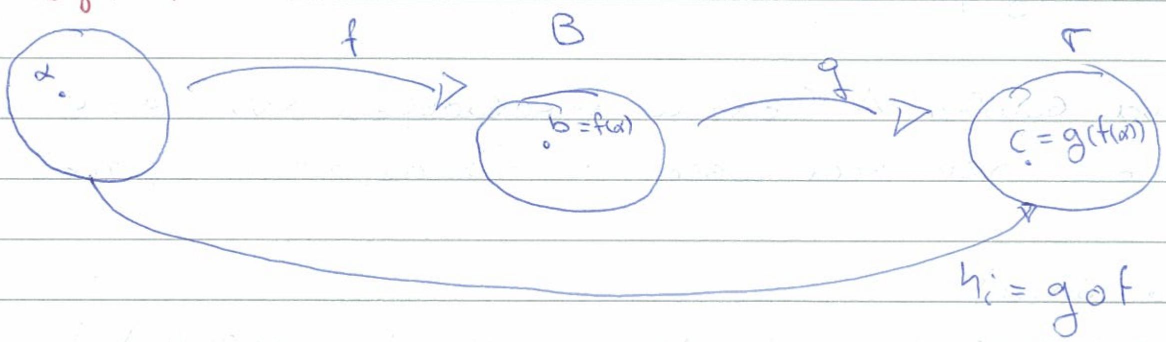
Χειρόγραφες σημειώσεις
από το Μάθημα
Στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων
Παραδόσεις από 22-04-13 έως και 12-06-13

Ισοδύναμα σύνολα: Έστω Α, Β σύνολα. Θα λέγονται ισοδύναμα (έχουν την ίδια ισχύ - ίδιο πληθικό αριθμό) αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη ("1-1" και "επί") συνάρτηση
$f: A \to B$ (Συμβολισμός $\simeq$).

(*) Η σχέση ισοδυναμίας ($\sim$) είναι σχέση:
1) συμμετρική: $A \simeq B$ τότε $B \simeq A$
2) ανακλαστική: $A \simeq A$ μπορούμε να πάρουμε σαν $f: id: A \to A$ με $id(x) = x$ ταυτοτική
3) μεταβατική: $A \simeq B$ και $B \simeq \Gamma$ τότε $A \simeq \Gamma$

~~Απόδειξη~~ 3



Πχ
Έστω $\{\alpha, b, c, d\} \simeq \{1, 2, 3, 4\}$
Το $\{-1, 0, 1, 2\}$ είναι ισοδύναμα
Έστω $\mathbb{N}$ ισοπληθικό με τους άρτιους
$\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ $\quad f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{N}$
Για $x = \frac{y}{2}$ έχουμε $f(x) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$

$\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{100, 101, 102, \dots 1000\}$
$1 \to 1$, $2 \to 2$, ..., $100 \to 1001$, $101 \to 1002$
Άρα ορίζουμε $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$, $x \leq 99$
$f(x) = 901 + x$, $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \geq 100$

Η f είναι "1-1" διότι αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$
1η περίπτωση:
Για $x_1, x_2 \leq 99$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$ αφού είναι η ταυτοτική

Άρα από $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

2η περίπτωση: $x_1 \leq 99$, $x_2 \geq 100$ τότε

$f(x_1)=x_1$ και $f(x_2)=901+x_2 > 100 > f(x_1)$

Άρα η περίπτωση αποκλείεται

3η περίπτωση: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ και $x_1 \geq 100$, $x_2 \geq 100$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 901+x_2 = 901+x_1 \Rightarrow x_1=x_2$

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι "επί"

Ορισμός: Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν $A=\emptyset$ είτε υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $A \simeq \{n_1, n_2, \ldots, n_n\}$

Άσκηση 1 (για σπίτι)

Δ.ο $\forall A$ πεπερασμένο με $A \subseteq \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \setminus A$.

2) Δ.ο οι ακέραιοι είναι ισοπληθικοί με τους $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$

Λύση

Θα στέλνουμε τους θετικούς ακέραιους στους άρτιους. Θα στέλνουμε το μηδέν και τους αρνητικούς ακέραιους στους περιττούς.

για $f(x)=2x$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 1$

$f(x)=-(2x-1)$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \leq 0$

Η f είναι "1-1". Είναι "1-1" γιατί:

1η περίπτωση: $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$ προφανές

2η περίπτωση: $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 0$: $f(x_1)=2x_1$, $f(x_2)=-(2x_2-1)$ $=-2x_2+1$ όπου το $f(x_2)$ είναι περιττός και $f(x_1)$ άρτιος

Άτοπο

Άρα δεν γίνεται αυτή η περίπτωση γιατί υποθέσαμε ότι: $f(x_1)=f(x_2)$

3η περίπτωση: $x_1, x_2 \leq 0$ . . . . . . (Ν.δ.ο είναι "επί")

22/04/13

$f(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{Z}, \ x \geq 1$

$f(x) = -(2x-1), \quad x \in \mathbb{Z}, \ x \leq 0$

Η f είναι "1-1" : $f(x_1) = f(x_2)$: 1η περίπτωση...

2η περίπτωση: $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) = \underbrace{2x_1}_{\text{άρτιος}}$ και $f(x_2) = \underbrace{-(2x_2-1)}_{\text{περιττός}}$

Άρα δεν γίνεται να έχουμε αυτήν την περίπτωση, διότι υποθέσαμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$

3η περίπτωση: $x_1, x_2 \leq 0$ ...

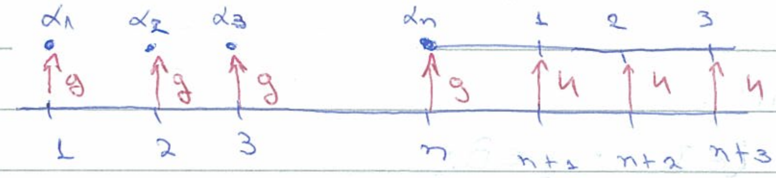
και "επί"

Άσκηση 1

Έστω $A \neq \emptyset$ ένα πεπερασμένο σύνολο από στοιχεία που δεν είναι φυσικοί αριθμοί. Τότε το $\mathbb{N} \dot{\cup} A \simeq \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} \cap A = \emptyset)$ ($\dot{\cup}$: ένωση ξένων συνόλων)

Απόδειξη

Από υποθέσεις το $A \simeq \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$



Η g είναι "1-1" και "επί"

$g: \{1, 2, 3, \dots, n\} \to A$ και h είναι η συνάρτηση: $h(n+x) = x$

· Ορίζουμε την $f: \mathbb{N} \to A \dot{\cup} \mathbb{N}$ ως εξής:

$\forall x \leq n, \ x \in \mathbb{N} \quad f(x) = g(x)$ (όπου $g(x) = \alpha_x$)

$x \geq n+1, \ x \in \mathbb{N} \quad f(x) = x - n = h(x)$

· Θα δείξουμε ότι η f είναι "1-1":

Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.

1η περίπτωση: $\boxed{x_1, x_2 \geq n+1}$

Άρα $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - \cancel{n} = x_2 - \cancel{n} \Rightarrow x_1 = x_2$

2η περίπτωση: $\boxed{x_1, x_2 \leq n}$

Άρα $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \stackrel{\text{επειδή } g \text{ "1-1" και "επί"}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

3η περίπτωση: $\boxed{x_1 \leq n, \quad x_2 \geq n+1}$

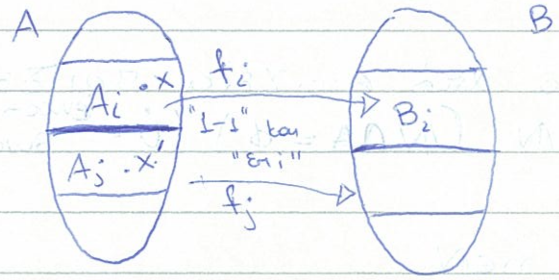
$f(x_1) = f(x_2)$, $\quad f(x_2) = x_2 - n$ ενώ $f(x_1) = g(x_1) \in A$

$x_2 - n \in \mathbb{N}$. Αυτή η περίπτωση αποκλείεται διότι οι εικόνες $f(x_1)$, $f(x_2)$ ανήκουν σε ξένα μεταξύ τους σύνολα

Θα δείξουμε ότι είναι "επί" ($f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \dot\cup A$ "επί": Homework).

Πρόταση 1:

Αν A_i, $i\in I$ και B_i, $i \in I$ είναι δύο οικογένειες συνόλων έτσι ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$ και όμοια $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall\ i \neq j$, $i,j \in I$ και αν επιπλέον το $A_i \simeq B_i$ τότε $\dot\bigcup_{i\in I} A_i \simeq \dot\bigcup_{i\in I} B_i$



$f: \dot\bigcup_{i\in I} A_i \to \dot\bigcup_{i \in I} B_i$: $f(x) = f_i(x)$ για $x \in A_i$

Δείχνουμε ότι η f είναι "επί":

Έστω $y \in B$, άρα υπάρχει $i_0 \in I$: $y \in B_{i_0}$

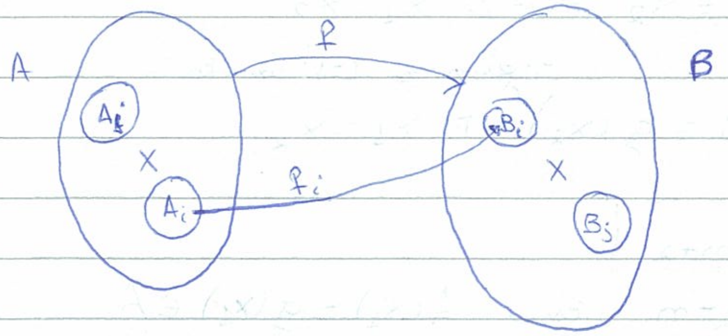
Άρα υπάρχει $x \in A_{i_0}$: $f_{i_0}(x) = y \Rightarrow f(x) = y$ (από τον ορισμό της f)

Άρα η f είναι "επί"

Η f είναι "1-1" Homework

Πρόταση: 2

Αν A_i, $i \in I$ και B_i, $i\in I$ είναι δύο οικογένειες συνόλων με $A_i \simeq B_i$, $\forall\ i \in I$ τότε $\prod_{i\in I} A_i \simeq \prod_{i \in I} B_i$



$x = (x_i)_{i\in I}$ όπου $x_i \in A_i$

ή άλλη μορφή

$x = g$ όπου g συνάρτηση

$g: I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ με $g(i) \in A_i$

22/04/B
III

Σχόλιο: Το $g(i)$ συνηθίζουμε να το γράφουμε με g_i οπότε την συνάρτηση g την γράφουμε απλά: $g = (g_i)_{i\in I}$

• Ορίζουμε την $f : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ ως εξής:

$$f((g_i)_{i\in I}) = (f_i(g_i))_{i\in I}$$

23/04/13 Στ. Θεωρία Σωμάτων

ορισμός

1) Έστω $R \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση $(+)$ και τον πολ/σμό $(\cdot)$. Αν $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα και ο πολ/μός ικανοποιεί τις συνθήκες:

α) $\alpha \cdot b = b \cdot \alpha$ $\forall\, \alpha, b \in R$ (αντιμεταθετικότητα)

β) $\forall\, \alpha, b, c \in R$, $\alpha \cdot (b \cdot c) = (\alpha \cdot b) \cdot c$ (προσεταιριστικότητα)

γ) $\forall\, \alpha, b, c \in R$, $\alpha \cdot (b + c) = \alpha \cdot b + \alpha \cdot c$ (επιμεριστικότητα)

Τότε λέμε ότι $(R,+,\cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος. Αν επί πλέον υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in R$ με $1 \cdot x = x$ $\forall\, x \in R$, τότε λέμε ότι $(R,+,\cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

· Ένα υποσύνολο I του R λέγεται ιδεώδες του R αν $(I,+)$ είναι υποομάδα και $\forall\, \alpha \in I$, $\forall\, x \in R$, $\alpha x \in I$

ΠΧ το $I = \{0\}$ και $I = R$ είναι ιδεώδη του R, $I = \{0\}$ λέγεται τετριμμένο ιδεώδες.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα δακτυλίου είναι το $(\mathbb{Z},+,\cdot,1)$ όπου $(+)$ και $(\cdot)$ είναι οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού και 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{Z}$.

$2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ → το σύνολο όλων των αρτίων ακεραίων, είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$.

πρόταση Έστω $(R,+,\cdot,1)$ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Τότε ένα υποσύνολο $I \subseteq R$ είναι ιδεώδες $\Leftrightarrow$

1) $\forall\, x, y \in I$, $(x - y) \in I$

2) $\forall\, x \in I$, $\forall\, r \in R$, $r \cdot x \in I$

· Ένα ιδεώδες I του R λέγεται μέγιστο αν $1 \notin I$ και R είναι το μόνο ιδεώδες του R που περιέχει γνήσια το I.

· Τα μέγιστα ιδεώδη είναι χρήσιμα γιατί ο δακτύλιος πηλίκο R/M είναι σώμα.

$I \neq R$
ιδεώδες I ενός

Πρόταση: Το λήμμα του Zorn συνεπάγεται ότι κάθε αντιμεταθετικός δακτύλιος $(R, +, \cdot, 1)$ με μοναδιαίο στοιχείο, περιέχεται σε ένα μέγιστο ιδεώδες J του R.

Απόδειξη:
Έστω $P = \{ J \subseteq R : I \subseteq J$ και J είναι ιδεώδες του R με $1 \notin J \}$. προφανώς, $P \neq \emptyset$ ($I \in P$ διότι $1 \notin I$ και $I \subseteq I$)
Επίσης $(P, \subseteq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι $(P, \subseteq)$ είναι επαγωγικό. Έστω
$\mathcal{C} = \{ C_i : i \in I \}$ μια αλυσίδα του $(P, \subseteq)$ και
$C = \bigcup \mathcal{C}$. Θα δείξουμε ότι C είναι ιδεώδες με $1 \notin C$.
1) Έστω $x, y \in C$. Έχουμε $x \in C_i$ και $y \in C_j$ για κάποια $i, j \in I$
Επειδή $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα, $C_i \subseteq C_j$ ή $C_j \subseteq C_i$. Έστω ότι $C_i \subseteq C_j$. Άρα $x, y \in C_j$ επειδή C_j είναι ιδεώδες $(x-y) \in C_j$. Άρα, $x - y \in C = \bigcup \mathcal{C}$

2) Έστω $x \in C$ και $r \in R$. Επειδή $x \in C$, $x \in C_i$ για κάποιο $i \in I$. Άρα, $r \cdot x \in C_i$. Άρα $r \cdot x \in C$. Επομένως C είναι ιδεώδες του R.
Επιπλέον $1 \notin C$ (αν το $1 \in C$ τότε $1 \in C_i$, για κάποιο $i \in I$ άτοπο, αφού τα C_i είναι ιδεώδη που δεν περιέχουν το 1).
επειδή, $I \subseteq C_j$ $\forall j$, έχουμε ότι $I \subset C$. Άρα $C \in P$ και $C_i \subseteq C$ $\forall i \in I$. Άρα C είναι άνω φράγμα του $\mathcal{C}$ και συνεπώς $(P, \subseteq)$ είναι επαγωγικό. Από το λήμμα του Zorn $(P, \subseteq)$ έχει ένα ψευδομέγιστο στοιχείο J. Δηλαδή $J \in P$ και J δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο ιδεώδες του R εκτός από το R το ίδιο. Επειδή $J \in P$, $I \subseteq J$, $1 \notin J$ και J δεν περιέχει κανένα άλλο ιδεώδες. Άρα J είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του R που περιέχει το I. Άρα κάθε ιδεώδες I του R περιέχεται σε ένα μέγιστο ιδεώδες.

Θεώρημα: Το λήμμα του Zorn συνεπάγεται το αξίωμα της Επιλογής AC.

Απόδειξη

Έστω $A=\{A_i : i\in I\}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων. Θα δείξουμε ότι $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

Έστω $P=\{p : p$ είναι συνάρτηση από ένα υποσύνολο του I μέσα στο $\bigcup\{A_i : i\in I\}$ έτσι ώστε $\forall i\in Dom(p),\ p(i)\in A_i\}$.

Προφανώς, $(P,\subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θ.δ.ο. $(P,\subseteq)$ είναι επαγωγικό. Έστω $\mathcal{C}=\{p_i : i\in I\}$ μια αλυσίδα του P. Θέτουμε $p=\bigcup\{p_i : i\in I\}$. Προφανώς $Dom(p)=\bigcup\{Dom(p_i) : i\in I\}$.

Επιπλέον p είναι συνάρτηση. Πράγματι αν $(x,y)\in p$ και $(x,z)\in p$ τότε $(x,y)\in p_i$ και $(x,z)\in p_j$ για κάποια $i,j\in I$. Επειδή $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα, έχουμε ότι $p_i\subseteq p_j$ ή $p_j\subseteq p_i$. Έστω ότι $p_i\subseteq p_j$. Άρα $(x,y),(x,z)\in p_j$. Επειδή p_j είναι συνάρτηση, έχουμε ότι $y=z$. Άρα, p είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του I και τ.ω. $\forall i\in I$, $p(i)\in A_i$. Επειδή $p_i\subseteq p$ $\forall i\in I$, έχουμε ότι p είναι άνω φράγμα του $\mathcal{C}$ και συνεπώς $(P,\subseteq)$ είναι επαγωγικό. Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα ψευδομέγιστο στοιχείο f του P.

Ισχυρισμός $Dom(f)=I$

Αν $x\in I\setminus Dom(f)$ και $\alpha\in A_x$ τότε $h=f\cup\{(\alpha,x)\}$, $h\in P$ και $h\geq f$, $f\neq h$ Άτοπο!

(f ως ψευδομέγιστο του P δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα στοιχείο του P). Άρα $Dom(f)=I$ και $\forall i\in I$, $f(i)\in A_i$.

Άρα, $f\in\prod_{i\in I}A_i\neq\emptyset$

Συμπέρασμα: Λήμμα του Zorn <=> Αξίωμα της Επιλογής

20/05/13 Στ. Θεωρία Συνόλων

Ένα σύνολο λέγεται πεπερασμένο, αν $A=\emptyset$ ή $\exists\, k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 1$ έτσι ώστε $A \simeq \{1, 2, \dots k\}$.

Πρόταση 1: Αν $m \in \mathbb{N}$ τότε $\nexists$ μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, m\}$ με την ίδια ισχύ με το $\{1, 2, \dots, m\}$

Απ. (με μαθηματική επαγωγή).

Για $m=1$. $A \subset \{1\}$ τότε $A=\emptyset$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $m=k$. Πρέπει να ισχύει για $m=k+1$.

Δηλαδή, αν $A \neq \emptyset$ και $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ τότε $A \not\simeq \{1, 2, \dots, k+1\}$

Ορίζουμε: $A' = A \setminus \{k+1\}$ → μπορεί το $k+1$ να ανήκει ή να μην ανήκει

Παρατηρήσεις:

1) $A' \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$

1η περίπτωση: Αν το $A' = \emptyset \Rightarrow A = \{k+1\}$ (αφού το βγάλαμε τότε το A γίνεται κενό).

Το $A \simeq \{1, 2, \dots, k+1\}$, $k \geq 1$. Δεν γίνεται διότι σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε μια "1-1" συνάρτηση και "επί" συνάρτηση $f: \{k+1\} \to \{1, 2, \dots, k+1\}$

και άρα $f^{-1}(1) = k+1$, $f^{-1}(2) = k+1$, άτοπο γιατί δεν είναι "1-1" η συνάρτηση.

Άρα για την 1η περίπτωση ισχύει η πρόταση.

2η περίπτωση: $A' \neq \emptyset$, $A' \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ έχουμε ότι $A' \subsetneq \{1, 2, \dots, k\}$ αφού $A' = A \setminus \{k\}$. Άρα από επαγωγική υπόθεση $A' \not\simeq \{1, 2, \dots, k\}$. $A' \cup \{k+1\} = \{1, 2, \dots, k\} \cup \{k+1\}$
$= \{1, 2, \dots, k, k+1\}$

Αν το A ήταν ισοδύναμο με το $\{1, 2, \dots, k+1\}$ τότε αφαιρώντας το $\{k+1\}$ και από τα δύο σύνολα θα προέκυπτε ότι: $A' \simeq \{1, 2, \dots, k\}$, άτοπο από την επαγωγική υπόθεση.

Άρα $A \not\simeq \{1, 2, \dots, k+1\}$ και έτσι αποδείχθηκε η πρόταση.

Πρόταση: Έστω $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο με k στοιχεία. Τότε το $A' = A \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in A$ περιέχει $k-1$ στοιχεία.

Απόδειξη

$\exists\ f: A \to \{1, 2, \ldots, k\}$, f "1-1", "επί".

1η περίπτωση: Αν $k=1$ τότε $A = \{\alpha\}$ και $A' = \emptyset$ περιέχει μηδέν στοιχεία, άρα ισχύει.

2η περίπτωση: Για $k>1$. Τότε θα φτιάξουμε μια $f': A' \to \{1, \ldots, k-1\}$, με f', "1-1" και "επί".

Έστω $f(\alpha) = \lambda$ με $\lambda \in \{1, 2, \ldots, k\}$ τότε

$A' = \{f^{-1}(\{1, 2, \ldots, k\}) \setminus f^{-1}(\lambda)\}$. Ορίζουμε την $f': \alpha' \neq \alpha \to p$ για $\alpha' = f^{-1}(p)$ με $p < \lambda$

$f: \alpha' \neq \alpha \to p-1$ για $\alpha' = f^{-1}(p)$ με $p > \lambda$

Πχ

Έστω ότι $\lambda = 3$. Τότε $\alpha_1 = f^{-1}(1)$ τότε το στέλνουμε μέσω της f' στο 1.

$\alpha_2 = f^{-1}(2)$ το στέλνουμε μέσω της f' στο 2. Το α_4 δεν το στέλνουμε στο 4 αλλά στο 3, δηλαδή στο $f^{-1}(3)$ και γενικά το $\alpha' = f^{-1}(p)$ με $p > \lambda$ το στέλνουμε στο $p-1$

Μένει ν.δ.ο η f είναι "1-1" και "επί".

"1-1": Έστω $f'(\alpha') = f'(\alpha'')$. Άρα θδο $\alpha' = \alpha''$

α) περίπτωση: $\alpha' = f^{-1}(p)$ $p < \lambda$ και $\alpha'' = f^{-1}(p)$ $p < \lambda$.

Για $\alpha, \alpha' < \lambda$, $\left.\begin{array}{l} f'(f^{-1}(p'')) = \alpha'' \\ f'(f^{-1}(p')) = \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f'(p') = f'(p'') \Rightarrow \alpha' = \alpha''$

β) περίπτωση: $\alpha' = f^{-1}(p)$, $p' > \lambda \Rightarrow f'(\alpha') = p' - 1$

$\alpha'' = f^{-1}(p'')$, $p'' > \lambda \Rightarrow f'(\alpha'') = p'' - 1$

Έχουμε $f'(\alpha') = f''(\alpha'') \Rightarrow p'' - 1 = p' - 1 \Rightarrow p' = p'' \Rightarrow \alpha' = \alpha''$

γ) περίπτωση: $\alpha' = f^{-1}(p')$, $p' > \lambda \Rightarrow f'(\alpha') = p - 1 - \lambda$

$\alpha'' = f'(p'')$, $p'' < \lambda \Rightarrow f'(\alpha'') = p''$

Έχουμε ότι $f'(\alpha') = f'(\alpha'') \Rightarrow p' - 1 = p''$, $p' - 1 \geq \lambda$, $p'' < \lambda$

Άρα αυτή η περίπτωση δεν ισχύει. Ν.δ.ο το "επί"

(✱ ✱)

Ορισμός: 1) Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $T(k) := \{1, 2, \ldots, k\}$
2) Έστω $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο σύνολο. Άρα $\exists\ k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $A \simeq T(k)$. Το k αυτό ονομάζεται ο πληθικός αριθμός (cardinal number) του A και συμβολίζεται με $\text{card}A = k$. Αν το A είναι κενό, ορίζουμε $\text{card}A = 0$

Πρόταση: κάθε πεπερασμένο σύνολο έχει μοναδικό πληθικό αριθμό.

Απόδειξη

1) Αν $A \neq \emptyset$ τότε $\text{card}A = 0$
2) Αν $A \neq \emptyset$ τότε έστω ότι το $\text{card}A = k'$, $\text{card}A = k$ με $k < k'$.

Εις άτοπο απαγωγή:
Έστω $A = \{1, 2, \ldots, k\}$, $A = \{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, k'\}$ άτοπο γιατί από την πρόταση 1, αν $n \in \mathbb{N}$ τότε δεν υπάρχει μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με την ίδια ισχύ με το $\{1, 2, \ldots, n\}$. Άρα αφού το $A \simeq \{1, 2, \ldots, k\}$ $k \in \mathbb{N}$, ισχύει η πρόταση.

(* *)
Πόρισμα: Αν A και B είναι πεπερασμένα και μη κενά και έχουν την ίδια ισχύ $A \simeq B$, $\alpha \in A$, $b \in B$ τότε το $A \setminus \{\alpha\} \simeq B \setminus \{b\}$

Απόδειξη

Έστω $k \in \mathbb{N}$ το πλήθος των στοιχείων των A και B. τότε:
1η περίπτωση: $k = 1 \Rightarrow A = \{\alpha\}$ και $B = \{b\}$ και άρα $\emptyset \simeq \emptyset$
2η περίπτωση: Αν $k > 1$ το $A \setminus \{\alpha\} \simeq \{1, \ldots, k-1\}$
$B \setminus \{b\} \simeq \{1, 2, \ldots, k-1\}$
Άρα $A \setminus \{\alpha\} \simeq B \setminus \{b\}$

Πρόταση: Αν το B είναι ένα τυχαίο υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου A, τότε το B είναι και αυτό πεπερασμένο και μάλιστα ισχύει ότι:

1) αν $B \subseteq A \Rightarrow \mathrm{Card}\,B \leq \mathrm{Card}\,A$

2) αν $B \subsetneq A \Rightarrow \mathrm{Card}\,B < \mathrm{Card}\,A$

Θα δείξουμε ότι αν $B \neq \emptyset$ είναι ένα γνήσιο υπόσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου A τότε και το B είναι πεπερασμένο

Απ

Υπάρχει $f: \{1, 2, \dots, m\} \xrightarrow[\text{"επί"}]{\text{"1-1"}} A$. Άρα η $f: f^{-1}(B)$ είναι "1-1" και επί στο B.

Επαγωγή:

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Τότε οποιοδήποτε μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $T(k) := \{1, 2, \dots, m\}$

$\emptyset \neq f^{-1}(B) \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$

Είναι προφανές ότι το $f^{-1}(B)$ ως γνήσιο υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, m\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $g: \{1, 2, \dots, k\} \to f^{-1}(B)$

Άρα παίρνουμε τη σύνθεση $f^{-1} \circ g: \{1, 2, \dots, k\} \to B$ που είναι "1-1" και "επί". Άρα το B είναι πεπερασμένο.

22/05/13 Στ. Θ. Συνόλων

Πρόταση

Έστω $B \subset T(m)$, $m \geq 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ πεπερασμένο και μάλιστα $\text{card}\, B < m$

Απόδειξη

Με μαθηματική επαγωγή:

Για $m=1$: $T(m) = \{1\}$ και $B = \emptyset$. Άρα $\text{card}\, B = 0 < 1 = m$

Έστω ότι ισχύει για $m=k$ και θ.δ.ο. ισχύει για $m=k+1$

Έστω ότι $B \subset T(k+1)$. Θδο B πεπερασμένο και $\text{card}\, B < k+1$

Ορίζουμε $B' = B \setminus \{k+1\}$

Σχόλιο: α) Αν υποθέσουμε ότι $B' = T(k)$ τότε το B είναι πεπερασμένο και $\text{card}\, B = k < k+1$. Άρα ισχύει η πρόταση.

Τώρα αν υποθέσουμε ότι $B' \subset T(k)$, από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι B' πεπερασμένο και $\text{card}\, B' < k$.

Άρα έχουμε (1) $B = B'$ (στην περίπτωση που το $(k+1) \notin B$) και άρα B πεπερασμένο και $\text{card}\, B = \text{card}\, B' < k+1$

(2) $B = B' \cup \{k+1\}$ (στην περίπτωση που το $(k+1) \in B$) και άρα B πεπερασμένο και $\text{card}\, B = \text{card}\, B' + 1 < k+1$

Πρόταση:

Αν $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο και $B \subset A \Rightarrow B$ πεπερασμένο, $\text{card}\, B < \text{card}\, A$.

Απόδειξη

$A \simeq T(m)$, $m \geq 1$. Άρα $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. Άρα, υπάρχει $k < m$ έτσι ώστε $B \simeq T(k)$. Οπότε B πεπερασμένο και $\text{card}\, B = k < m = \text{card}\, A$

Άσκηση: Δ.ο. $\forall\, k, m \geq 1 \in \mathbb{N}$, αν $T(k) \simeq T(m) \Rightarrow k = m$.

Απόδειξη

Εις άτοπο απαγωγή: Έστω $k > m$. Τότε $T(k) \supset T(m)$.

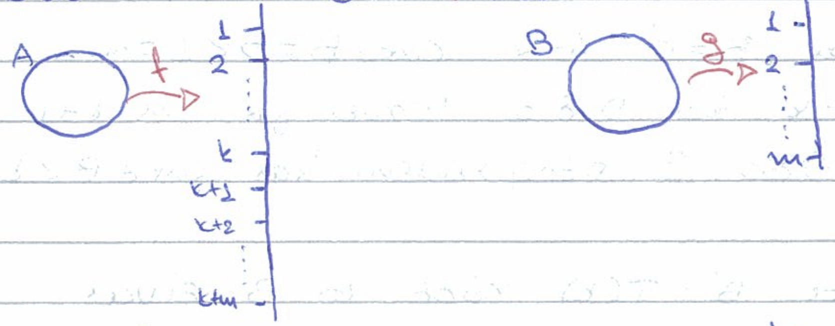
Άρα, απο προηγούμενη πρόταση, το $T(m)$ δεν μπορεί να έχει την ίδια ισχύ με το $T(k)$. Δηλαδή $T(k) \not\simeq T(m)$. Άτοπο.

Πρόταση: μη κενά

Αν A, B πεπερασμένα σύνολα και ξένα μεταξύ τους, τότε και η ένωσή τους, $A \cup B$, είναι πεπερασμένο σύνολο και ισχύει ότι $card(A \cup B) = card A + card B$.

Απόδειξη:

Έστω $A \simeq T(k) - f$ και $B \simeq T(m) = g$



Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $h : A \cup B \to T(m+k)$ που είναι "1-1" και "επί"

Ορίζουμε $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x)+k \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι η h είναι "επί"

Έστω $p \leq m+k$:

1η περίπτωση: Έστω $p \leq k$. Τότε $x = f^{-1}(p)$, διότι $h(x) = f(f^{-1}(p)) = p$.

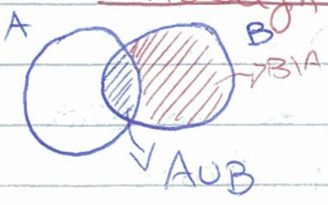
2η περίπτωση: Έστω $p \geq k+1$. Τότε $x = g^{-1}(p-k)$, διότι $h(x) = g(g^{-1}(p-k)) + k = p - k + k = p$

Άρα η h "επί".

Πρόταση:

Έστω $A, B \neq \emptyset$ πεπερασμένα σύνολα, τότε $A \cup B$, $A \times B$ είναι πεπερασμένα σύνολα και ισχύει $card(A \cup B) = card A + card B - card A \cap B$ και $card(A \times B) = card A \cdot card B$.

Απόδειξη



$A \cup B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$ = πεπερασμένη ένωση ξένων συνόλων και άρα πεπερασμένα

$card(A\cup B) = card(A) + card(B\setminus A)$ (1)

$B\setminus A = B\setminus (A\cap B)$. Έχουμε $(B\setminus A)\,\dot{\cup}\,(A\cap B) = B \Rightarrow$

$card(B\setminus A) + card(A\cap B) = card B \Rightarrow$

$card(B\setminus A) = card B - card(A\cap B)$. (2)

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $card(A\cup B) = card A + card B - card(A\cap B)$.

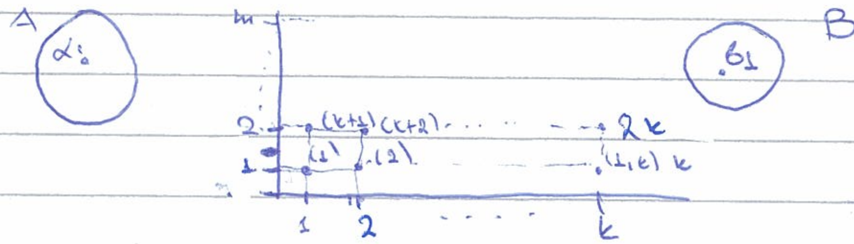
Μένει να δείξουμε ότι $A\times B$ είναι πεπερασμένο και μάλιστα $card(A\times B) = card A\cdot card B$.

Έστω $A\simeq T(m)$, δηλαδή $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$

$B\simeq T(k)$, δηλαδή $B=\{b_1,b_2,\dots,b_k\}$

$A\times B=\{(\alpha,b) : \alpha\in A$ και $b\in B\}$

Θα δείξουμε ότι $A\times B\simeq T(m\cdot k)$.



Γενικά, το $(\alpha_i,b_j)\longmapsto(i,j)\in T(m)\times T(k)$

Δείξτε ότι $T(m)\cdot T(k)\simeq T(m\cdot k)$

Χρησιμοποιήστε σαν ιδέα $(i,j)\xmapsto[\text{"επί"}]{\text{"1-1"}}(i-1)k+j$

Άρα τελικά $A\times B\simeq T(m\cdot k)$ άρα είναι πεπερασμένο και έχει $card(A\times B)=card A\cdot card B$.

Ορισμός: Ένα σύνολο $A\neq\emptyset$ θα λέγεται άπειρο ή απέραντο ανν το A δεν είναι πεπερασμένο.

Άσκηση: Δείξτε ότι το $\mathbb{N}$ είναι απέραντο.

Απόδειξη

Εις άτοπο απαγωγή: έστω $\mathbb{N}$ πεπερασμένο $\Rightarrow \mathbb{N}\simeq T(m)$ για $m\geq 1$. Το $\mathbb{N}\supset T(m+1)\supset T(m)\simeq\mathbb{N}$.

Σάββατο 11-13:00

Άρα, $card(\mathbb{N}) > m+1 > m = card(\mathbb{N}) \Rightarrow card(\mathbb{N}) > card(\mathbb{N})$

Άτοπο. Άρα το $\mathbb{N}$ είναι άπειρο σύνολο.

Πρόταση Αν A είναι άπειρο και B πεπερασμένο, τότε $A \setminus B$ είναι άπειρο.

Απόδειξη

Εις άτοπο απαγωγή: Έστω $A \setminus B$ πεπερασμένο. Άρα $(A \setminus B) \cup (B)$ = πεπερασμένο. Άρα A πεπερασμένο. Άτοπο.

25/05/13 Στ. Θεωρία Συνόλων

Πρόταση: Ένα σύνολο A είναι απέραντο ανν υπάρχει $B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $B \subseteq A$, $B \simeq \mathbb{N}$. Θ.δ.ο το A είναι άπειρο. Εις άτοπο απαγωγή.
Έστω ότι το A είναι πεπερασμένο. Άρα και το $B \subseteq A$ θα έπρεπε να είναι πεπερασμένο, άτοπο αφού $B \simeq \mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) A είναι απέραντο. Θ.δ.ο $\exists\ B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$.
$B = \{b_1, b_2, \dots\}$. Έχουμε $A \neq \emptyset$, άρα $\exists\ b_1 \in A$.
$A \setminus \{b_1\}$ είναι απέραντο άρα $A \setminus \{b_1\} \neq \emptyset$. Άρα $\exists\ b_2 \in A \setminus \{b_1\}$
Γενικά βρίσκουμε κάποιο $b_{i+1} \in A \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ $\forall\ i \geq 1$
Ορίζουμε $f: \mathbb{N} \to B$ με $f(i) = b_i$

Άσκηση Έστω $A \neq \emptyset$ και $\alpha \in A$. Δείξτε ότι το A απέραντο ανν $\exists\ B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$ και $\alpha \notin B$.

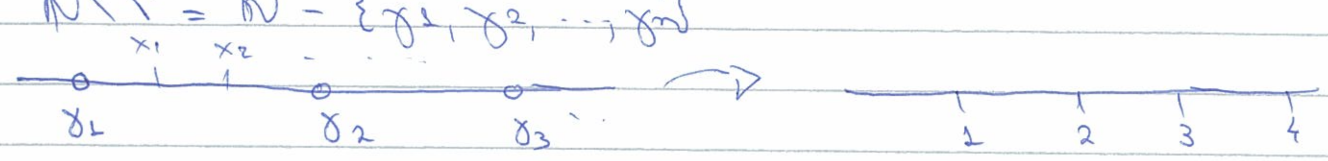
Λύση

($\Rightarrow$) Έστω ότι $B \subseteq A$ περιέχει το α. Δηλαδή $\alpha = b_{i_0}$, $i_0 \in \mathbb{N}$.
Τότε παίρνουμε το $B = B \setminus \{\alpha\} = B \setminus \{b_{i_0}\}$.
Το $B \setminus \{b_{i_0}\} \simeq \mathbb{N} \setminus \{i_0\} \simeq \mathbb{N}$

Άσκηση: Αν Γ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε $\mathbb{N} \setminus \Gamma = \mathbb{N}$

Απόδειξη

$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ με $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$
$\mathbb{N} \setminus \Gamma = \mathbb{N} - \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$



Ιδέα για να είναι "επί" του $\mathbb{N} \setminus \Gamma$

$f(2) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 3$
$f(6) = 4$
$f(8) = 5$

Έχουμε για τα y_i και τα x_i:

1) αν υπάρχουν $x < y_1$ τότε $f(x) = x$

2) αν $y_1 < x < y_2$ τότε $f(x) = x - 1$

3) αν $y_2 < x < y_3$ τότε $f(x) = x - 2$

4) αν $y_3 < x < y_4$ τότε $f(x) = x - 3$

Γενικά αν υπάρχουν $y_i < x < y_{i+1}$ τότε ισχύει ότι: $f(x) = x - i$

IV

25/05/13

2η ώρα

Πόρισμα: Το A είναι απέραντο ανν $\forall\ \Gamma \subseteq A$ πεπερασμένο το $A \setminus \Gamma \simeq A$.

Άσκηση: Δείξτε ότι το A είναι άπειρο ανν υπάρχει γνήσιο υποσύνολό του $B \subset A$ με $B \simeq A$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι A απέραντο. Τότε ορίζουμε $B = A \setminus \{\alpha\}$ με $\alpha \in A$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists\ B \subset A$ με $B \simeq A$. Θ.δ.ο. A άπειρο.

Εις άτοπο απαγωγή:

Αν A πεπερασμένο τότε θα έπρεπε $B \not\simeq A$. Άτοπο

Ορισμός:

1). Λέμε ότι το A υπερισχύει του B ανν $\exists\ f : B \xrightarrow{1-1} A$

Συμβολισμός : $B \precsim A$

2) Λέμε ότι το A γνήσια υπερισχύει του B αν $B \precsim A$ και $A \not\simeq B$. Συμβολισμός $B \prec A$

Παράδειγμα έστω $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο και B απέραντο. Τότε $A \prec B$

Απόδειξη:

1) $A \not\simeq B$, 2) $A \precsim B$. Απ

2) Έστω $B_1 \subseteq B$ και $B_1 \simeq \mathbb{N}$, $B_1 = \{y_1, y_2, \dots\}$. Ακόμα έχουμε: $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την $f(\alpha_i) = y_i$ οπότε $f : A \to B$ είναι "1-1".

Άρα $A \precsim B$

Άσκηση: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ και $A \prec \mathbb{N} \Rightarrow A$ πεπερασμένο.

Απόδειξη: εις άτοπο απαγωγή.

Αν A απέραντο τότε θα δείξουμε ότι θα έπρεπε $A \simeq \mathbb{N}$ και

Στα παρακάτω το
λέμε απλά Θεώρ. B-S

Καταλήξαμε σε άτοπο.

Θεώρημα (Schröder - Bernstein):

Έστω A, B τυχαία σύνολα. Αν $A \precsim B$ και $B \precsim A \Rightarrow B \approx A$. (το θεωρούμε γνωστό)

Από τις υποθέσεις έχουμε $A \subseteq \mathbb{N}$ και άρα $\boxed{A \precsim \mathbb{N}}$ (1)

$B \subseteq A$ και άρα $\boxed{\mathbb{N} \precsim A}$ (2)

Από (1) και (2) και θεώρημα Schröder-Bernstein έχουμε ότι $A \simeq \mathbb{N}$. Άτοπο

Ιδιότητες του $\precsim$:

1) $A \precsim A$ ($f: A \to A$ είναι η ταυτοτική)

2) Αν $A \subseteq B \Rightarrow A \precsim B$ (η ζητούμενη $f: A \to B$ είναι προφανώς η ταυτοτική).

(! Σχόλιο!: Αν $A \precsim B$ τότε δεν έπεται ότι $A \subseteq B$)

3) Μεταβατική ιδιότητα: $A \precsim B$ και $B \precsim \Gamma \Rightarrow A \precsim \Gamma$

(η ζητούμενη h είναι η σύνθεση των f, g)

4) $A \precsim B \Leftrightarrow (A \prec B$ ή $A \simeq B)$

5) ~~Αν~~ $A \simeq B \Leftrightarrow A \precsim B$ και $B \precsim A$

($\Leftarrow$) Θεώρημα S-B

($\Rightarrow$) Προφανής

6) Αν $f: A \to B$ "1-1" τότε υπάρχει $g: B \to A$ "επί".
($A \precsim B$)

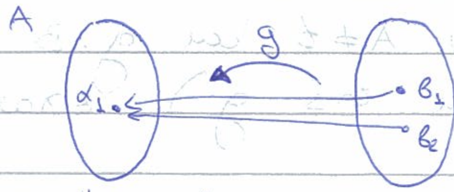
1η ώρα

27/05/13 — 2ζ. Θεωρία Συνόλων

Άσκηση: Έστω A, B ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$) τυχαία σύνολα. Τότε
$A \precsim B \iff g: B \to A$, g "επί"

Απ

($\Leftarrow$) Έστω $g: B \to A$, "επί"



Θα κατασκευάσουμε μια $f: A \to B$, "1-1".
Έστω $\alpha \in A$. Τότε το $g^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq B$
Για $\alpha' \neq \alpha \Rightarrow g^{-1}(\{\alpha'\}) \cup g^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$

Από αξίωμα επιλογής:
Έστω $\mathcal{C}$ μια συλλογή, από ξένα, μη κενά, μεταξύ τους σύνολα A_i, $i \in I$. Τότε υπάρχει μια f με $Df = I$ έτσι ώστε $f(i) \in A_i$.

Ορίζουμε σαν $\mathcal{C} = \{g^{-1}(\{\alpha\}), \alpha \in A\}$. Από αξίωμα επιλογής $\exists f$ με $Dom(f) = A$, έτσι ώστε $f(\alpha) \in g^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq B$ και άρα $f(\alpha) \in B$.

Θα δείξουμε ότι f: "1-1".
Έστω $f(\alpha) = f(\alpha')$. Άρα $f(\alpha) \in g^{-1}(\{\alpha\})$ και $f(\alpha') \in g^{-1}(\{\alpha'\})$
Άρα $g^{-1}(\{\alpha\}) \cap g^{-1}(\{\alpha'\}) \neq \emptyset$.
Άρα $g^{-1}(\{\alpha\}) = g^{-1}(\{\alpha'\})$. Άρα $\alpha = \alpha'$. Άρα η f είναι "1-1" και άρα η f είναι η ζητούμενη.

($\Rightarrow$) Έστω $f: A \to B$, f "1-1" και θέλουμε να κατασκευάσουμε $g: B \to A$, g "επί".

Ορίζουμε την f ως εξής:
Για b_1 που ανήκει στην $f(B)$ ορίζουμε $g(b_1) = f^{-1}(b_1)$
Για b_1' που δεν ανήκει στην $f(B)$ ορίζουμε $g(b_1) = \alpha_0$
όπου $\alpha_0 \in A$.

Η g είναι "επί" γιατί: Αν $\alpha \in A$ τότε $g(f^{-1}(\alpha)) = f(f^{-1}(\alpha)) = \alpha$ και άρα η $f^{-1}(\alpha)$ είναι η προεικόνα του A μέσω της g.

Σχόλιο: Αν $A = \emptyset$ και $g: B \to A$ "επί" τότε (ανεξαρτήτως του B και της g) έχουμε κάποια $f: A \to B$, f "1-1" $= \emptyset$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

Απ

Από θεώρημα Schröder-Bernstein, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \gtrsim \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \gtrsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \gtrsim \mathbb{N}$: ορίζουμε $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Θέλουμε η f να είναι "1-1". Άρα $f(n) = (n, n)$.

Άλλος τρόπος: ορίζουμε μια $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, (θέλουμε η g να είναι "επί") ως εξής:
$g(n, m) = n$. Άρα η g είναι "επί".

2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \lesssim \mathbb{N}$:
ορίζουμε $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(θέλουμε η f να είναι "1-1").
με τύπο: $f(n, m) = 2^n(2m+1)$.

2η ώρα 27/05/13 Σε. Θεωρία συνόλων

$f(n,m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n - 1.$

$f(1,1) = \frac{(1+1)(1+1-1)}{2} + 0 = 1$?

$f(1,2) = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} + 0 = 3$

Άλλη επίλυση:

$f_1(n,m) = 2^n(2m+1) \in \mathbb{N}$ και είναι 1-1.

$\circ\ f_1(n,m) = f_1(n',m') \Rightarrow 2^n(2m+1) = 2^{n'}(2m'+1) \Rightarrow$

$2^n = 2^{n'}$ και $2m+\cancel{1} = 2m'+\cancel{1} \Rightarrow m = m'$

$\ln(2^n) = \ln(2^{n'}) \Rightarrow$

$n = n'$.

Άρα η f είναι "1-1".

Άλλος τρόπος: Θα κατασκευάσουμε μια $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, g επί.

$g(n) = (n_1, m_1)$

$n = 2^n(2m+1)$, για $n=18 \Rightarrow n = 2\cdot(2\cdot 4+1)$

Άρα $g(18) = (1,4)$.

$g(2^9(2\cdot 9+1)) = (9,9)$

$g(2^n(2m+1)) = (n,m)$

Άρα η g είναι "επί".

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}\} \simeq \mathbb{N}$.

Λύση

Από S-B αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{Q}^+ \precsim \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}^+$.

2) $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}^+$: Θα φτιάξουμε $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ (f "1-1").

$f(n) = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}^+$. Η f είναι "1-1".

1) $\mathbb{Q}^+ \precsim \mathbb{N}$: Θα φτιάξουμε $f_1: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, f_1 "1-1".

$f_1\left(\frac{p}{q}\right) = 2^p(2q+1) \in \mathbb{N}$. Η f_1 είναι "1-1".

Άσκηση: Να δείξετε ότι $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Z}$.

Απόδειξη

Από S-B αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z}$ (1) και $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q}$ (2)

2) Θα φτιάξουμε $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, f "1-1".

$f(n) = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$ και f "1-1"

1) Θα φτιάξουμε $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, f "1-1".

$f_1(0) = 0$

$f_1\left(\frac{p}{q}\right) = 2^p(2q+1)$, $p, q \in \mathbb{N}$

$f_1\left(-\frac{p}{q}\right) = 2^p(2(-q)-1) \in \mathbb{N}$.

Άρα η f είναι "1-1".

Άσκηση: Δείξτε ότι $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$.

Λύση

Από S-B πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z}$.

2) $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z}$: Θα φτιάξουμε $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, f "1-1".

$f(n) = n$ είναι "1-1".

1) $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{N}$: Θα φτιάξουμε $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, g "επί".

$g(2k) = k$

$g(2k+1) = -k$

$g(1) = 0$

Άρα η g είναι "επί".

Άσκηση: 27/05/13 Σ.Θ.Σ

Αν A, B, Γ τυχαία σύνολα, $B \propto \Gamma$ και $A \underset{\sim}{\propto} B$ τότε $A \propto \Gamma$.

Απόδειξη:

Από $B \propto \Gamma$ έπεται προφανώς ότι $B \underline{\propto} \Gamma$. Οπότε $A \underset{\sim}{\propto} B$ και $B \underset{\sim}{\propto} \Gamma$. Άρα $A \underline{\propto} \Gamma$

Μένει ν.δ.ο. $A \not\propto \Gamma$. (εις άτοπο απαγωγή).

Έστω ότι $A \simeq \Gamma$. Άρα $A \underset{\sim}{\propto} \Gamma \simeq A$. Άρα $A \propto A$. Άτοπο.

Άρα $A \propto \Gamma$.

Άσκηση: $A_1 \underset{\sim}{\propto} \mathbb{N}$, $A_2 \underset{\sim}{\propto} \mathbb{N}$. Τότε $A_1 \cup A_2 \underset{\sim}{\propto} \mathbb{N}$.

Λύση

Έστω $f_1 : \mathbb{N} \to A_1$, f_1 "επί"

$f_2 : \mathbb{N} \to A_2$, f_2 "επί".

Κατασκευάζουμε $f : \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$

$$f(n) = \begin{cases} f_1(\lambda) \in A_1, & n = 2\lambda \\ f_2(\lambda) \in A_2, & n = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

1η ώρα

29/05/13

Σε. Θεωρία Συνόλων

ορισμός

i) ένα σύνολο A λέγεται <u>αριθμήσιμο</u> αν και μόνο αν το $A \simeq \mathbb{N}$

ii) ένα σύνολο A λέγεται <u>το πολύ αριθμήσιμο</u> ανν $A \preceq \mathbb{N}$

iii) ένα σύνολο A λέγεται <u>απέραντο</u> ανν το $\mathbb{N} \precsim A$

iv) ένα σύνολο A λέγεται <u>πεπερασμένο</u> ανν το $A \precsim \mathbb{N}$

v) ένα σύνολο A λέγεται <u>υπεραριθμήσιμο</u> ανν $\mathbb{N} \prec A$.

Πρόταση

Αν $A \prec \mathbb{N}$ τότε είναι πεπερασμένο.

Απ (εις άτοπον απαγωγή).

Έστω ότι το A είναι απέραντο. Άρα $A \precsim \mathbb{N}$. Από (iii) $\mathbb{N} \precsim A$. Άρα από $A \precsim \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \precsim A$ άρα από μεταβατική ιδιότητα $\mathbb{N} \prec \mathbb{N}$. Άτοπο

Αντίστροφα, αν A πεπερασμένο τότε έχουμε δείξει ότι $A \prec \mathbb{N}$.

Πρόταση:

Ένα σύνολο είναι υπεραριθμήσιμο ανν είναι απέραντο και δεν είναι αριθμήσιμο (και ούτε το πολύ αριθμήσιμο).

Απ ($\Rightarrow$)

Έστω $\mathbb{N} \prec A$. Άρα $\mathbb{N} \precsim A$ και άρα A απέραντο.

($\Leftarrow$) (Εις άτοπον απαγωγή)

Αν A αριθμήσιμο τότε $A \simeq \mathbb{N}$ (*) και άρα $A \precsim \mathbb{N}$. (**)

Από (*) και (**) και μεταβατική ιδιότητα, έχουμε ότι:

$\mathbb{N} \prec \mathbb{N}$. Άτοπο

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το A δεν είναι το πολύ αριθμήσιμο.

($\Leftarrow$) A απέραντο. $\Rightarrow$ $\mathbb{N} \precsim A$

A όχι αριθμήσιμο σημαίνει $\Rightarrow$ $A \not\simeq \mathbb{N}$

Άρα το $\mathbb{N} \prec A$

Θεώρημα: $\forall X$ σύνολο, το X έχει μικρότερη ισχύ από το $X \propto P(X)$

Απ

Αρχικά δείχνουμε ότι $X \precsim P(X)$

$f(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$, είναι "1-1".

Τώρα θα δείξουμε ότι το $X \not\approx P(X)$

1η περίπτωση:

Αν X πεπερασμένο τότε το $P(X)$ περιέχει είτε 1 στοιχείο αν $X = \emptyset$ και για "n" το πλήθος στοιχεία του X, το $P(X)$ περιέχει 2^n στοιχεία.

Γενικά: (Εις άτοπο απαγωγή)

Έστω μια $f: X \to P(X)$, f "1-1" και "επί".

Τότε θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in X, x \notin f(x)\}$.

Για το σύνολο $A = \{x \in X, x \notin f(x)\} \in P(X)$, αφού η f είναι "επί", έχει προεικόνα, έστω $\alpha \in X$.

Το $f(\alpha) = A$, $\alpha \in A \Leftrightarrow \alpha \in X$ και $\alpha \notin f(A) \Leftrightarrow$ $\alpha \in X$ και $\alpha \notin A$.

Άτοπο

Παράδειγμα $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$. Από θεώρημα Cantor το $\mathbb{N} \propto P(\mathbb{N})$

Υπόθεση του συνεχούς

Αξίωμα: Δεν υπάρχει σύνολο M: $\mathbb{N} \propto M \propto P(\mathbb{N})$

Άσκηση: Δείξτε ότι το $(0,1] \simeq P(\mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω $b > 1$ ένας φυσικός αριθμός. Τότε κάθε $x \in (0,1]$ έχει μια και μοναδική μη τερματιζόμενη b-αδική παράσταση της μορφής:

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \dots + \frac{x_n}{b^n} \quad \text{όπου τα } x_i \in \mathbb{Z}$$

και $0 \le x_i < b$.

Στην περίπτωση που το x είναι της μορφής:

$x = \dfrac{a}{b^r}$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$

για κάποιο $a \in \mathbb{N}$, $a \le b^r$

Τότε και μόνο τότε ο x έχει δύο b-αδικές παραστάσεις, η μια τερματιζόμενη και η άλλη μη τερματιζόμενη.

2η ώρα: 9/05/13 Στ. Θεωρία Συνόλων

Ακόμα ισχύει, εάν $\frac{x_1}{b}+\frac{x_2}{b^2}+\dots+\frac{x_m}{b^m}=\frac{y_1}{b}+\frac{y_2}{b^2}+\dots+\frac{y_n}{b^n}$

είναι δύο ίσες τερματιζόμενες b-δικές παραστάσεις τότε αναγκαστικά $m=n$ και $x_1=y_1, \dots, x_m=y_n$.

Ακόμα, ισχύει εάν $\frac{x_1}{b}+\frac{x_2}{b^2}+\dots+\frac{x_m}{b^m}+\dots=\frac{y_1}{b_1}+\dots+\frac{y_n}{b^n}+\dots$ δύο μη τερματιζόμενες ίσες b-δικές παραστάσεις, τότε $x_1=y_1, \dots, x_m=y_n, \dots$

Ακόμα ισχύει, εάν $\frac{x_1}{b}+\frac{x_2}{b^2}+\dots+\frac{x_m}{b^m}=\frac{y_1}{b}+\frac{y_2}{b^2}+\dots+\frac{y_n}{b^n}+\dots$

δύο ίσες b-δικές παραστάσεις, η μια τερματιζόμενη και η άλλη μη τερματιζόμενη, τότε αναγκαστικά $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ και $y_m=x_m-1$ και $y_{m+1}=b-1$, $y_{m+2}=b-1, \dots, y_i=b-1$

Άσκηση: Έστω $x=\frac{1}{2^{2n_1}}+\frac{1}{2^{2n_2}}+\frac{1}{2^{2n_3}}+\dots+\frac{1}{2^{2n_k}}$, όπου $n_1<n_2<\dots<n_k \in \mathbb{N}$

Δείξτε ότι ο x δεν μπορεί να είναι ίσος με κάποιον αριθμό μη τερματιζόμενο της μορφής $y=\frac{1}{2^{2m_1}}+\frac{1}{2^{2m_2}}+\dots$, όπου $m_1<m_2<\dots$ μια άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών.

Απόδειξη (Εις άτοπο απαγωγή)

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο δυαδικές παραστάσεις είναι ίσες, τότε θα έπρεπε $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, $\dots$ $n_{k-1}=m_{k-1}$ και

$2m_k=2n_k-1$ που δεν γίνεται. Άρα άτοπο. (*)

Άρα δεν μπορεί ένα τέτοιο x να γραφτεί σαν τέτοιο y.

(* στο άτοπο καταλήξαμε διότι ένας περιττός θα γινόταν ίσος με έναν άρτιο αριθμό).

Πχ $x_{(2)}=0.000001010001=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\frac{0}{2^{12}}+\underbrace{\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{2^{14}}+\dots}_{=\frac{1}{2^{12}}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} n_1=3 \\ n_2=4 \\ n_3=6 \end{array}}$$

$=0.000001010000111\dots$

Άσκηση: Δείξτε ότι $(0,1] \simeq P(\mathbb{N})$.

Απόδειξη

Πρέπει το $(0,1] \precsim P(\mathbb{N})$ και $P(\mathbb{N}) \precsim (0,1]$.

1) Θα βρούμε μια $f: (0,1] \to P(\mathbb{N})$, "1-1". Έστω $x \in (0,1]$. Τότε ο x έχει μια και μοναδική ~~μη~~ μη τερματιζόμενη δυαδική παράσταση.

$$x = 0.x_1x_2\ldots\ldots = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots + \ldots$$

όπου $x_i = 0$ ή 1.

Πχ: $x = 0.000101\ldots \xrightarrow{f} A_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\} \in P(\mathbb{N})$.

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0 \ldots$

Αν $A_x = A_y$ θα είχαμε ότι τα x και τα y έχουν ακριβώς τις ίδιες μη τερματιζόμενες 2-δικές παραστάσεις, δηλαδή $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$

Επειδή κάθε αριθμός στο $(0,1]$ έχει μοναδική μη τερματιζόμενη 2-δική αναπαράσταση, έχουμε $x = y$.

Άρα η f είναι "1-1" και το $(0,1] \precsim P(\mathbb{N})$.

2) Θα δείξουμε ότι $P(\mathbb{N}) \precsim (0,1]$. Έχουμε $B = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ με $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. $B \to \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots \frac{1}{2^{n_k}}$ (δεν θα είναι "1-1")

Διόρθωση: $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \xrightarrow{f} \frac{1}{2^{2n_1}} + \frac{1}{2^{2n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{2n_k}} + \frac{1}{2^{2n_k+2}} + \ldots$

$\{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\} \to \frac{1}{2^{2n_1}} + \frac{1}{2^{2n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{2n_k}} + \ldots$

Νδο η f είναι "1-1" από πρόταση.

1η ώρα I

1/06/13

Σχ. Θεωρία Συνόλων

Συνέχεια από το προηγούμενο

Θα δείξουμε ότι $P(\mathbb{N}) \not\approx (0,1]$.

Ορίσαμε την $f: P(\mathbb{N}) \to (0,1]$, 1-1

$f(\{n_1, n_2, \dots n_k\}) = \frac{1}{2^{2n_1}} + \frac{1}{2^{2n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{2n_k}}$

Για $f(\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots\}) = \frac{1}{2^{2m_1}} + \frac{1}{2^{2m_2}} + \dots$

Σχόλιο: εάν ορίζαμε απλοϊκά την συνάρτηση ως εξής,

$g(\{n_1, n_2, \dots, n_k\}) = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}}$ και όμοια

$g(\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots\}) = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \dots$.

Τότε η g δεν θα ήταν "1-1".

Για παράδειγμα:

$g(\{1\}) = \frac{1}{2}$

$g(\{2,3,4,\dots\}) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{2}$

Επίσης ορίζουμε $f(\emptyset) = \frac{1}{2}$. ΝΔΟ η f είναι "1-1".

Άσκηση

Θα δείξουμε ότι το $(0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(0,1] \not\approx \mathbb{N}$.

Απόδειξη:

Α' τρόπος: επειδή το $(0,1] \approx P(\mathbb{N})$ και το $P(\mathbb{N}) \not\approx \mathbb{N}$ προκύπτει ότι το $(0,1] \not\approx \mathbb{N}$.

Β' τρόπος: Θα δείξουμε ότι το $(0,1] \gtrsim \mathbb{N}$ και ότι $\mathbb{N} \not\gtrsim (0,1]$.

Θα φτιάξουμε $f: \mathbb{N} \to (0,1]$, 1-1 με $f(n) = \frac{1}{2^n} \in (0,1]$. Η f είναι προφανώς "1-1".

Εις άτοπο απαγωγή: (Για να δείξουμε ότι $\mathbb{N} \not\simeq (0,1]$).
Έστω ότι $\mathbb{N} \simeq (0,1]$. Άρα υπάρχει $f: \mathbb{N} \to (0,1]$ με f "1-1" και "επί".

Σχόλιο: Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(1) = \frac{1}{4}$, διότι ακόμα και αν $f(1) = \alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{4}$, τότε θα μπορούσαμε να αντικατασκευάσουμε την f με την f' που ορίζεται ως εξής:

$$f'(1) = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad f'(f^{-1}(\tfrac{1}{4})) = \alpha.$$

Θα αποδείξουμε ότι η f δεν μπορεί να είναι "επί".
Ορίζουμε κάποιο $x \in (0,1]$ όπου $x = 0, x_1 x_2 \ldots\ldots$, και x_i είναι τα δυαδικά του ψηφία ως εξής:

x_1: αν το πρώτο δυαδικό ψηφίο του $f(1)$ είναι 1 τότε $x_1 = 0$
: αν το πρώτο δυαδικό ψηφίο του $f(1)$ είναι 0 τότε $x_1 = 1$

x_2: αν το δεύτερο δυαδικό ψηφίο του $f(2)$ είναι 1 τότε $x_2 = 0$
: αν το δεύτερο δυαδικό ψηφίο του $f(2)$ είναι 0 τότε $x_2 = 1$

⋮

και γενικά x_n: αν το n-οστό δυαδικό ψηφίο του $f(n)$ είναι 1 τότε $x_n = 0$
: αν το n-οστό δυαδικό ψηφίο του $f(n)$ είναι 0 τότε $x_n = 1$
. . . . . κ.ο.κ

· Μπορεί $x = f(1)$; όχι!
Μπορεί $x = f(2)$; όχι!
Γενικά μπορεί $x = f(n)$? όχι γιατί το n-οστό ψηφίο του x δεν θα είναι ίσο με το n-οστό ψηφίο του $f(n)$.
Άρα η f δεν μπορεί να είναι "επί". Άτοπο.

$\frac{1}{4} = 0.0011111\ldots\ldots$

Σχόλιο: Αφού $f(1) = \frac{1}{4}$ προκύπτει ότι $x_1 = 1$.
Άρα εκ κατασκευής των x_i, $x \neq 0$

Άσκηση: Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο και μάλιστα $\mathbb{R} \simeq (0,1]$.

Απόδειξη

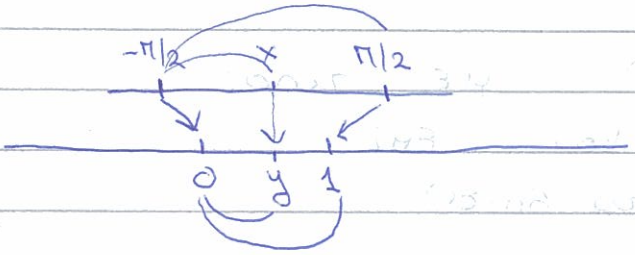
Η $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι "1-1" και "επί"

Άρα $\mathbb{R} \simeq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \simeq (0,1]$.

Όμως από προηγούμενη πρόταση $(0,1]$ απέραντο. Άρα $(0,1] \simeq (0,1] \setminus \{1\} = (0,1)$.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \overset{f}{\simeq} (0,1)$



$$\frac{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{2} = y \cdot \pi \Rightarrow y = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} = f(x).$$

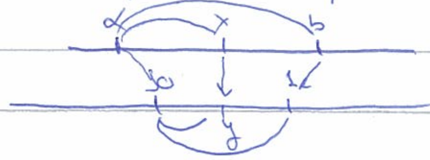
Η f αφού είναι γραμμική είναι "1-1" και "επί"

Άσκηση: Δείξτε ότι $\forall\ \alpha, b \in \mathbb{R}$, $\alpha < b$ το

$(\alpha,b) \simeq (\alpha,b] \simeq [\alpha,b] \simeq [\alpha,b) \simeq (-\infty,\alpha) \simeq (-\infty,\alpha] \simeq (b,+\infty) \simeq [b,+\infty)$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $(\alpha,b) \simeq (0,1)$



$$\frac{x-(+\alpha)}{b-(\alpha)} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow \frac{x-\alpha}{b-\alpha} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \frac{x-\alpha}{b-\alpha}.$$

Η $f(x) = \frac{x-\alpha}{b-\alpha}$ είναι γραμμική άρα "1-1" και "επί".
$f : (\alpha,b) \to (0,1)$.

Άρα τα $[\alpha,b]$, $(\alpha,b]$, $[\alpha,b)$, (α,b) είναι όλα ισοδύναμα με το $(\alpha,b) \simeq (0,1)$.

$(\alpha-1, \alpha) \subset (-\infty, \alpha)$. Άρα $(0,1) \approx (-\infty, \alpha) \subset (-\infty, +\infty) \approx (0,1)$

Άρα τα $(-\infty, \alpha) \approx (0,1)$ από S-B.

Όμοια τα $(-\infty, \alpha]$, $(-\infty, \alpha)$, $(b, +\infty)$, $[b, +\infty)$.

Άλλος τρόπος

- Η συνάρτηση $f: [\alpha, +\infty) \to [0,1)$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x-a}{1+(x-\alpha)}$ είναι "1-1" και "επί". (Άσκηση για το σπίτι).

- Η συνάρτηση $g: (-\infty, \alpha] \to [0,1)$ με τύπο: $g(x) = \dfrac{a-x}{1+x-a}$ είναι "1-1" και "επί" (Άσκηση για το σπίτι).

Η άσκηση διορθώθηκε στο αμέσως επόμενο μάθημα (βλέπετε παρακάτω)

3/06/13

- Το $[\alpha,+\infty) \approx [0,1)$ με $f(x) = \dfrac{x-\alpha}{1+x-\alpha}$

- Το $(-\infty,\alpha] \approx [0,1)$ με $g(x) = \dfrac{\alpha-x}{1+x-\alpha}$! Λάθος

- Το $(-\infty,\alpha] \approx [\alpha,+\infty)$ με $g_1(x) = -x$
Άρα $[-\alpha,+\infty) \approx [0,1)$ με $f_1(x) = \dfrac{x+\alpha}{1+x+\alpha}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = (f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = \dfrac{-x+\alpha}{1-x+\alpha}$ Σωστό

Προτάσεις για την ένωση συνόλων μιας συλλογής:

1) Η ένωση μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής, το πολύ, αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο το πολύ αριθμήσιμο.

2) Η ένωση μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής, αριθμήσιμων συνόλων, είναι σύνολο αριθμήσιμο.

3) Η ένωση μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής, υπεραριθμήσιμων συνόλων είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη:

1) Έστω $A = \{A_i, i \in I\}$ με $I \precsim \mathbb{N}$ και $A_i \precsim \mathbb{N}$
$\cup\{A_i, i\in I\}$ τότε $\cup\{A_i, i \in I\} \precsim \mathbb{N}$.
- Έστω $g: \mathbb{N} \to I$ μια "επί" συνάρτηση. Δηλαδή $\forall i \in I$ $\exists n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $g(n) = i$. Άρα, $\cup\{A_i, i\in I\} = \cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$.
Έστω $f_n : \mathbb{N} \to A_{g(n)}$, f_n "επί" (από την υπόθεση $A_i \precsim \mathbb{N}$).
Θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση $h : \mathbb{N} \to \cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ "επί". Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n = 2^{k-1}(2t-1)$, για κάποια $k, t \in \mathbb{N}$
οπότε $h(n) := f_k(t) \in A_{g(k)} \subseteq \cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$.

$w \in A_{g(k)} \Rightarrow f_k : \mathbb{N} \to A_{g(k)}$.

με $n = 2^{k-1}(2m'-1)$, όπου m' είναι μια οποιαδήποτε προεικόνα του m μέσω της f

Οπότε $h(n) = h(2^{k-1}(2m'-1)) = f_k(m') = m$

Άρα h "επί" του $A_{g(k)}$, άρα h επί και στην $\cup\{A_{g(k)} : k \in \mathbb{N}\}$.

2) Η μόνη αλλαγή που κάναμε στην απόδειξη είναι να πάμε ότι $A_{g(n)} \simeq \mathbb{N}$ και ότι n

Άρα έχουμε δείξει $\cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\} \precsim \mathbb{N}$. Η $\cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ είναι $\supseteq A_{g(1)} \approx \mathbb{N}$.

Άρα από θεώρημα $\underline{B-S} \Rightarrow \cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\} \simeq \mathbb{N}$.

3) $A = \cup\{A_i, i \in I\} = \cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $g : \mathbb{N} \to I$ "επί" συνάρτηση.
$A_{g(n)} \approx \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$\cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\} \approx \mathbb{N}$

Έχουμε ότι $\cup\{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\} \supseteq A_{g(1)} \approx \mathbb{N}$

<u>Σχόλιο</u>: Από την απόδειξη βλέπουμε ότι αρκεί ένα σύνολο της συλλογής A να είναι υπεραριθμήσιμο!

<u>Προτάσεις (για καρτεσιανά γινόμενα)</u>

1) Το καρτεσιανό γινόμενο μιας πεπερασμένης συλλογής το πολύ αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο, το πολύ αριθμήσιμο.

2) Το καρτεσιανό γινόμενο μιας πεπερασμένης συλλογής από αριθμήσιμα σύνολα είναι αριθμήσιμο σύνολο.

3) Το καρτεσιανό γινόμενο μια αριθμήσιμης συλλογής από αριθμήσιμα σύνολα είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και μάλιστα ισοδύναμο με τους πραγματικούς.

4) Το καρτεσιανό γινόμενο μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής από σύνολα που είναι ισοδύναμα με το $\mathbb{R}$ είναι σύνολο $\simeq \mathbb{R}$.

3/06/13

Αποδείξεις

1) Μαθηματική μορφή της πρότασης: $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.
$A_i \approx \mathbb{N}$ και $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \approx \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}$ και γενικά:
$\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times \dots \times\mathbb{N}}_{n\text{-φορές}} \simeq \mathbb{N}$.

Άρα $A_1 \approx \mathbb{N}$
$A_2 \approx \mathbb{N}$
$\vdots$
$A_n \approx \mathbb{N}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \approx \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.

2) $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \simeq \mathbb{N}$.

~~Απ~~

$A_1 \simeq \mathbb{N}$
$A_2 \simeq \mathbb{N}$
$\vdots$
$A_n \simeq \mathbb{N}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \simeq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

3) Μαθηματική έκφραση της πρότασης: $A=\{A_i, i\in\mathbb{N}\}$
$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \simeq \mathbb{R}$; και $A_i \simeq \mathbb{N}$.

~~Απ~~

Έχουμε ότι $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i \simeq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$.

[Σχόλιο: $x\in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \iff x=(n_1, n_2, \dots)$ δηλαδή σαν μια άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών]

$$x \xmapsto{f} \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \dots \in (0,1]$$

Η συνάρτηση f είναι "1-1" από την θεωρία.
Έστω $y\in(0,1]$, οπότε $y=\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_2}}+\frac{1}{2^{m_3}}+\dots$ μη τερματιζόμενη παράσταση.

Οπότε ορίζουμε $x' = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots\ldots$

όπου $n_1 = m_1$, $m_2 = n_1 + n_2 \Rightarrow n_2 = m_2 - n_1 \Rightarrow n_2 = n_1 - m_2$
κ.ο.κ. ......
Οπότε $x = (n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots)$ Άρα η f είναι και "επί"

4) Μαθηματική έκφραση: $A = \{A_i, i \in I\} = \{A_{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ όπου $g : \mathbb{N} \to I$ επί συνάρτηση. Ξέρουμε ότι $A_{g(n)} \simeq \mathbb{R} \overset{\sim}{\alpha} (0,1]$ και θέλουμε να δείξουμε ότι: $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)} \simeq \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει $f_i : (0,1] \to A_{g(i)}$ "1-1" και "επί"

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)} \supseteq A_{g(1)} \times \{f_2(1)\} \times \{f_3(1)\} \times \ldots\ldots \simeq A_{g(1)} \simeq \mathbb{R}$$

Άρα $\mathbb{R} \precsim \prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)}$. Μένει ν.δ.ο. $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)} \precsim (0,1]$

Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $h : \prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)} \to \mathbb{R}$ "1-1".
Έστω $x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_{g(n)}$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots)$ όπου $x_i \in A_{g(i)}$

$$\downarrow$$

$$(f_1^{-1}(x_1), f_2^{-1}(x_2), \ldots\ldots)$$

Έστω ότι
$$\left.\begin{aligned} f_1^{-1}(x_1) &= 0.n_{11}n_{12}\ldots\ldots n_{1k}\ldots\ldots \\ f_2^{-1}(x_2) &= 0.n_{21}n_{22}\ldots\ldots n_{2k}\ldots\ldots \\ f_3^{-1}(x_3) &= 0.n_{31}n_{32}\ldots\ldots n_{3k}\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

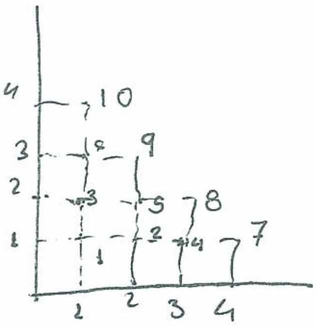
$$\Rightarrow y = \underbrace{0.n_{11}n_{21}n_{12}n_{31}n_{22}n_{13}\ldots\ldots}_{\text{άπειρη παράσταση}} \in (0,1].$$

Άρα "1-1" επειδή $f^{-1}(x_i)$ έχουν μοναδική μη πεπερασμένη δυαδική παράσταση και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση "ΖΙΚ-ΖΑΚ" η οποία είναι "1-1" και "επί", ~~..~~ αντιστοιχίζουμε την ακολουθία $(f_1^{-1}(x_1), f_2^{-1}(x_2), f_3^{-1}(x_3)\ldots\ldots)$ σε μοναδικό y.

Θεωρία Συνόλων
5/6/13

1η ώρα

Συνάρτηση Ζικ-Ζακ



Η συνάρτηση "ΖΙΚ-ΖΑΚ"

$$\text{Τύπος: } f(m,n)=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}+n$$

π.χ

$$f(4,1)=\frac{4\cdot 3}{2}+1=7$$

$$f(3,2)=\frac{4\cdot 3}{2}+2=8.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι είναι "1-1" και "επί", $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Εφαρμογές:

1) Δείξτε ότι $\forall n\geq 1, n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^n\simeq\mathbb{N}$

Λύση:

$\mathbb{Q}\simeq\mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{Q}^n\simeq\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\cdots\times\mathbb{N}}_{n\text{-φορές}}\simeq\mathbb{N}$

2) Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $\mathbb{Q}_n(x)$ με βαθμό $\leq n$ και ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

Λύση:

$\mathbb{Q}_3(x)\ni p(x)=x^3+x^2+x+1$ μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στην 4-άδα των συντελεστών δηλαδή $(1,1,1,1)$

Γενικά: $g: p(x)=r_0+r_1x+r_2x^2+\dots+r_nx^n\to(r_0,r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{Q}^{n+1}$

$g:\mathbb{Q}_n(x)\to\mathbb{Q}^{n+1}$ είναι "1-1" και "επί" άρα $\mathbb{Q}_n(x)\simeq\mathbb{Q}^{n+1}(x)\simeq\mathbb{N}$

3) Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $\mathbb{Q}(x)$ με ρητούς συντελεστές και μιας μεταβλητής (της x) είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Λύση:

$\mathbb{Q}(x)=\bigcup\{\mathbb{Q}_n(x): n\in\mathbb{N}\}$.

Είναι γνωστό ότι μια το πολύ αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

4) Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο σύνολο.

$\boxed{\text{Ορισμός: Ένα } c\in\mathbb{C} \text{ λέγεται αλγεβρικός αριθμός } \Leftrightarrow \exists p(x)\in\mathbb{Q}(x) : p(c)=0}$

π.χ. $c=1+i$, $c^2=(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = \cancel{1}+2i\cancel{-1} = 2i \overset{i=c-1}{=} 2c-2$

$\Rightarrow c^2-2c+2=0$. Άρα το c είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)=x^2-2x+2\in\mathbb{Q}_2(x)$

Λύση:

$c\in$ Αλγεβρικούς $\Leftrightarrow \exists p(x)\in\mathbb{Q}(x) : p(c)=0 \Leftrightarrow c\in\bigcup\{p : p$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)\in\mathbb{Q}(x)\}$

πεπερασμένο σύνολο από ρίζες.

Άρα Αλγεβρικά $\precsim \mathbb{N}$ (1)

Από B-S αρκεί ν.δ.ο $\mathbb{N}\precsim$ Αλγεβρικοί.

($n=5$ είναι ρίζα του $p(x)=x-5$).

Η ταυτοτική συνάρτηση $\mathbb{N}\to$ Αλγεβρικούς είναι η ~~...~~ ζητούμενη "1-1" συνάρτηση.

5) Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $pol(\mathbb{Q})$ με ρητούς συντελεστές και μεταβλητές οποίες θέλουμε είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Λύση:

$Pol_n(\mathbb{Q})$: όλα τα πολυώνυμα με n μονώνυμα ακριβώς

$r = \dfrac{x^2+2xy+z}{5} = \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{2}{5}xy+\dfrac{z}{5}$

$r\in Pol_3(\mathbb{Q})$

Γενικά, $pol(\mathbb{Q}) = \bigcup\{Pol_n(\mathbb{Q}) : n\geq 1\}$

$r \to \left((\tfrac{1}{5},x^2),(\tfrac{2}{5},xy),(\tfrac{1}{5},z)\right) \xrightarrow[z=5]{x\to 2,\ y\to 3} \left((\tfrac{1}{5},2^2),(\tfrac{2}{5},2\cdot 3),(\tfrac{1}{5},5)\right) \to (n_1,n_2,n_3)$

Αντιστοιχούμε κάθε μεταβλητή σε έναν και μοναδικό αριθμό.

Ως γνωστό το $\mathbb{Q}\times\mathbb{N} \simeq \underset{f}{\underline{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} \simeq \mathbb{N}$

Άρα μέσω της $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ έχουμε ότι $f(\tfrac{1}{5},2^2)=n_1\in\mathbb{N}$

~>

$f(\frac{2}{5}, 2\cdot 3) = n_2 \in \mathbb{N}$
$f(\frac{1}{5}, 5) = n_3 \in \mathbb{N}$

Γενικά, Αν $p \in \Pi o\lambda_n(\mathbb{Q})$ τότε $\exists\, g: \Pi o\lambda_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^n$ η οποία είναι "1-1" και επί. Άρα $\Pi o\lambda_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}^n \simeq \mathbb{N}$ οπότε και η $\bigcup\{\Pi o\lambda_n(\mathbb{Q}) : n \geq 1\} \simeq \bigcup\{\mathbb{Q}^n\} \simeq \mathbb{N}$.

2η ώρα

Σχόλιο: Αν $A_i, i\in I$ και $B_i, i\in I$ είναι δύο οικογένειες συνόλων με ξένα ανά δύο σύνολα (δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$ και $B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i\neq j$) και ισχύει ότι $A_i \simeq B_i\ \forall i \in I$ $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \simeq \bigcup_{i\in I} B_i$,

Σχόλιο: Αν A_i ή τα B_i δεν είναι ξένα ανά δύο σύνολα τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε άλλες προτάσεις που μάθαμε για τις ενώσεις (όπως για παράδειγμα η ένωση μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής οποιωνδήποτε αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο)

Ορισμός: Με $P_{\pi\varepsilon\pi}(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο, όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του X.

π.χ $P_{\pi\varepsilon\pi}(\emptyset) = \emptyset$
$P_{\pi\varepsilon\pi}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

Άσκηση: Δείξτε ότι αν X είναι πεπερασμένο τότε ... $P_{\pi\varepsilon\pi}(X) = P(X)$.
Όμοια ν.δ.ο. $P_{\pi\varepsilon\pi}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$ και επίσης $P_{\pi\varepsilon\pi}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Για το $P_{\pi\varepsilon\pi}(X)$ όπου X πεπερασμένο είναι προφανές ότι

$P_{\pi\epsilon\pi}(X) = P(X)$.

. $P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N}) = \{\emptyset\} \cup \{P_i(\mathbb{N}) : i \in \mathbb{N}\}$ όπου $P_i(\mathbb{N})$ = όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ με i-στοιχεία ακριβώς $= \{A \subseteq \mathbb{N} : \operatorname{card} A = i\}$.

$\{n_1, n_2\}$, όπου $n_1 < n_2$

$\downarrow$

$2^{n_1}(2n_2+1)$.

$\{n_1, n_2, n_3\}$, $n_1 < n_2 < n_3$

$\downarrow$

$\{2^{2^{n_1}}(2n_2+1), n_3\}$

$\downarrow$

$2^{2^{n_1}(2n_2+1)}(2n_3+1)$

Γενικά $\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists$ $f_i : P_i(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ "1-1" οπότε το $P_i(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{N}$.

. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{N} \precsim P_i(\mathbb{N})$ με $g : P_i(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ όπου $g(A) = \min A$ είναι "επί" του $\mathbb{N}$. (A είναι ένα σύνολο με i-στοιχεία).

~~πχ~~ Για $y = 5$, Ορίζουμε $A = \{5, 6, \ldots, 4+i\}$, και A έχει ακριβώς i-στοιχεία και $g(A) = y$.

Άρα τελικά, $P_i(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$. Άρα $\bigcup_{i \in I} P_i\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

B' τρόπος:

$P_i(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}^i \simeq \mathbb{N}$ Τέλος.

πχ $\{n_1, n_2, \ldots, n_i\} \in P_i(\mathbb{N})$ με $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_i$

$\{n_1, n_2, \ldots, n_i\} \xrightarrow{\text{"1-1"}} (n_1, n_2, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^i$ ... κτλ

10/06/13 Σε. Θεωρία συνόλων

Άσκηση:

1) Ν.δ.ο $P_i(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}^i \simeq \mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Λύση

Υπενθύμιση: $P_i(\mathbb{N}) = \{X \in \mathbb{N} : card(X) = i\}$.

$X = \{m_1, m_2, \ldots, m_i\}$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι: $m_1 < m_2 < \cdots < m_i$.

$$X \xmapsto{g} (m_1, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \ldots, m_i - m_{i-1}) \in \mathbb{N}^i$$

"1-1": $X' \xmapsto{g} (m_1, m_2 - m_1, \cdots, m_i - m_{i-1})$

"Επί": Έστω $Y = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i) \in \mathbb{N}^i$

Τότε $X = \{n_1, n_2 + n_1, n_2 + n_3 + n_1, \ldots\ldots m_i\}$ (προεικόνα του Y).

$\left.\begin{matrix} m_1 = n_1 \\ m_2 - m_1 = n_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $m_2 - n_1 = n_2 \Rightarrow m_2 = n_2 + n_1$

$m_3 - m_2 = n_3 \Rightarrow m_3 - n_2 - n_1 = n_3 \Rightarrow m_3 = n_3 + n_2 + n_1$

Άρα η g είναι "επί".

Άσκηση 2 Δείξτε ότι $P_i(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

Λύση

$$X \xrightarrow{g} (m_1, m_2 - m_1, \cdots, m_i - m_{i-1}) \in \mathbb{R}^i$$

όμοια με την προηγούμενη αποδεικνύουμε ότι η g είναι "1-1" και "επί". Άρα $P_i(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

Άσκηση 3 Δείξτε ότι $P_{\pi\varepsilon\pi}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

Λύση

$P_{\pi\varepsilon\pi}(\mathbb{R}) = \left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} P_n(\mathbb{R})\right) \cup \{\emptyset\}$

Γνωρίζουμε ότι $P_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \simeq [n-1, n)$

Ακόμα, γνωρίζουμε ότι $\dot{\bigcup}_{i \in S} A_i \simeq \dot{\bigcup}_{i \in S} B_i$ εάν ισχύει ότι $A_i \simeq B_i \ \forall i$.

Άρα $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} P_n(\mathbb{R}) \simeq \left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} [n-1,n)\right) = [0,+\infty) \simeq \mathbb{R}$.

Άρα $P_{\pi\varepsilon\pi}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}\,\dot{\cup}\,\{\emptyset\} \simeq \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $\mathbb{R}\,\dot{\cup}\,\{\emptyset\}\simeq\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \overset{g}{\simeq} (0,1)$

$f: \mathbb{R}\,\dot{\cup}\,\{\emptyset\} \longrightarrow [0,1)$

$$\begin{cases} f(x)=g(x), & x\in\mathbb{R} \\ f(\emptyset)=0 \end{cases}$$

Η f είναι "1-1" και "επί"

Άρα αφού $[0,1)\simeq\mathbb{R}$ το αποδείξαμε.

Άσκηση 4 Να βρεθεί ένα σύνολο $A \simeq \mathbb{Q}\cap(0,1]$.

Λύση

(Το A θα είναι ένα από τα γνωστά μας σύνολα).

$x\in\mathbb{Q}\cap(0,1]$ ανν $x=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ και $p\leq q$

Ανν $x=1$ είτε $x=\frac{p}{q}$ με $q>p$

• Αν $0<x<1$, $x\in\mathbb{Q}$ τότε $x \mapsto \{p,q\}\in P_2(\mathbb{N})$.

Άρα φτιάχνουμε την συνάρτηση: $F:\{1\}\,\dot{\cup}\,(\mathbb{Q}\cap(0,1)) \longrightarrow \{1\}\,\dot{\cup}\,P_2(\mathbb{N})$ με

$$\begin{cases} F(1)=1 \\ F(x)=\{p,q\} & \text{για } x=\frac{p}{q}<1 \end{cases}$$

Η F είναι "1-1"

Άρα $\mathbb{Q}\cap(0,1] \simeq \{1\}\,\dot{\cup}\,P_2(\mathbb{N}) \simeq \{1\}\,\dot{\cup}\,\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$.

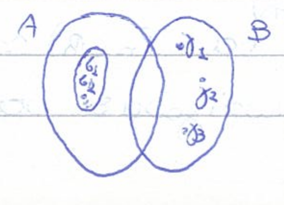
Γνωρίζουμε ότι η ένωση ενός απείρου συνόλου A με ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο B ισούται με το A, δηλαδή: $A\cup B\simeq A$.

Απ

$A \gtrsim \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει $f:\mathbb{N}\to A$, "1-1". Έστω $B_1=f(\mathbb{N}) = \{b_1, b_2, \ldots\ldots\}$

Έστω $B\setminus A = \{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\}$.

$\gamma_1 \overset{g}{\longrightarrow} b_1\in A$, $\gamma_2 \overset{g}{\longrightarrow} b_2\in A \cdots \gamma_k \overset{g}{\longrightarrow} b_k\in A$.



$b_1 \xrightarrow{g} b_{k+1}, \quad b_2 \xrightarrow{g} b_{k+2}, \quad \ldots\ldots$

$a \neq b_i \xrightarrow{g} a \quad \forall i$

Η συνάρτηση g είναι: $g: A \cup B \to A$ "επί".

Θα δείξουμε ότι η g είναι "1-1"

Έστω $g(x_1) = g(x_2)$ τότε:

1η περίπτωση: $x_1 \in B \setminus A$, $x_2 \in B \setminus A \Rightarrow g(x_1) = b_i$
$g(x_2) = b_i$,

για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, k$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \gamma_i$ είναι "1-1".

2η περίπτωση: $x_1 \in B \setminus A$, $x_2 \in B_1$

$g(x_1) = b_i$, για κάποιο $i = 1, \ldots, k$

$g(x_2) = b_j$, για κάποιο $j > k$.

Δεν γίνεται διότι η f είναι "1-1" και άρα για $i \neq j$ έχουμε ότι $b_i \neq b_j$.

3η περίπτωση: $x_1 \in B \setminus A$, $x_2 \in A \setminus B_1$

Τότε $g(x_1) = b_i$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k$

$g(x_2) = x_2 \in A \setminus B_1$

Άρα αυτή η περίπτωση δεν γίνεται γιατί $b_i \in B_1$, $x_2 \notin B_1$

• Όμοια δουλεύουμε και στις υπόλοιπες περιπτώσεις

Άρα g είναι "1-1" και $A \cup B \simeq A$.

Άσκηση 5 Έστω $B \neq \emptyset$. Τότε δείξτε ότι: $\{0,1\}^B \simeq P(B)$.

Λύση

Έστω $f \in \{0,1\}^B$ ανν $f: B \to \{0,1\}$.

$f^{-1}[0] \to 0$, $1 \to f^{-1}[1]$, $B \xrightarrow{g} f^{-1}[1] \subseteq B$

Δηλαδή $g(f) = f^{-1}[1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι "1-1" και "επί".

"1-1": $g(f_1) = g(f_2) \Rightarrow f_1^{-1}[1] = f_2^{-1}[1]$. Άρα $\forall b \in B$ έχουμε

$f_1(b) = 1$ ανν $b \in f_1^{-1}[1]$ ανν $b \in f_2^{-1}[1] \Leftrightarrow f_2(b) = 1 \Leftrightarrow$

$f_1 = f_2$. Άρα "1-1"

"Επί":

Έστω $B_1 \in P(B)$. Ψάχνουμε να βρούμε μια συνάρτηση $f: B \to \{0,1\}$ με $g(B) = B_1 \iff f^{-1}[1] = B_1 \iff$
$\boxed{b \in B_1 \iff f(b) = 1}$

Ορίζουμε την f ως εξής:

- Αν $b \in B_1$ τότε $f(b) = 1$
- Αν $b \notin B_1$ τότε $f(b) = 0$

Οπότε, πράγματι $f^{-1}[1] = B_1$ και άρα η g είναι "επί".

Εφαρμογή: Συγκρίνετε ως προς την ισχύ τα σύνολα $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq P(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$.
$f \in \mathbb{N}^{\{0,1\}} \iff f: \{0,1\} \to \mathbb{N} \iff f = (f(0), f(1)) \in \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$.
$\mathbb{R}$ μεγαλύτερη ισχύ του $\mathbb{N}$.

1η ώρα Ι

12/06/13 Σε. Θεωρία Συνόλων

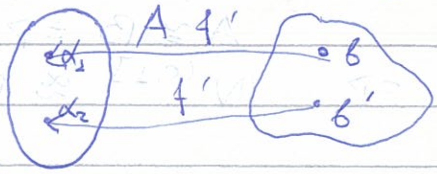
Πρόταση

Αν $B \neq \emptyset$ τότε $\{0,1\}^B \approx P(B)$

Άσκηση 1: Αν $A \succeq \{0,1\}$ (δηλαδή αν το A έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία) και $B \neq \emptyset$ τότε $A^B \succ B$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση ως εξής:
Θα δείξουμε κατ' αρχήν $A^B \succeq \{0,1\}^B \approx P(B) \succ B$.
Υπάρχουν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ και $\alpha_i \in A$



Θα φτιάξουμε μια συνάρτηση $g:\{0,1\}^B \to A^B$ η οποία θα είναι "1-1"
$f \in \{0,1\}^B$, δηλαδή $f: B \to \{0,1\} \xrightarrow{g} f': B \to A$
$f'(b) = \alpha_1$ ανν $f(b) = 0$
και $f'(b) = \alpha_2$ ανν $f(b) = 1$
Η g είναι "1-1"
$g(f_1) = g(f_2)$ όπου $f_i: B \to \{0,1\}$
Άρα για τυχαίο $b \in B$ έχουμε ότι: $g(f_1(b)) = \alpha_1 \iff f_1(b) = 0$
$g(f_1)(b) = g(f_2)(b) = \alpha_1 \iff f_2(b) = 0$
δηλαδή $f_1(b) = 0 = f_2(b)$

Σχόλιο: Αν έχουμε $g(f_1)(b) = a_2$ δουλεύουμε όμοια.
Γενικά, $f_1(b) = f_2(b)$ δηλαδή $f_1 = f_2$.

Άσκηση 2 Συγκρίνετε ως προς την ισχύ τους τα παρακάτω σύνολα: $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}^{\{0,1\}}$ $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$ $(0,1)^{\mathbb{N}}$
Η προηγούμενη πρόταση έλεγε ότι: $\{0,1\}^B \approx P(B)$ και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε.

Λύση

- $\{0,1\}^{\mathbb{R}} \simeq P(\mathbb{R})$ (από πρόταση).
- $\mathbb{R}^{\{0,1\}} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $(\simeq \mathbb{R})$

Σχόλιο: $f: \{0,1\} \to \mathbb{R} \xleftrightarrow[g]{} (f(0), f(1)) \in \mathbb{R}^2$
Η g είναι "1-1" και "επί" συνάρτηση.

- $\mathbb{N}^{(0,1]} = \{f: (0,1] \to \mathbb{N}\}$
  $f: (0,1] \to \mathbb{N} \Rightarrow f \subseteq (0,1]\times\mathbb{N} \Rightarrow f \in P((0,1]\times\mathbb{N})$
  Άρα $\mathbb{N}^{(0,1]} \subseteq P((0,1]\times\mathbb{N})$.

Τι ξέρουμε: $\left.\begin{array}{l}(0,1]\times\mathbb{N} \simeq (0,1] \\ A \simeq B \Rightarrow P(A) \simeq P(B)\end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{N}^{(0,1]} \lessapprox P((0,1]\times\mathbb{N}) \simeq P((0,1]) \simeq P(\mathbb{R})$.

Άρα μας μένει να μελετήσουμε αν ισχύει και η σχέση $P(\mathbb{R}) \lessapprox \mathbb{N}^{(0,1]}$.
Από γνωστή πρόταση έχουμε ότι: $A^B \gtrapprox \{0,1\}^B \Rightarrow$
$\mathbb{N}^{(0,1]} \gtrapprox \{0,1\}^{(0,1]} \simeq P((0,1]) \simeq P(\mathbb{R})$
Άρα τελικά από S-B $\mathbb{N}^{(0,1]} \simeq P(\mathbb{R})$
(Στην πρόταση χρησιμοποιήσαμε ότι $A=\mathbb{N}$ και $B=(0,1]$)

- $(0,1)^{\mathbb{N}} = (0,1)\times(0,1)\times\ldots$ (αριθμήσιμες φορές).
  έχουμε πει στα καρτεσιανά γινόμενα, ότι το καρτεσιανό γινόμενο μιας το πολύ αριθμήσιμης συλλογής από σύνολα A_i που είναι ισοδύναμα με το $\mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο ισοδύναμο με το $\mathbb{R}$.
  Άρα $(0,1)^{\mathbb{N}} = (0,1)\times(0,1)\times\ldots \simeq (0,1) \simeq \mathbb{R}$.

Τελικά, η απάντησή μας είναι:
$\{0,1\}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{N}^{(0,1]}$
όμως $\mathbb{R}^{\{0,1\}} \cong (0,1)^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$, δηλαδή έχουν μικρότερη ισχύ από τα δύο προηγούμενα.

• $(0,1] \times \mathbb{N} = (0,1] \times \left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \left(\underbrace{(0,1) \times \{n\}}_{\simeq \mathbb{R}}\right)$

$\pi\chi\ (0,1] \times \{3\} \simeq (0,1]$

προφανώς $(r,3) \leftrightarrow r$, "1-1" και "επί". $\Big) \simeq \mathbb{R}$

Άσκηση 3 Δείξτε ότι αν $A \approx B$ τότε $P(A) \approx P(B)$.

Απόδειξη

Έστω $f: A \to B$, f "1-1" συνάρτηση

Θέλουμε να κατασκευάσουμε $f' : P(A) \to P(B)$ και η f' να είναι "1-1".

Έχουμε ότι $A_1 \subseteq A$

Τότε $f'(A_1) = f[A_1] \subseteq B$.

Είναι η f' "1-1";

$f'(A_1) = f'(A_1^*) \Rightarrow f[A_1] = f[A_1^*] \xRightarrow{f \text{ είναι "1-1"}}$

$A_1 = A_1^*$. Άρα η f' είναι "1-1".

Άσκηση 4 Δείξτε ότι Άρρητοι $\simeq \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $A = \mathbb{R} \gg \mathbb{N}$.

Άρα $\forall$ $B \approx A$ με $B \cong \mathbb{N}$ ισχύει $A \setminus B \simeq A$

Άρα για $B = \mathbb{Q} \Rightarrow A \setminus B =$ Άρρητοι.

Άρα Άρρητοι $\simeq \mathbb{R}$.

Άσκηση 5 Βρείτε την ισχύ του συνόλου $\mathbb{C}$.

Λύση

$\alpha + i b \in \mathbb{C} \xmapsto{g} (\alpha, b) \in \mathbb{R}^2$. Η g είναι "1-1" και "επί" και άρα $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}$.

Νδο "1-1" και "επί".

Άσκηση 6 Δείξτε ότι $\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ με $r_1 < r_2$ υπάρχει ένας άρρητος q με $r_1 < q < r_2$

Απόδειξη

Εις άτοπον απαγωγή:

Αν δεν υπάρχουν άρρητοι ενδιάμεσα τότε προφανώς $(r_1, r_2) \subseteq \mathbb{Q}$

όμως $(r_1, r_2) \simeq \mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$

Άρα $\mathbb{R} \simeq (r_1, r_2) \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$ άτοπο

Άσκηση 7 Δείξτε ότι $\forall\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ με $r_1 < r_2$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < q < r_2$

Απόδειξη

~~Όπως ξέραμε $(r_1, r_2) \overset{g}{\simeq} (0,1)$ όπου $g : (r_1, r_2) \to (0,1)$ "1-1" και "επί"~~

~~? Η αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1}(\frac{1}{2})$ είναι ρητός αριθμός ?~~

ΛΑΘΟΣ ΞΕΚΙΝΗΜΑ!! Η ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΠΑΡΑΚΑΤΩ!

~~$\frac{x - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \frac{x - r_1}{r_2 - r_1}$~~

$r_1 < r_2$

1η περίπτωση: $r_2 > r_1 > 0$

2η περίπτωση: $r_1 < 0 < r_2 \Rightarrow q = 0$ q=0

3η περίπτωση: $r_1 < r_2 < 0$ είναι όμοια με την πρώτη.

1η περίπτωση

$r_2 > r_1 > 0 \Rightarrow r_1 = [r_1] + 0.r_{11} r_{12} \ldots$

$r_2 = [r_2] + 0.r_{21} r_{22} \ldots$

- Αν $[r_1] < [r_2] \Rightarrow r_1 < [r_2] < r_2$. Άρα q=[r2]
- Αν $[r_1] = [r_2]$ τότε $0.r_{11} r_{12} r_{13} \ldots < 0.r_{21} r_{22} r_{23} \ldots$

και άρα αναγκαστικά υπάρχει κάποιο j

$r_{1j} < r_{2j} \Rightarrow$ δηλαδή $r_{1j} = 0,\ r_{2j} = 1$

2η ώρα
III

οπότε αν πάρουμε $q = [r_1] + 0.r_{21}r_{22}\dots r_{2j} =$
$= [r_1] + \frac{r_{21}}{2} + \dots + \frac{r_{2j}}{2}$
Έχουμε σίγουρα ότι $r_1 < q$ και $q < [r_1] + 0.r_{21}\dots r_{2j} = r_2$

Σχόλιο: Οι δυαδικές μη τερματιζόμενες παραστάσεις των $\mathbb{R}$ αριθμών είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο
π.χ. $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$

Λύση $x \in (0,1] = 0.r_{11}r_{12}r_{13}r_{14}\dots$
$y \in (0,1] = 0.r_{21}r_{22}r_{23}r_{24}\dots$

Η g είναι 1-1

$g:(x,y) \longrightarrow z = 0.r_{11}r_{21}r_{12}r_{22}r_{13}r_{23}\dots \in (0,1]$
και άρα $\mathbb{R}^2 \precsim \mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2 \succsim \mathbb{R}\times\{1\} \cong \mathbb{R}$
Άρα από S-B $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$.

Άσκηση 8: Έστω $A_i \precsim B_i$, $i \in I$ τότε και $\prod_{i\in I} A_i \precsim \prod_{i\in I} B_i$.

Άσκηση 9: Δείξτε ότι αν $A_i \precsim B_i$, για $i \in I \neq \emptyset$ και τα B_i είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους τότε και τα $\bigcup_{i\in I} A_i \precsim \dot{\bigcup_{i\in I}} B_i$.

Απόδειξη

Αρκεί να φτιάξουμε $g : \dot{\bigcup_{i\in I}} B_i \xrightarrow{\text{"επί"}} \bigcup_{i\in I} A_i$.

Ορισμός: $b \in \dot{\bigcup_{i\in I}} B_i$ άρα υπάρχει μοναδικό $i_0 \in I$ έτσι ώστε $b \in B_{i_0} \succsim A_{i_0}$ άρα υπάρχει μια
$g_{i_0} : B_{i_0} \longrightarrow A_{i_0}$, g_{i_0} επί

Άρα μπορούμε να στείλουμε το b $g_{i_0}(b) \in \bigcup_{i\in I} A_i$
$b \longrightarrow g_{i_0}(b)$ όπου $i_0 =$ ο μοναδικός δείκτης : $b \in B_{i_0}$.
• Νδο η g είναι "επί".

Άσκηση 10 Δείξτε ότι αν $A_i \approx B_i$ τότε δεν έπεται ότι $\bigcup_{i\in I} A_i \approx \bigcup_{i \in I} B_i$!!!

Λύση

Αντιπαράδειγμα: $A_i = \{i\}$, $B_i = \{1,2\}$

$I = \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{N} \not\approx \bigcup_{i\in I} B_i = \{1,2\}$!!!

Άσκηση 11 $A_i = (-i, i)$, $i \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί η ισχύ των $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Λύση

$A_i \simeq [i, i+1)$

Άρα $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \approx \dot{\bigcup} [i, i+1) = [1, +\infty) \simeq \mathbb{R}$

Άρα

$\mathbb{R} \simeq (-1,1) \approx \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \approx \mathbb{R}$

$\stackrel{S.B}{\Rightarrow}$ θεώρημα $\bigcup A_i \simeq \mathbb{R}$

Άσκηση 12: Δείξτε ότι αν $r_1 < r_2$ δύο πραγματικοί, τότε υπάρχει $r_1 < q < r_2$ ο οποίος είναι μη αλγεβρικός αριθμός

Απόδειξη

Εις άτοπον απαγωγή

Αν δεν υπήρχαν τότε θα ήταν όλοι αλγεβρικοί άρα $(r_1, r_2) \simeq \mathbb{N}$ άτοπο, αφού $(r_1, r_2) \simeq \mathbb{R}$.

Άσκηση 13 Έστω A, B, Γ τρία πεπερασμένα σύνολα τότε

$\mathrm{card}(A\cup B\cup\Gamma) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(\Gamma) + \mathrm{card}(A\cap B\cap\Gamma) - \mathrm{card}(A\cap B) - \mathrm{card}(A\cap\Gamma) - \mathrm{card}(B\cap\Gamma)$

Λύση

$\mathrm{card}(A_1 \dot\cup B_1) = \mathrm{card}\,A_1 + \mathrm{card}\,B_1 - \mathrm{card}(A_1\cap B_1)$

Θέτουμε $A_1 = A\cup B$ και $B_1 = \Gamma$ και κάνοντας τις αντικαταστάσεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα.

Άσκηση: 14 Αν $A \subseteq B$, A, B πεπερασμένα και $card A \geq card B$ $\Rightarrow A = B$.

Λύση

Αφού $A \subseteq B \Rightarrow card A = card B$ (1).

Εις άτοπο απαγωγή

Αν $A \subset B \Rightarrow card A < card B$ (άτοπο από υπόθεση)

Άρα $A = B$.

Άσκηση: 15: Σε ένα σχολείο που έχει $\boxed{450}$ μαθητές, οι 50 παίζουν μπάσκετ (Μ), οι 250 παίζουν ποδόσφαιρο (Π), ενώ 190 δεν παίζουν ούτε (Μ) ούτε (Π). Να βρεθεί πόσοι μαθητές παίζουν και (Μ) και (Π).

Λύση

$card(M) = 50$

$card(\Pi) = 250$

$card(M \setminus \Pi) = 190$

$card(M \cap \Pi) = ;$

$card(M \cup \Pi) = card(M) + card(\Pi) - card(M \cap \Pi) \Rightarrow$

$card(M \cap \Pi) = card(M) + card(\Pi) - card(M \cup \Pi) \Rightarrow$

$card(M \setminus \Pi) = card(M \cup \Pi) - card(\Pi) \Rightarrow$

$card(M \cup \Pi) = card(M \setminus \Pi) + card(\Pi) = 190 + 250$

$card(\Sigma \setminus (M \cup \Pi)) = 190$

, $card \Sigma - 190 = 260 = card(M \cup \Pi)$.

Άσκηση: 16 Αν A, B πεπ. σύνολα να αποδειχθεί ότι:

$2 card(A \cap B) = card A + card B \Leftrightarrow A = B$.

Άσκηση: 17: Αν A, B πεπ. σύνολα και Γ, Δ υποσύνολα των A, B αντίστοιχα με $card \Gamma = card \Delta$ τότε $A \cong B \Rightarrow$

$A \setminus \Gamma \cong B - \Delta$. Ισχύει η αντίστροφη κατεύθυνση;