18/2/13

Η έννοια του συνόλου

Ορισμός

Σύνολο είναι η απλούστερη έννοια στα μαθηματικά βάσει της οποίας μπορεί να οριστεί οποιαδήποτε έννοια στα μαθηματικά και η οποία δεν μπορεί να οριστεί από άλλες απλούστερες έννοιες.

Στα πλαίσια του μαθήματος Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων σύνολο είναι μια συλλογή καλά καθορισμένων αντικειμένων τα οποία θα τα λέμε στοιχεία του συνόλου. Τα σύνολα θα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα της Ελληνικής ή της Λατινικής αλφαβήτου και τα στοιχεία της με μικρά. Με $\in$ θα συμβολίζουμε την σχέση του ανήκει και $\notin$ θα συμβολίζουμε την άρνηση της έκφρασης $\in$.

Αν A, B είναι δυο σύνολα τότε λέμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B και γράφουμε $A \subseteq B$ αν κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B. Δηλαδή κάθε στοιχείο x, $x \in A \Rightarrow x \in B$

Λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα και γράφουμε $A = B$ αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αν δηλαδή $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Αν $A \subseteq B$ τότε λέμε ότι το B είναι υπερσύνολο του A και γράφουμε $B \supseteq A$. Δηλαδή $A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ ($A \neq B$ συμβολίζουμε την άρνηση του $A = B$) τότε λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και γράφουμε $A \subset B$ επίσης λέμε ότι το B είναι γνήσιο υπερσύνολο του A και γράφουμε $B \supset A$

Το σύνολο $P(A)$ όλων των υποσυνόλων του A λέγεται δυναμοσύνολο του A

Ιδιότητες της σχέσης $\subseteq$

1. Για κάθε σύνολο A, $A \subseteq A$ (ανακλαστική ιδιότητα)
2. Για κάθε σύνολο A, B αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$ (αντισυμμετρική ιδ.)
3. Για κάθε σύνολο A, B, Γ αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

Το σύνολο το οποίο δεν έχει καθόλου στοιχεία λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$. Δεχόμαστε ότι το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου A. Δηλαδή για κάθε σύνολο A, $\emptyset \subseteq A$

Ένα σύνολο A το αναπαριστούμε με αναγραφή των στοιχείων του σε δυο αγκίστρια. Αν δηλαδή το σύνολο A έχει στοιχεία τα $0, 1, 2, 3, 4$ τότε $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ο τρόπος αυτός αναπαράστασης συνόλων λέγεται αναπαράσταση με αναγραφή των στοιχείων του. Είναι προφανές ότι ο τρόπος αυτός είναι εύχρηστος όταν το πλήθος των στοιχείων είναι μικρό. Το $\emptyset$ το αναπαριστούμε σαν $\emptyset = \{\ \}$.

Παραδείγματα:

1) Έστω $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, 1, 2, 3\}$, $\Gamma = \{2, 3\}$, $\Delta = \{a, 0, 3, 4\}$
Παρατηρούμε ότι το $B \subseteq A$, $\Gamma \subseteq A$, $\Delta \not\subseteq A$, $\Gamma \subseteq B$, $\Delta \not\subseteq B$, $\Delta \not\subseteq \Gamma$

2) Η έκφραση $\emptyset \in \emptyset$ είναι ψευδής γιατί $\emptyset = \{\ \}$ και $\emptyset \notin \{\ \}$ ενώ η έκφραση, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ είναι αληθής

3) Αν $a \in A \iff \{a\} \subseteq A$ είναι αληθής πρόταση

το 0 δεν το βλέπουμε στο Γ
το {0} είναι το μονοσύνολο 0

4) Έστω $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$. $\{0, 1\} \overset{B \in \Gamma}{\not\subseteq} \{\{0\}, \{0, 1\}\}$. Επειδή $0 \in \{0, 1\}$ και $0 \notin \{\{0\}, \{0, 1\}\}$ έχουμε ότι $B \not\subseteq \Gamma$, $A \subseteq B$, $A \not\subseteq \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$

Προτάσεις και Προτασιακοί Τύποι

Ορισμός

• Μια έκφραση p η οποία παίρνει τιμή αλήθειας είτε αληθής είτε ψευδής λέγεται **λογική πρόταση** ή απλά πρόταση

π.χ

$p \equiv 2^2 = 1$, $q \equiv 3 < 7$, $w \equiv 1+1=3$ είναι παραδείγματα προτάσεων

Η έκφραση p = "Ο αριθμός x διαιρεί το 5" δεν είναι πρόταση. διότι για $x = 1$, "ο 1 διαιρεί το 5" είναι αληθής ενώ ο "2 διαιρεί το 5" είναι ψευδής

• Εκφράσεις οι οποίες περιέχουν μια μεταβλητή και οι οποίες γίνονται λογικές προτάσεις όταν αντικαταστήσουμε την μεταβλητή με μια τιμή από ένα σύνολο Ω λέγονται **προτασιακοί τύποι**. Το σύνολο Ω λέγεται σύνολο αναφοράς του προτασιακού τύπου. Τους προτασιακούς τύπους τους συμβολίζουμε $p(x), q(x), r(x)$,

π.χ

$p(x) \equiv$ "ο φυσικός αριθμός x διαιρεί το 5" είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ ενώ $q(x) \equiv$ "ο πραγματικός αριθμός x είναι ≤ απ" είναι προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$

• Ένας προτασιακός τύπος δεν γίνεται πρόταση αντικαθιστώντας την μεταβλητή με μια τιμή από το σύνολο αναφοράς του. Γίνεται πρόταση αν προσθέσουμε μια κατάλληλη έκφραση στην αρχή του.

π.χ

αν $p(x) \equiv$ "ο φυσικός αριθμός x διαιρεί το 5" τότε αν προσθέσουμε την έκφραση "υπάρχει φυσικός x" στην αρχή του $p(x)$ δηλαδή "υπάρχει φυσικός x έτσι ώστε ο x να διαιρεί το 5" είναι λογική πρόταση.

Επίσης θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την έκφραση "για κάθε φυσικό αριθμό x" και να πάρουμε την πρόταση "για κάθε φυσικό αριθμό x, ο x διαιρεί το 5" γίνεται λογική πρόταση.

Την έκφραση "υπάρχει φυσικός x" την συμβολίζουμε με $\exists x \in \mathbb{N}$

• Γενικά αν $p(x)$ είναι ένας προτασιακός τύπος. Τότε $\exists x \in \Omega, p(x)$ ή πιο απλά $\exists x p(x)$ συμβολίζει την πρόταση "υπάρχει 1 τουλ. $x \in \Omega$ έτσι ώστε $P(x)$ αληθής"
Παρόμοια $\forall x \in \Omega, P(x)$ ή απλά, $\forall x p(x)$, συμβολίζει την πρόταση "Για καθε $x \in \Omega$, $p(x)$ είναι αληθής".
Το σύμβολο $\exists$ λέγεται υπαρξιακός ποσοδείκτης ενώ το σύμβολο $\forall$ λέγεται καθολικός ποσοδείκτης.
Αν p είναι μια πρόταση τότε με $\neg p$ συμβολίζουμε την άρνηση της πρότασης p. Η άρνηση της πρότασης $\exists x p(x)$ είναι η πρόταση, "Για καθε $x \in \Omega$, $\neg p(x)$"
Δηλαδή $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ και η άρνηση $\forall x p(x)$ είναι η πρόταση $\exists x \neg p(x)$, δηλαδή $\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$

• Έστω $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το Ω. Το σύνολο όλων των $x \in \Omega$ έτσι ώστε $p(x)$ είναι αληθής λέγεται σύνολο αλήθειας της $p(x)$. Αν λοιπόν A είναι το σύνολο των τιμών αληθείας της $p(x)$ τότε $A = \{x \in \Omega : p(x) \text{ είναι αληθής}\}$. Η τελευταία αναπαράσταση του συνόλου A λέγεται αναπαράσταση του A με περιγραφή των στοιχείων του.
π.χ
Αν $p(x) \equiv$ "ο πραγματικός x είναι μικρότερος του 1 και μεγαλύτερος του 0" έχει για σύνολο αλήθειας το διάστημα $(0,1)$, δηλαδή $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \text{ αληθής}\}$

• Έστω p, q, r τρεις προτάσεις. Με βάση τις προτάσεις αυτές κατασκευάζουμε νέες προτάσεις ως εξής:
$p \wedge q \equiv$ "p και q" λέγεται σύζευξη, $p \vee q \equiv$ "p ή q" διάζευξη
$p \to q \equiv$ "αν p είναι αληθής τότε q αληθής" συνεπαγωγή
$\neg p \equiv$ "όχι p", $p \leftrightarrow q \equiv$ "p αν r" $\equiv$ "$(p \to q) \wedge (q \to p)$" ισοδυναμία

p	q	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1 (η υπόθεση είναι ψευδής, άρα το συμπέρασμα είναι αληθές)	1	0
0	0	0	1	0	1

1: αληθής, 0: ψευδής

Πίνακας Αληθείας

Πραξεις Συνολων

1) **Τομη συνολων**: Εστω A, B δυο συνολα. Το συνολο ολων των κοινων στοιχειων του συνολου A και B και μονον αυτο λεγεται τομη των συνολων A και B και συμβολιζομε με $A \cap B$. Δηλαδη $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Δηλαδη $A \cap B$ είναι το συνολο των τιμων αληθειας του προτασιακού τυπου $p(x) = x \in A \wedge x \in B$

Προταση:
Εστω A, B, Γ τρια συνολα τοτε:
(1) $A \cap A = A$
(2) $A \cap B = B \cap A$ (η τομη είναι αντιμεταθετικη)
(3) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ (η τομη ικανοποιει την προσεταιριστική ιδιοτητα)
(4) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
(5) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$

Αποδειξη: 20/2/13

(1) Είναι γνωστο οτι αν p είναι μια λογική πρόταση τοτε οι προτασεις p και $p \wedge p$ είναι ταυτολογικα ισοδυναμες. Δηλαδη παιρνουν τις ίδιες τιμές αληθειας. Εχουμε $x \in A \cap A \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in A}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$

p	$p \wedge p$
1	1
0	0

Επομενως $A \cap A = A$

(2) Είναι γνωστο οτι αν p, q είναι δυο προτασεις τοτε οι προτασεις $p \wedge q$ και $q \wedge p$ είναι ταυτολογικά ισοδυναμες. Δηλαδη η συζευξη ικανοποιει την αντιμεταθετική ιδιοτητα. Εχουμε $x \in A \cap B \Leftrightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q} \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$
Αρα $A \cap B = B \cap A$ και η τομη ικανοποιει την αντιμεταθετική ιδιοτητα

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

(3) Είναι γνωστο οτι αν p, q, r είναι 3 προτασεις, τοτε οι προτασεις $p \wedge (q \wedge r)$ και $(p \wedge q) \wedge r$ είναι ταυτολογικα ισοδυναμες. Επομενως η συζευξη ικανοποιει την προσεταιριστική ιδιοτητα.

p	q	r	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Εχουμε $x \in A \cap (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in \Gamma$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap \Gamma$. Αρα $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ και η

→

τομή ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.
(4) Απο την (5) εχουμε οτι $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$. Επειδη το $\emptyset$ είναι υποσυνολο οποιουδηποτε συνολου, εχουμε οτι $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$. Αρα, $A \cap \emptyset = \emptyset$
(5) Είναι γνωστο οτι αν p, q είναι 2 προτάσεις τότε η σύνθετη πρόταση $p \wedge q \to p$ είναι ταυτολογια δηλαδη παιρνει παντα την τιμη αληθειας αληθες, οποιαδηποτε τιμη και αν παιρνουν οι προτασεις p και q.

p	q	$(p \wedge q) \to p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Επομενως αν $p \equiv x \in A$ και $q \equiv x \in B$ τοτε $x \in A \wedge x \in B \to x \in A$ είναι πάντα αληθης. Αρα $x \in A \cap B \to x \in A$
Επομένως, $A \cap B \subseteq A$.
Παρομοια, αποδεικνυεται και οτι $A \cap B \subseteq B$

Ορισμος:
Εστω A, B δυο συνολα. Το σύνολο των τιμων αληθειας του προτασιακού τυπου $p \equiv x \in A \vee x \in B$ λέγεται ενωση των συνόλων A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$. Δηλαδη $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Επομένως η ενωση των συνολων A και B είναι το σύνολο το οποιο εχει για στοιχεία, ολα τα στοιχεια του A, ολα τα στοιχεια του B και μονο αυτα.

Πρόταση:
Εστω A, B, Γ τρια σύνολα τοτε θα ισχυουν τα παρακατω:
(1) $A \cup A = A$
(2) $A \cup B = B \cup A$
(3) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
(4) $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
(5) $A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$

Αποδειξη:
Εστω p, q, r τρεις προτασεις αποδεικνυεται με πινακες αληθειας, ακριβως οπως στην προηγουμενη πρόταση. Η διαζευξη ικανοποιει την αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιοτητα.

Διαφορά συνόλων

Έστω A, B δύο σύνολα. Το σύνολο των τιμών αλήθεια του προτασιακού τύπου $p(x) = x \in A \wedge x \notin B$ λέγεται διαφορά του συνόλου B από το σύνολο A. Την διαφορά του B από το A την συμβολίζουμε με $A \setminus B$.
Δηλαδή $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Επομένως, $A \setminus B$ αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B και μόνο αυτά.

π.χ.
Αν $A = \{0, 1, 2, 3, \alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{2, 3, \varepsilon, \zeta, \gamma\}$. Τότε $A \setminus B = \{0, 1, \alpha, \beta\}$

Πρόταση

Έστω A, B δύο σύνολα. Τότε:
(1) $A \setminus A = \emptyset$
(2) $A \setminus B \subseteq A$
(3) $A \setminus \emptyset = A$
(4) $\emptyset \setminus A = \emptyset$

Απόδειξη:

(1) $x \in A \setminus A \iff x \in A \wedge x \notin A$. Επειδή $p \wedge \neg q$ παίρνει τιμή αλήθειας 0, $x \in A \wedge x \notin A$ είναι άτοπο. Άρα $A \setminus A = \emptyset$
(2) $x \in A \setminus B \iff \underset{p \wedge q \Rightarrow p}{x \in A \wedge x \notin B} \Rightarrow x \in A$. Άρα $A \setminus B \subseteq A$
(3) και (4) προφανή

Ορισμός:

Έστω A, B δύο σύνολα. Το σύνολο των τιμών αλήθειας του προτασιακού τύπου $p(x) = (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$ λέγεται συμμετρική διαφορά των συνόλων A και B και συμβολίζεται $A \triangle B$. Δηλαδή
$A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$. Προφανώς, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

π.χ.
Αν $A = \{0, 1, 2, 3, \alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{2, 3, \varepsilon, \zeta, \gamma\}$ $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 1, \alpha, \beta\} \cup \{\varepsilon, \zeta\} =$
$= \{0, 1, \alpha, \beta, \varepsilon, \zeta\}$

Πρόταση:

Έστω A, B δύο σύνολα. Τότε: (1) $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

(2) $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

(3) $x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Απόδειξη:

Έστω p, q δύο προτάσεις. Είναι γνωστό ότι $\neg(p \vee q)$ και $\neg p \wedge \neg q$ όπως επίσης και οι προτάσεις $\neg(p \wedge q)$, $\neg p \vee \neg q$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

(1) Έχουμε $x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg x \in A \wedge \neg x \in B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

(2) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow (\neg x \in A \vee \neg x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

(3) $x \notin A \setminus B \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (\neg x \in A \vee \neg x \notin B) \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$

Ιδιότητες των πράξεων συνόλων

Πρόταση:

Έστω A, B, Γ τρία σύνολα. Τότε (1) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ (η τομή είναι επιμεριστική ως προς την ένωση)

(2) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ (η ένωση είναι επιμεριστική ως προς την τομή)

Απόδειξη:

Είναι γνωστό από τον προτασιακό λογισμό ότι η σύζευξη (αντιστροφοδιάζευξης) είναι επιμεριστική ως προς την διάζευξη (αντιστ. σύζευξη). Δηλαδή αν p, q, r είναι προτάσεις τότε $p \wedge (q \vee r)$ και $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ και $p \vee (q \wedge r)$ και $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ αποτελούν ταυτολογικά ισοδύναμες προτάσεις

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

→

(1) $x \in A \cup (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

(2) Παρόμοια, $x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \Gamma) \Leftrightarrow$
$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Άρα, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. Άρα, η ένωση είναι επιμεριστική ως προς της τομ

27/3/13.

Πολλές φορές στις εφαρμογές όλα τα σύνολα που εμφανίζονται είναι όλα υποσύνολα ενός συνόλου Ω

Π.χ.
Στον απειροστικό λογισμό όλα τα σύνολα είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\Omega = \mathbb{R}$
Στην μιγαδική ανάλυση $\Omega = \mathbb{C}$
Στην γραμμική άλγεβρα $\Omega = (V, +, \cdot)$ κ.ο.κ.

Ορισμός:
Το σύνολο Ω να το λέμε βασικό σύνολο.
Αν Ω είναι το βασικό σύνολο και $A \subseteq \Omega$, τότε το σύνολο $\Omega \setminus A = \{x : x \in \Omega \wedge x \notin A\}$ λέγεται συμπληρωματικό του A και συμβολίζεται με A^c. Δηλ. $A^c = \{x : x \in \Omega \wedge x \notin A\}$

Π.χ.
Αν $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \alpha, \beta, \gamma\}$ και $A = \{0, 1, \beta, \gamma\}$ τότε $A^c = \{\alpha, 2, 3\}$

Στο παρακάτω θεώρημα συνοψίζουμε τις κυριότερες ιδιότητες του συμπληρωματικού ενός συνόλου A

Θεώρημα:
Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και A, B δύο υποσύνολα του Ω.
Τότε: 1) $A \cup A^c = \Omega$
2) $A \cap A^c = \emptyset$
3) $(A^c)^c = A$
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
5) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
7) $A \setminus B = A \cap B^c$

Οι ιδιότητες 6 και 7 λέγονται νόμοι του De Morgan.

Απόδειξη:
από πάνω — 1η πρόταση αυτή είναι πάντα αληθής

1) $x \in A \cup A^c \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A^c \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in \Omega \wedge x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in \Omega) \wedge (x \in A \vee x \notin A)$
(για να είναι η σύζευξη αληθής θα πρέπει το πρώτο να είναι αληθής
$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \Omega \Leftrightarrow x \in A \cup \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega$ ψευδής — ψευδής πάντα
$x \in A \vee x \notin A$ είναι πάντα αληθής) Άρα $A \cup A^c = \Omega$

2) $x \in A \cap A^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A^c \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \wedge x \in \Omega \Leftrightarrow x \in \emptyset$
Άρα $A \cap A^c = \emptyset$

3) $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A)^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \neg(x \in \Omega \wedge x \notin A) \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin \Omega \vee x \in A)$
$\Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin \Omega) \vee (x \in \Omega \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in \Omega \cap A \overset{\text{επειδή } A \subseteq \Omega}{\Leftrightarrow} x \in A$
πάντοτε ψευδής. Άρα $(A^c)^c = A$

4) Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$ και θα δείξουμε ότι $B^c \subseteq A^c$.
Έχουμε $x \in B^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \notin B \xRightarrow{A \subseteq B} x \in \Omega \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$. Άρα $B^c \subseteq A^c$
Από αυτό που αποδείξαμε προκύπτει ότι αν $B^c \subseteq A^c$ τότε $(A^c)^c \subseteq (B^c)^c$
Γ⊆Δ τότε $\Gamma^c \subseteq \Delta^c$
δηλαδή $A \subseteq B$. Επομένως, $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

5) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$
ταυτολογικά ισοδύναμες
$\Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$ ~~x∈Ω∧x∈Ω ⟺ x∈Ω∧x∈Ω~~ $(x \in \Omega \wedge x \in \Omega \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$
$\Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A) \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.
Άρα $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

6) $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$
$\Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \in \Omega \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A) \vee (x \in \Omega \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$
$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$
Άρα $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

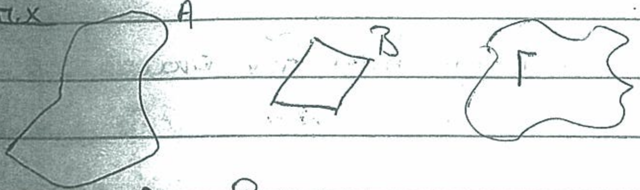
=>

7) $x \in A \cap B^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \Omega) \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$. Άρα $A \setminus B = A \cap B^c$ ■

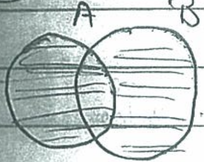
Διαγράμματα του Venn

Πολλές φορές για δική μας ευκολία αναπαριστούμε σύνολα σαν χωρία στο επίπεδο που περικλύονται από μια κλειστή καμπύλη

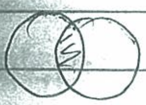
π.χ



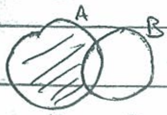
— είναι παραστάσεις συνόλων



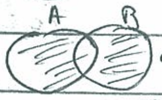
Το γραμμοσκιασμένο σχήμα αναπαριστά την ένωση των συνόλων A και B ($A \cup B$)



Παρομοίως, για την τομή A και B ($A \cap B$)



$\rightarrow A \setminus B$. Αναπαριστά τη διαφορά B από το σύνολο A



$\rightsquigarrow A \Delta B$ Αναπαριστά την συμμετρική διαφορά του συνόλου A και B

$\rightarrow A^c$ Αναπαριστά το συμπληρωματικό του συνόλου A ως προς Ω

Καρτεσιανό Γινόμενο Δυο συνόλων

Ορισμός:
Έστω A, B δυο σύνολα, $a \in A$ και $b \in B$. Το σύνολο $\{\{a\},\{a,b\}\}$ λέγεται διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο μέλος το a και δεύτερο μέλος το b.
Το διατεταγμένο ζεύγος το συμβολίζουμε με (a,b)
Δηλαδή $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

Παρατήρηση: Γενικά τα διατεταγμένα ζεύγη (a,b) και (b,a) δεν είναι ίσα.

π.χ.
Αν $a=0$ και $b=1$ τότε $(0,1)=\{\{0\},\{0,1\}\}$ ενώ $(1,0)=\{\{1\},\{0,1\}\}$
και $\{\{0\},\{0,1\}\} \neq \{\{1\},\{0,1\}\}$ (Το μονοσύνολο 0 ανήκει στο πρώτο αλλά όχι στο δεύτερο)

Πρόταση:
Έστω A, B δύο σύνολα και $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Τότε
$(a,b)=(a',b') \Leftrightarrow a=a'$ και $b=b'$

Απόδειξη
$\Leftarrow]$ Προφανές. Αν $a=a'$ και $b=b'$ τότε $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$
$=(a',b')$

$\Rightarrow]$ Υποθέτουμε ότι $(a,b)=(a',b')$. Δηλαδή $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
i) $a=b$
Προφανώς το σύνολο $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\}\}$
Άρα από την υπόθεση και το $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ είναι μονοσύνολο
Δηλαδή $a'=b'$ και $\{\{a'\},\{a',b'\}\}=\{\{a'\}\}$
Επομένως, $\{\{a\}\}=\{\{a'\}\}$. Άρα $\{a\}=\{a'\}$ και συνεπώς $a=a'$. Άρα $a=b=a'=b'$

$\Rightarrow$

έχει 2 στοιχεία

ii) $a \neq b$. Προφανώς, $\{\{a\},\{a,b\}\}$ έχει 2 στοιχεία. Επομένως το σύνολο $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ έχει και αυτό δυο στοιχεία. Άρα $a' \neq b'$

Επειδή $\{a\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$ έχουμε ότι $\{a\} \in \{\{a'\},\{a',b'\}\}$

Άρα $\{a\}=\{a'\}$ ή $\{a\}=\{a',b'\}$ → δεν μπορεί να είναι αυτό γιατί το ένα έχει 1 στοιχείο και το άλλο 2. Επειδή $a' \neq b'$ έχουμε ότι $\{a\}=\{a'\}$

Άρα, $a=a'$

Επίσης $\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$. Άρα, $\{a,b\} \in \{\{a\},\{a,b'\}\}$

Επομένως $\{a,b\}=\{a,b'\}$. Επειδή το $b \in \{a,b\}$ και $a \neq b'$ έχουμε ότι $b=b'$. Επομένως, οποια και αν είναι η περίπτωση $a=a'$ και $b=b'$

Ορισμός:

Έστω A, B δυο σύνολα. Το σύνολο $A \times B$ όλων των διατεταγμένων ζευγών με πρώτο μέλος από το A και δεύτερο μέλος από το B λέγεται καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B. Δηλαδή $A \times B = \{(x,x): x \in A \wedge y \in B\}$

Αν $A=B$ τότε πολλές φορές γράφουμε A^2 αντί για $A \times A$

Παρατήρηση(*): • Το σύνολο $\Delta = \{(x,x): x \in A\}$ λέγεται διαγώνιος του συνόλου A

• Γενικά $A \times B \neq B \times A$ δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

π.χ

Αν $A=\{0\}, B=\{1\}$ τότε $A \times B = \{(0,1)\}$ και $B \times A = \{(1,0)\}$ και $(0,1) \neq (1,0)$

• Αν $(a,b) \in A \times B$ τότε το διατεταγμένο ζευγος $(b,a) \in B \times A$ λέγεται αντίστροφο του (a,b)

Πρόταση:
Έστω A, B, Γ τρία σύνολα. Τότε:

1) $A \times (B \cap \Gamma) = A \times B \cap A \times \Gamma$

2) $(B \cap \Gamma) \times A = B \times A \cap \Gamma \times A$

3) $A \times (B \cup \Gamma) = A \times B \cup A \times \Gamma$

4) $(B \cup \Gamma) \times A = B \times A \cup \Gamma \times A$

5) $A \times (B \setminus \Gamma) = A \times B \setminus A \times \Gamma$

6) $B \setminus \Gamma \times A = B \times A \setminus \Gamma \times A$

Απόδειξη:

1) Έχουμε $(x,y) \in A \times (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in \Gamma)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in \Gamma) \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times \Gamma$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$. Άρα $A \times (B \cap \Gamma) = A \times B \cap A \times \Gamma$

3) Έχουμε $(x,y) \in A \times (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in \Gamma)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in \Gamma) \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times \Gamma \Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \cup A \times \Gamma$.
Άρα $A \times (B \cup \Gamma) = A \times B \cup A \times \Gamma$

5) $(x,y) \in A \times (B \setminus \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \setminus \Gamma \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin \Gamma)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin \Gamma) = (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times \Gamma$
$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \setminus A \times \Gamma$
Άρα $A \times (B \setminus \Gamma) = A \times B \setminus A \times \Gamma$

30/3/13

Συλλογή Συνόλων

Ορισμός:
Ένα σύνολο $\mathcal{C}$ τα στοιχεία του οποίου είναι και αυτά σύνολα λέγεται συλλογή συνόλων.

Π.χ
$\mathcal{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$, $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$ είναι συλλογή συνόλων ενώ το σύνολο των κατοίκων της Σάμου δεν είναι συλλογή

Ορισμός:
• Έστω $\mathcal{C}$ μια συλλογή συνόλων. Το σύνολο των τιμών αληθείας του προτασιακού τύπου $p(x) = \exists C \in \mathcal{C}, x \in C$ λέγεται ένωση της συλλογής $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\cup \mathcal{C}$. Δηλαδή $\cup \mathcal{C} = \{x : \exists C \in \mathcal{C}, x \in C\}$
• Το σύνολο των τιμών αληθείας του προτασιακού τύπου $g(x) = \forall C \in \mathcal{C}, x \in C$ λέγεται τομή της συλλογής $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\cap \mathcal{C}$.
Δηλαδή $\cap \mathcal{C} = \{x : \forall C \in \mathcal{C}, x \in C\}$
Προφανώς, $x \notin \cup \mathcal{C}$ ανν $\neg p(x) \leftrightarrow \neg(\exists C \in \mathcal{C}, x \in C) \leftrightarrow \forall C \in \mathcal{C}, x \notin C$
και $x \notin \cap \mathcal{C} \leftrightarrow \neg g(x) \leftrightarrow \neg(\forall C \in \mathcal{C}, x \in C) \leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}, x \notin C$

• Έστω $\mathcal{C}$ μια συλλογή συνόλων. Τότε
1) $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \subseteq \cup \mathcal{C}$ (Αν $x \in C$ τότε $\exists C \in \mathcal{C}$ με $x \in C$. Άρα $p(x)$ αληθής
Άρα $x \in \cup \mathcal{C}$)
2) $\forall C \in \mathcal{C}$, $\cap \mathcal{C} \subseteq C$ (Αν $x \in \cap \mathcal{C}$ τότε $\forall C \in \mathcal{C}$ με $x \in C$. Άρα $x \in C$. Άρα $\cap \mathcal{C} \subseteq C$)
3) $\emptyset \in \mathcal{C}$ τότε $\cap \mathcal{C} = \emptyset$

Ορισμος:
Εστω A, B δυο συνολα και $\mathcal{C} = \{A, B\}$
Τοτε $\bigcap \mathcal{C} = \{x : \forall C \in \mathcal{C}, x \in C\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B$
Επισης $\bigcup \mathcal{C} = \{x : \exists C \in \mathcal{C}, x \in C\} = \{x : x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$

Ορισμος:
Εστω Ω ενα βασικο συνολο και $A \subseteq \Omega$ ...
1) Λεμε οτι η συλλογη $\mathcal{U}$ ειναι καλυψη ή καλυμμα του A αν $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$
2) Λεμε οτι P ειναι διαμεριση του A αν $A = \bigcup P$ και για καθε $X, Y \in P$, $X \neq Y$. Τοτε $X \cap Y$ ειναι το κενο συνολο $\emptyset$

π.χ
• Αν $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$. Τοτε $\mathcal{U} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ ειναι μια καλυψη του $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \subseteq \bigcup \mathcal{U} = \mathbb{R}$) αλλα οχι διαμεριση (για να ήταν διαμεριση θα επρεπε να ητου ισο)
• Αν $\Omega = \mathbb{R}$ και $A = \mathbb{R}$ τοτε το $\mathcal{U}$ ειναι καλυψη του $\mathbb{R}$.
• Αν $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ τοτε $P = (-\infty, 1) \cup \{[\nu, \nu+1) : \nu \in \mathbb{N}\}$
Αν παρω $[\nu, \nu+1) \cap [\mu, \mu+1) = \emptyset$ $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$, $\nu \neq \mu$
και $\bigcup P = \mathbb{R}$ Αρα P είναι διαμέριση του $\mathbb{R}$.
• Επισης, $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ ειναι πολυ ευκολο να δουμε οτι αποτελει διαμεριση του $\mathbb{R}$, $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}$, Αν παρω δυο τυχαια στοιχεια η ενωση τους ειναι το $\emptyset$.

Πρόταση:
Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ δυο διαμερίσεις του X.
Αν $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ τότε $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

Απόδειξη:
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$.
Έστω $C \in \mathcal{C}_2$. Θα δείξουμε ότι $C \in \mathcal{C}_1$.
Έστω $x \in C$. Προφανώς $x \in X$. Επειδή $\bigcup \mathcal{C}_1 = X$ έχουμε ότι $x \in C'$ για κάποιο $C' \in \mathcal{C}_1$. Επειδή $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, $C' \in \mathcal{C}_2$.
Άρα $x \in C \cap C'$ και $C, C' \in \mathcal{C}_2$. Επειδή $\mathcal{C}_2$ είναι διαμέριση, έχουμε $C = C'$. Άρα $C \in \mathcal{C}_1$. Επομένως $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$ όπως θέλαμε.

Σχέσεις

Ορισμός:
Έστω A, B δυο σύνολα. Ένα σύνολο $\sigma \subseteq A \times B$ λέγεται σχέση από το A στο σύνολο B. Αν $\sigma \subseteq A \times B$ τότε γράφουμε $\sigma: A \to B$

π.χ.

$\sigma_1 = \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x+1\}}_{\text{σχέση}}$, $\sigma_2 = \overbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x^2 + B\}}^{\text{σχέση}}$

• Τα γραφήματα συναρτήσεων και όλες οι συναρτήσεις είναι σχέσεις.

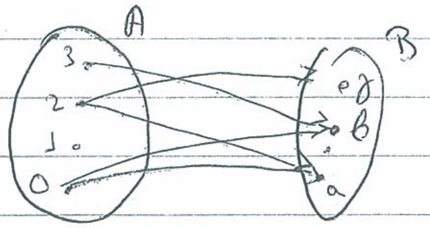
$\sigma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \overset{\text{προφανώς}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$ άρα σχέση.

Παρατηρούμε ότι όλα τα γραφήματα συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ είναι σχέση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, όμως υπάρχουν σχέσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, όπως η σ_3 που δεν είναι γραφήματα συναρτήσεων.

Ορισμός:
Έστω $\sigma: A \to B$ μια σχέση. Το σύνολο $D(\sigma) = \{x \in A : \exists y \in B$ με $(x,y) \in \sigma\}$ λέγεται πεδίο ορισμού της σχέσης σ.
Το σύνολο $R(\sigma) = \{y \in B : \exists x \in A$ με $(x,y) \in \sigma\}$ λέγεται πεδίο τιμών της σχέσης σ.

Αν $(x,y)\in\sigma$ τότε γράφουμε $x\sigma y$ ενώ αν $(x,y)\notin\sigma$ τότε γράφουμε $x \not\sigma y$. Αν $(x,y)\in\sigma$ τότε το στοιχείο (y,x) το λέμε αντίστροφο του (x,y). Την σχέση $\sigma^{-1}=\{(y,x)\in B\times A : (x,y)\in\sigma\}$ λέγεται αντίστροφη σχέση της σ.
Αν $X\subseteq A$ τότε τη σχέση $\sigma_X=(X\times B)\cap\sigma$ λέγεται περιορισμός της σχέσης σ πάνω στο X. Πολλές φορές την σ_X την συμβολίζουμε ως σ/X.
Μια σχέση $\sigma: A\to B$ πολλές φορές την αναπαριστούμε με ένα βελοειδές διάγραμμα όπως στο παρακάτω παράδειγμα

πχ
Αν $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\sigma=\{(0,\alpha),(0,\beta),(2,\alpha),(2,\gamma),(3,\beta)\}$



Πρόταση:
Έστω A, B δύο σύνολα και $\sigma, g: A\to B$ δύο σχέσεις
Τότε: 1) $\sigma\subseteq g \leftrightarrow \sigma^{-1}\subseteq g^{-1}$
2) $(\sigma\cup g)^{-1}=\sigma^{-1}\cup g^{-1}$
3) $(\sigma\cap g)^{-1}=\sigma^{-1}\cap g^{-1}$

Απόδειξη:
1) $\Rightarrow$ $(y,x)\in\sigma^{-1} \leftrightarrow (x,y)\in\sigma \overset{\sigma\subseteq g}{\rightarrow} (x,y)\in g \leftrightarrow (y,x)\in g^{-1}$
Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και το αντίστροφο
$\Leftarrow$ Υποθέτουμε ότι $\sigma^{-1}\subseteq g^{-1}$ και να δείξουμε ότι $\sigma\subseteq g$
Έχουμε $(x,y)\in\sigma \Leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1} \xrightarrow{\sigma^{-1}\subseteq g^{-1}} (y,x)\in g^{-1} \leftrightarrow (x,y)\in g$. Άρα $\sigma\subseteq g$
2) $(y,x)\in(\sigma\cup g)^{-1} \leftrightarrow (x,y)\in(\sigma\cup g) \Leftrightarrow (x,y)\in\sigma \vee (x,y)\in g$
$\leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1} \vee (y,x)\in g^{-1} \leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1}\cup g^{-1}$. Άρα $(\sigma\cup g)^{-1}=\sigma^{-1}\cup g^{-1}$
3) $(y,x)\in(\sigma\cap g)^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in(\sigma\cap g) \leftrightarrow (x,y)\in\sigma \wedge (x,y)\in g$
$\leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1} \wedge (y,x)\in g^{-1} \leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1}\cup g^{-1}$. Άρα $(\sigma\cap g)^{-1}=\sigma^{-1}\cap g^{-1}$

Συνθεση Σχεσεων

Ορισμος:
Εστω $\sigma: A \to B$ και $g: \Gamma \to \Delta$ δυο σχέσεις. Την σχεση $\{(x,y) \in A \times \Delta : \exists z \in B \cap \Gamma, (x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in g\}$ την λεμε συνθεση των σχεσεων σ και g και την συμβολιζουμε με $g \circ \sigma$.
Δηλαδη $g \circ \sigma = \{(x,y) \in A \times \Delta : \exists z \in B \cap \Gamma, (x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in g\}$

Προταση:
Εστω $\sigma: A \to B$ και $g: \Gamma \to \Delta$ δυο σχεσεις. Τοτε $(g \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ g^{-1}$

Αποδειξη:
Εχουμε $(y,x) \in (g \circ \sigma)^{-1} \leftrightarrow (x,y) \in (g \circ \sigma) \leftrightarrow \exists z \in B \cap \Gamma, (x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in g$
$\leftrightarrow \exists z \in B \cap \Gamma, (y,z) \in g^{-1} \wedge (z,x) \in \sigma^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in \sigma^{-1} \circ g^{-1}$
Επομενως $(g \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ g^{-1}$ οπως το θελαμε

Ιδιοτητες των σχεσεων.
Εστω A ένα μη κενο σύνολο. Καθε σχεση $\sigma: A \to A$ $(\sigma \subseteq A \times A)$ λέγεται διμελής σχέση επί του A. Μια διμελής σχέση $\sigma: A \to A$ λέγεται ανακλαστικη σχεση αν $\forall x \in A, (x,x) \in \sigma$

(*) Παρατηρούμε οτι αν σ είναι μια ανακλαστική σχεση επι του A. Τοτε η διαγωνιος $\Delta = \{(x,x) : x \in A\}$ το A είναι υποσύνολο της σ.
Δηλαδη $\Delta \subseteq \sigma$. Αντίστροφα, αν $\Delta \subseteq \sigma$ τοτε $\forall x \in A, (x,x) \in \Delta$.
Αρα, $(x,x) \in \sigma$ και σ είναι αναλαστική σχεση. Αρα σ είναι ανακλαστική σχέση επι του $A \leftrightarrow \Delta \subseteq A$

Παραδείγματα:

1) Η σχέση $\leq$ επί του $\mathbb{R}$, όπου $(x,y) \in \leq \leftrightarrow y-x \leq 0$ είναι ανακλαστική σχέση διότι $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x,x) \in \leq$ (γιατί $x-x=0 \leq 0$)

2) Αν $A=\{0,1,2,3\}$ τότε $\sigma_1=\{(0,0),(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ είναι ανακλαστική, $\sigma_2=\{(0,0),(1,1),(2,3),(3,2),(1,3)\}$ δεν είναι ανακλαστική.

1/4/13

Ορισμός:

Μια διμελής σχέση $\sigma: A \to A$ λέγεται συμμετρική αν $\forall x,y \in A$ $(x,y) \in \sigma$ τότε και $(y,x) \in \sigma$

π.χ

· Η συνήθης διάταξη $\leq$ επί του $\mathbb{R}$, όπου $\leq = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y-x \geq 0\}$ δεν είναι συμμετρική σχέση. (π.χ $(1,2) \in \leq$ ενώ $(2,1) \notin \leq$)

· Η σχέση $\sigma_1=\{(x,x): x \in \mathbb{R}\}$ είναι συμμετρική και ανακλαστική

· Η σχέση $\subseteq = \{(X,Y) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) : X \subseteq Y\}$ είναι ανακλαστική διότι $\forall X \in \mathbb{R}$ $(X \subseteq X)$ δηλαδή $(X,X) \in \subseteq$, Όμως, η $\subseteq$ δεν είναι συμμετρική (π.χ. Αν $X=\{1\}$, $Y=\{1,2\}$ τότε $X \subseteq Y$ αλλά το $Y \not\subseteq X$. Δηλαδή $(X,Y) \in \subseteq$ αλλά $(Y,X) \notin \subseteq$

· Αν $A=\{0,1,2,3\}$ τότε $\sigma_1=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ είναι ανακλαστική και συμμετρική

$\sigma_2=\{(0,1),(1,1),(2,3)\}$ δεν είναι ούτε ανακλαστική ούτε συμμετρική.

Πρόταση:
Έστω $A \neq \emptyset$ και $\sigma : A \to A$ μια διμελής σχέση τότε σ είναι συμμετρική ανν $\sigma = \sigma^{-1}$

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι σ είναι συμμετρική. Έχουμε
Έχουμε $(x,y) \in \sigma \xleftrightarrow{\sigma\ \text{συμ.}} (y,x) \in \sigma \leftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1}$. Άρα, $\sigma = \sigma^{-1}$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma = \sigma^{-1}$. Έστω $x, y \in A$ και $(x,y) \in \sigma$, επειδή $\sigma = \sigma^{-1}$, $(x,y) \in \sigma^{-1}$. Άρα, $(y,x) \in \sigma$. Άρα σ είναι συμμετρική σχέση.

Ορισμός:
Μια διμελής σχέση $\sigma : A \to A$ λέγεται αντισυμμετρική αν $\forall (x,y) \in A$ αν $(x,y) \in \sigma$ και $(y,x) \in \sigma$ τότε $x = y$ δηλαδή
$\forall (x,y \in A$, $x \sigma y \wedge y \sigma x \to x = y$

π.χ.

- Η συνήθης διάταξη $\leq$ επί του $\mathbb{R}$ είναι αντισυμμετρική διότι $\forall x, y \in \mathbb{R}$ αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$.
- Το περιέχεσθε $\subseteq$ είναι σχέση αντισυμμετρική. Πράγματι, αν $X, Y \in A$ και $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ τότε $X = Y$
- Αν $A = \{0, 1, 2, 3\}$ τότε $\sigma_1 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ είναι ανακλαστική συμμετρική και αντισυμμετρική

2) $\sigma_2 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$ είναι ανακλαστική, συμμετρική, αλλά όχι αντισυμμετρική.

Πρόταση:

Έστω $\sigma: A \to A$ μια διμελής σχέση. Τότε σ είναι αντισυμμετρική ανν $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$ ($\Delta = \{(x,x) : x \in A\}$ διαγώνιος)

Απόδειξη:

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι σ είναι αντισυμμετρική σχέση.
Έστω $(x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in \sigma^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (y,x) \in \sigma$
$\xrightarrow[\text{αντισ.}]{\sigma \text{ είναι}} x = y$. Άρα $(x,y) \in \Delta$. Επομένως, $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$. Έστω $x, y \in A$ με $(x,y) \in \sigma$ και $(y,x) \in \sigma$. Άρα, $(x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \in \sigma^{-1}$. Επομένως $(x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1}$. Άρα $(x,y) \in \Delta$
Άρα $x = y$ και σ είναι αντισυμμετρική σχέση.

Ορισμός:

Μια διμελής σχέση $\sigma : A \to A$ λέγεται μεταβατική, αν $\forall x, y, z \in A$, αν $(x,y) \in \sigma$ και $(y,z) \in \sigma$ τότε $(x,z) \in \sigma$.

Παραδείγματα

- Η συνήθης διάταξη επί του $\mathbb{R}$ είναι ανακλαστική, όχι συμμετρική και μεταβατική. Αν $x \leq y$ και $y \leq z$ Τότε $y - x \geq 0$ και $z - y \geq 0$. Άρα $0 \leq y - x + z - y = z - x$. Επομένως $x \leq z$ και $\leq$ είναι μεταβατική.
- Παρόμοια η σχέση $\subseteq$ είναι μεταβατική
Διότι αν $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$ τότε $X \subseteq Z$
- Αν $A = \{0, 1, 2, 3\}$ τότε $\sigma_1 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ είναι ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.
Η $\sigma_2 = \{(2,3), (3,2)\}$ είναι μόνο συμμετρική.

Πρόταση:
Έστω $\sigma: A \to A$ μια διμελής σχέση. Τότε σ είναι μεταβατική ανν
$\Longleftrightarrow \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Απόδειξη:
$\Rightarrow$) Υποθέτουμε σ είναι μεταβατική. Έστω $(x,y) \in \sigma \circ \sigma$
Από τον ορισμό της σύνθεσης, $\exists z \in A$ με $(x,z) \in \sigma \land (z,y) \in \sigma$
Επειδή η σ είναι μεταβατική, έχουμε ότι $(x,y) \in \sigma$. Άρα $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$. Έστω $x,y,z \in A$ με $(x,y) \in \sigma$ και $(y,z) \in \sigma$
Από τον ορισμό της σύνθεσης $(x,z) \in \sigma \circ \sigma$. Από την υπόθεση μας
$(x,z) \in \sigma$. Άρα σ είναι μεταβατική.

Ισοδυναμία

Ορισμός:
Μια διμελής σχέση $\sigma: A \to A$ λέγεται ισοδυναμία αν είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Συνήθως, την ισοδυναμία σ την συμβολίζουμε με $\sim$
→ Για κάθε $x \in A$ το σύνολο $[x] = \{y \in A : x \sim y\} \subseteq A$ λέγεται κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου x.
→ Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται σύνολο πηλίκο και συμβολίζεται με $A/\sim$. Δηλαδή $A/\sim = \{[x] : x \in A\}$

Παραδείγματα:
- Η διαγώνιος $\Delta = \{(x,x) : x \in A\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
- Η συνήθης διάταξη $\leq$ επί του $\mathbb{R}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας (δεν είναι συμμετρική) όπως και η σχέση $\subseteq$
- Έστω $\sim = \{(\mu,\nu) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \nu - \mu = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$. Παρατηρούμε ότι είναι ανακλαστική ($\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\nu - \nu = 0 = 3 \cdot 0$, $0 \in \mathbb{Z}$, $(\nu,\nu) \in \sim$), συμμετρική (Αν $(\nu,\mu) \in \sim$ δηλαδή $\nu - \mu = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε $\nu - \mu = 3(-k)$, $-k \in \mathbb{Z}$. Άρα $(\mu,\nu) \in \sim$) και μεταβατική (Αν $\mu,\nu,\rho \in \mathbb{N}$ με $(\mu,\nu) \in \sim$ και $(\nu,\rho) \in \sim$

Τότε $\nu-\mu=3k_1$, $\rho-\nu=3k_2$. Άρα $\nu-\mu+\rho-\nu=3(k_1+k_2)$, όπου $\nu-\mu+\rho-\nu = \rho-\mu$

Άρα, $(\mu,\rho \in \sim)$.

1) $[1]=\{\nu\in\mathbb{N} : \nu\sim 1\}=\{\nu\in\mathbb{N}: \nu-1=3k-1,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{1,4,7,10,13,\dots\}$

$[2]=\{2,5,8,11,14,\dots\}$, $[3]=\{3,6,9,12,\dots\}$

HW

• Να αποδείξετε ότι $\sim=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-y)\in\mathbb{Q}\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}$.

Πρόταση:

Έστω $A\neq\emptyset$ και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του A.

Τότε 1) $\forall x\in A,\ [x]\neq\emptyset$

2) $x\sim y \Leftrightarrow [x]=[y]$

3) $x\nsim y \Leftrightarrow [x]\cap[y]=\emptyset$

Απόδειξη:

1) Επειδή $\forall x\in A$, $(x,x)\in\sim$ έχουμε $x\in[x]$. Άρα $[x]\neq\emptyset$

2) $\Rightarrow]$ Υποθέτουμε ότι $y\sim x$. Έστω $z\in[x]$

Έχουμε $x\sim z \overset{\text{υπόθεση}}{\wedge} y\sim x \xrightarrow{\text{μεταβ.}} y\sim z$. Άρα $z\in[y]$. Άρα $[x]\subseteq[y]$

Παρόμοια, $[y]\subseteq[x]$. Άρα $[x]=[y]$

$\Leftarrow]$ Υποθέτουμε ότι $[x]=[y]$. Έχουμε $x\in[x]$. Άρα $x\in[y]$ και συνεπώς $x\sim y$

3) $\Rightarrow]$ Υποθέτουμε ότι $x\nsim y$. Θα δείξουμε ότι $[x]\cap[y]=\emptyset$.

Αν όχι, τότε υπάρχει $z\in A$ με $z\in[x]\cap[y]$. Άρα, $z\sim x \wedge y\sim z$

Επομένως λόγω μεταβατικότητας έχουμε ότι $x\sim y$. ΑΤΟΠΟ

Άρα, $[x]\cap[y]=\emptyset$

$\Leftarrow]$ Υποθέτουμε ότι $[x]\cap[y]=\emptyset$. Θα δείξουμε ότι $x\nsim y$.

Αν όχι, τότε $x\sim y$ και $x\in[y]$ και $x\in[x]$. Άρα $x\in[x]\cap[y]\neq\emptyset$.

Άτοπο. Άρα $x\nsim y$.

Συμπέρασμα: Το σύνολο πηλίκο $A/\sim$ μιας σχέσης ισοδυναμίας είναι διαμέριση του συνόλου A. Πράγματι $\forall x\in A$, $x\in[x]\subseteq A$. Άρα $A\subseteq\bigcup A/\sim\ \subseteq$

Επειδή $x \in [x]$, $[x] \neq \emptyset$. Επίσης αν $[x] \neq [y]$. Τότε $[x] \cap [y] = \emptyset$
Άρα, $A/\sim$ είναι διαμέριση του A

Πρόταση:
Έστω $A \neq \emptyset$ και $\mathcal{C}$ μια διαμέριση του A τότε $\sim = \{(x,y) \in A \times A : \exists C_i \in \mathcal{C}_{x,y}\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του A και μάλιστα, $A/\sim = \mathcal{C}$

Απόδειξη:
1) Έστω $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{C}$ είναι διαμέριση του A, $\exists C_i \in \mathcal{C}$ με $x \in C_i$. Άρα, $(x,x) \in \sim$ και $\sim$ είναι ανακλαστική.
2) Αν $(x,y) \in \sim$ τότε $\exists C_i \in \mathcal{C}$ με $x,y \in C_i$. Άρα και $y,x \in C_i$. Επομένως $(y,x) \in$ και η $\sim$ είναι συμμετρική.
3) Αν $(x,y) \in \sim$ και $(y,z) \in \sim$ τότε υπάρχουν $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ με $x,y \in C_1$ και $y,z \in C_2$. Άρα $y \in C_1 \cap C_2$ και επειδή $\mathcal{C}$ είναι διαμέριση έχουμε $C_1 = C_2$. Άρα $x,z \in C_2$ και συνεπώς, $x \sim z$. Άρα $\sim$ είναι μεταβατική.
Άρα έχουμε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
Προφανώς $\forall x \in A$, $[x] \in \mathcal{C}$ άρα $A/\sim \subseteq \mathcal{C}$ και επομένως από προηγούμενη πρόταση (προηγούμενο μάθημα) έχουμε ότι $A/\sim = \mathcal{C}$.

3/4/13

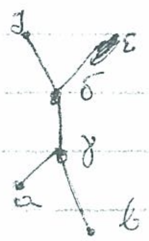
Διατάξεις και Διατεταγμένα σύνολα

Ορισμός:
Έστω $P \neq \emptyset$. Μια διμελής σχέση $\leq : P \to P$ λέγεται μερική διάταξη αν $\leq$ είναι ταυτόχρονα 1) ανακλαστική,
2) αντισυμμετρική και
3) μεταβατική.

Συνήθως, την σχέση $\leq$ θα την συμβολίζουμε $\leq$.
Αν $x \leq y$ ($(x,y) \in \leq$). Τότε λέμε ότι το x είναι μικρότερο ή ίσο του y ή ότι το y είναι μεγαλύτερο ή ίσο του x. Αν $x \leq y$ και $x \neq y$ τότε λέμε ότι το x είναι γνήσια μικρότερο του y ή ότι το y είναι μεγαλύτερο του x.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ με την συνήθη διάταξη $\leq = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-x\geq 0\}$ είναι παράδειγμα μερικής διάταξης επί του $\mathbb{R}$. Επίσης, για κάθε σύνολο X, η σχέση του περιέχεσθαι $\subseteq$ είναι μερική διάταξη επί του $P(X)$.
Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη επί του P
τότε, το διατεταγμένο ζεύγος $(P,\leq)$ το λέμε μερικά διατεταγμένο σύνολο. Συνήθως, ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P,\leq)$ το αναπαριστούμε στο επίπεδο ως εξής.
Τοποθετούμε τα σημεία του έτσι ώστε αν $x\leq y$ τότε το x συνδέεται με το y μέσω μιας τεθλασμένης γραμμής η οποία διαρκώς "ανεβαίνει".

π.χ.



$P=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$

$\leq = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\varepsilon,\varepsilon),(\zeta,\zeta),(\beta,\gamma),(\beta,\delta),(\beta,\varepsilon),(\beta,\zeta),(\gamma,\delta),(\gamma,\varepsilon),(\gamma,\zeta),(\delta,\varepsilon),(\delta,\zeta),(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta),(\alpha,\varepsilon),(\alpha,\zeta)\}$

Επίσης αν $Q=\{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $P=\{(\alpha,\alpha),(\delta,\delta),(\gamma,\gamma),(\varepsilon,\varepsilon),(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta),(\alpha,\varepsilon),(\gamma,\delta),(\gamma,\varepsilon),(\delta,\varepsilon)\}$

Το αναπαριστούμε ως εξής.

είναι μερική διάταξη.

Αν η μερική διάταξη $\leq$ επί του συνόλου P ικανοποιεί και την συνθήκη 4) $\forall x,y\in P$, $x\leq y$ ή $y\leq x$, τότε λέμε ότι η διάταξη $\leq$ είναι μια ολική ή γραμμική διάταξη επί του P.
Ο όρος γραμμική διάταξη δικαιολογείται από το δεύτερο παράδειγμα. Τα στοιχεία του P μπορούν να τοποθετηθούν πάνω σε μια γραμμή. Επομένως, $(Q,\leq)$ είναι γραμμικά διατεταγμένο σύνολο ενώ το πρώτο παράδειγμα δεν είναι διατεταγμένο διότι για τα στοιχεία $\alpha,\beta\in P$, $\alpha\leq\beta$ και $\beta\not\leq\alpha$

Π.χ.

• Το $(\mathbb{R}, \leq)$, $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη είναι γραμμικά διατεταγμένο διότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ή $y \leq x$.

• Το $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$ είναι μερικά διατεταγμένο αλλά όχι γραμμικά διότι $\{0\} \in P(\mathbb{R})$, $\{1\} \in P(\mathbb{R})$ αλλά $\{0\} \not\subseteq \{1\}$ και $\{1\} \not\subseteq \{0\}$

Πρόταση:

Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά (αντ. γραμμικά) διατεταγμένο σύνολο και $X \subseteq P$.
Τότε $\leq_X = \leq \cap (X \times X)$ (δηλαδή για $x, y \in X$ $x \leq_X y \leftrightarrow x \leq y$) είναι μια μερική (αντ. γραμμική) διάταξη πάνω στο X.

Απόδειξη:

1) Έστω $x \in X$. Επειδή $x \in P$, $x \leq x$. Άρα $x \leq_X x$. Άρα $\leq_X$ είναι ανακλαστική σχέση.

2) Έστω $x, y \in X$, $x \leq_X y$ και $y \leq_X x$. Έχουμε $x \leq y \leftrightarrow x \leq_X y$ και $y \leq x \leftrightarrow y \leq_X x$. Άρα $x \leq y$ και $y \leq x$. Άρα $x = y$. Άρα $\leq_X$ είναι αντισυμμετρική.

3) Έστω $x, y, z \in X$ με $x \leq_X y$, $y \leq_X z$. Έχουμε $x \leq y$ και $y \leq z$. Άρα $x \leq z$ και συνεπώς $x \leq_X z$. Άρα $\leq_X$ είναι μεταβατική.

Επομένως, $\leq_X$ είναι μερική διάταξη.

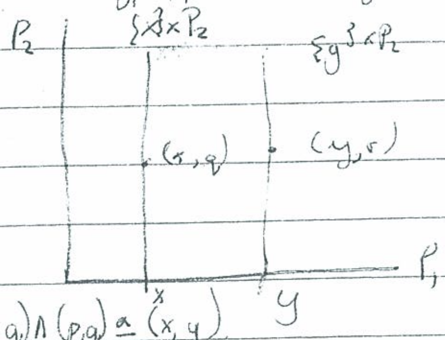
Αν τώρα $\leq$ είναι γραμμική διάταξη, τότε $\forall x, y \in X$ έχουμε $x, y \in P$. Άρα $x \leq y$ ή $y \leq x$. Άρα $x \leq_X y$ ή $y \leq_X x$. Άρα $\leq_X$ είναι γραμμική διάταξη επί του X.

Συμπέρασμα: Για οποιοδήποτε υποσύνολο X του $\mathbb{R}$, $(X, \leq_X)$, $\leq_X = \leq \cap (X \times X)$ και $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη του $\mathbb{R}$, είναι γραμμικά διατεταγμένο.
Ιδιαίτερα, $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$, $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$, $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ είναι παραδείγματα γραμμικά διατεταγμένων συνόλων.

Πρόταση:
Έστω $(P, \le)$ ένα μερικό (αντ. γραμμικά) διατεταγμένο σύνολο.
Τότε $\le^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \le\}$ είναι μια μερική (αντ. γραμμική) διάταξη επί του P.

Απόδειξη:
1) Έστω $x \in P$. Επειδή $\le$ είναι ανακλαστική έχουμε ότι $(x,x) \in \le$. Άρα, $(x,x) \in \le^{-1}$ δηλαδή $x \le^{-1} x$. Άρα $\le^{-1}$ είναι ανακλαστική.
2) Έστω $x, y \in P$, $x \le^{-1} y$ και $y \le^{-1} x$ έχουμε $y \le x$ και $x \le y$. Επειδή $\le$ είναι αντισυμμετρική σχέση, έχουμε ότι $x = y$. $\le^{-1}$ αντισυμμετρική
3) Έστω $x, y, z \in P$, $x \le^{-1} y$ και $y \le^{-1} z$. Έχουμε ότι $z \le y$ και $y \le x$. Επειδή $\le$ είναι μεταβατική, έχουμε ότι $z \le x$. Άρα $x \le^{-1} z$ και $\le^{-1}$ είναι μεταβατική.
Άρα $\le^{-1}$ είναι μερική διάταξη πάνω στο P.
Στην περίπτωση που $\le$ είναι γραμμική διάταξη, τότε και $\le^{-1}$ είναι γραμμική διάταξη. Πράγματι, αν $x, y \in P$ τότε $x \le y$ ή $y \le x$. Άρα $y \le^{-1} x$ ή $x \le^{-1} y$. Άρα και η σχέση $\le^{-1}$ είναι μια γραμμική σχέση επί του P.
*Την $\le^{-1}$ την συμβολίζουμε ως $\ge$.

Πρόταση:
Έστω $(P_1, \le_1)$, $(P_2, \le_2)$ δύο μερικά (αντ. γραμμικά) διατεταγμένα σύνολα και $\preceq : P_1 \times P_2 \to P_1 \times P_2$, $(x,y) \preceq (p,q) \iff x <_1 p$ ή αν $x = p$ τότε $y \le_2 q$. Τότε $\preceq$ είναι μια μερική (αν. γραμμική) διάταξη επί του $P_1 \times P_2$.



Απόδειξη:
1) Έστω $(x,y) \in P_1 \times P_2$. Επειδή $x \le_1 x$ και $y \le_2 y$ έχουμε ότι $(x,y) \preceq (x,y)$. Άρα $\preceq$ είναι ανακλαστική σχέση.
2) Έστω $(x,y), (p,q) \in P_1 \times P_2$ με $(x,y) \preceq (p,q) \wedge (p,q) \preceq (x,y)$. Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι $x < p$ ή $x = p$ $\leadsto$

Αν $x<p$ τοτε απο την δευτερη σχεση έχουμε ότι $p\le x$. Ατοπο

Άρα $x=p$. Επειδή $x=p$ εχουμε $y\le_2 q$. Αν $y\le_2 q$ τοτε απο τη δευτερη σχέση, έχουμε ότι $q\le_2 y$ ΑΤΟΠΟ. Άρα $y=q$.

Επομένως, $(x,y)=(p,q)$ και $\underline{\alpha}$ είναι αντισυμμετρική σχεση.

3) Εστω $(x,y),(p,q),(u,v)\in P_1\times P_2$ με $(x,y)\underline{\alpha}(p,q)\wedge(p,q)\underline{\alpha}(u,v)$

Θα δείξουμε ότι $(x,y)\underline{\alpha}(u,v)$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $x<_1 p\wedge p<_1 u$ τοτε $x<_1 u$. Άρα $(x,y)\underline{\alpha}(u,v)$

ii) $x<_1 p\wedge p=u$. τοτε $(x,y)\underline{\alpha}(u,v)$

iii) $x=p\wedge p<_1 u$ εχουμε $x=p$. Άρα απο την υπόθεση μας εχουμε $q\le v$

Άρα $(x,y)\underline{\alpha}(u,v)$

iv) $x=p\wedge p=u$. επειδη $x=p$, $y\le_2 q$. Επειδή $p=u$, $q\le_2 v$

Άρα $y\le_2 v$. Επομενως $(x,y)\underline{\alpha}(u,v)$.

Άρα $\underline{\alpha}$ είναι μια μερική διαταξη επι του $P_1\times P_2$

Επίσης αν $\le_1,\le_2$ είναι γραμμικές διατάξεις επι των P_1 και P_2 αντίστοιχα, τοτε $\underline{\alpha}$ είναι γραμμική διάταξη επι του $P_1\times P_2$.

Πραγματι αν $(x,y),(p,q)\in P_1\times P_2$ τοτε $x,p\in P_1$. Επειδη $\le_1$ είναι γραμμική διάταξη $x\le_1 p$ ή $p\le_1 x$. Εστω ότι $x\le_1 p$. Αν $x<_1 p$ τοτε $(x,y)\underline{\alpha}(p,q)$. Αν $x=p$ τοτε $y,q\in P_2$. Άρα $y\le_2 q$ ή $q\le_2 y$.

Αν $y\le_2 q$ τοτε $(x,y)\underline{\alpha}(p,q)$. Διαφορετικα $(p,q)\underline{\alpha}(x,y)$.

Άρα, $\underline{\alpha}$ είναι μια γραμμικη διάταξη επι του $P_1\times P_2$

=> Την διαταξη αυτη την λέμε λεξικογραφική διάταξη.

H.W.

Προταση:

Εστω $(P_1,\le_1),(P_2,\le_2)$ δυο μερικα (αντ. γραμμικα) διατεταγμένα σύνολα και $\underline{\alpha}: P_1\times P_2\to P_1\times P_2$ η σχέση $(x,y)\underline{\alpha}(p,q) \Leftrightarrow x\le_1 p$ και $y\le_2 q$.

Τοτε $\underline{\alpha}$ είναι μερικη (αντ. γραμμικη) διάταξη επι του $P_1\times P_2$

Φραγμένα Σύνολα

6/4/13

Ορισμός:
Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $\emptyset \neq A \subseteq P$. Λέμε ότι ένα στοιχείο $p \in P$ είναι άνω φράγμα του A αν για κάθε $a \in A$, $a \leq p$.
Λέμε ότι το στοιχείο $q \in P$ είναι κάτω φράγμα του A αν για κάθε $a \in A$, $q \leq a$. Αν το A είναι άνω φράγμα λέμε ότι το A είναι άνω φραγμένο. Αν το A έχει κάτω φράγμα τότε λέμε ότι το A είναι κάτω φραγμένο. Αν το A είναι κάτω και άνω φραγμένο λέμε ότι το A είναι φραγμένο.

Πρόταση:
Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $\emptyset \neq A \subseteq P$. Αν $p \in A$ είναι άνω φράγμα του A τότε δεν υπάρχει άλλο άνω φράγμα $q \in A$ του A με $p \neq q$.

Απόδειξη
Υποθέτουμε το αντίθετο και έστω ότι $q \in A$, $q \neq p$ ένα φράγμα του A. Τότε επειδή το q είναι άνω φράγμα του A και $p \in A$, έχουμε ότι $p \leq q$ (1). Επειδή p είναι άνω φράγμα του A και $q \in A$, έχουμε ότι $q \leq p$ (2). Από τις (1) και (2) και το γεγονός ότι η σχέση $\leq$ είναι αντισυμμετρική, έχουμε ότι $p = q$ ΑΤΟΠΟ
Άρα δεν υπάρχει άλλο $q \in A$ που είναι άνω φράγμα του A.

Ορισμός:
Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq P$.
Ένα στοιχείο $p \in A$ λέγεται μέγιστο στοιχείο του A στην περίπτωση που το p είναι άνω φράγμα του A.
Ένα στοιχείο $q \in A$ λέγεται ελάχιστο στοιχείο του A στην περίπτωση που το q είναι κάτω φράγμα του A.

Το μέγιστο στοιχείο του A, αν υπάρχει το συμβολίζουμε με $\max A$ και το ελάχιστο στοιχείο του A, αν υπάρχει με $\min A$.

Απο την τελευταία πρόταση προκύπτει το παρακάτω συμπέρασμα.

Συμπέρασμα: Το $\max A$ και το $\min A$ ενό υποσυνόλου A του μερικά διατεταγμένο συνόλου, $(P, \leq)$, αν υπάρχουν είναι μοναδικά.

Ορισμός:

Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $\emptyset \neq A \subseteq P$. Το ελάχιστο άνω φράγμα του A, αν υπάρχει, λέγεται άνω πέρας ή supremum του A ($\sup A$). Το μέγιστο κάτω φράγμα του A, αν υπάρχει κάτω πέρας ή infimum του A ($\inf A$)

Πρόταση:

Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $\emptyset \neq A \subseteq P$

Τότε 1) $\sup(A) \in A \Longleftrightarrow \sup(A) = \max(A)$

2) $\inf(A) \in A \Longleftrightarrow \inf(A) = \min(A)$

Απόδειξη:

1) $\Rightarrow$] Έστω ότι $\sup(A) \in A$. Επειδή $\sup(A)$ είναι άνω φράγμα του A και $\sup(A) \in A$ έχουμε ότι $\sup(A) = \max(A)$

$\Leftarrow$] Αν $\max(A) = \sup(A)$ τότε $\max(A)$ είναι άνω φράγμα του A και μάλιστα $\max(A)$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A (αν P είναι άνω φράγμα του A τότε επειδή το $\max(A) \in A$, $\max(A) \leq P$) Άρα $\sup(A) = \max(A) \in A$

(2) Παρόμοια.

Ορισμός:

$\emptyset \neq A \subseteq P$

Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και Ένα στοιχείο $p \in P$ λέγεται ψευδομέγιστο του P αν δεν υπάρχει $q \in P$ με $q > p$.

Δηλαδή κανένα στοιχείο q του P δεν είναι γνήσια μεγαλύτερο του p.

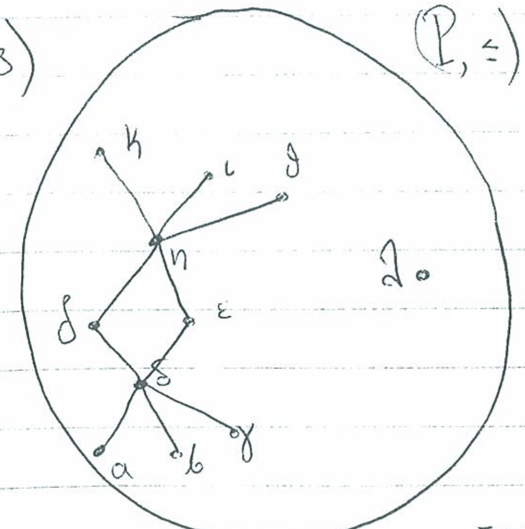
Ένα στοιχείο t του P λέγεται ψευδοελάχιστο αν δεν υπάρχει στοιχείο $s \in P$ με $s < t$.

Παραδείγματα:

1) Έστω $(\mathbb{R}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη και $A=(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Τότε το σύνολο A είναι φραγμένο, δεν έχει ελάχιστο στοιχείο ούτε μέγιστο στοιχείο, $\sup(A)=\sqrt{2}$, $\inf(A)=-\sqrt{2}$.
Κανένα στοιχείο του διαστήματος δεν είναι ψευδομέγιστο ή ψευδοελάχιστο

2) $(\mathbb{Q}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη του $\mathbb{R}$ και $A=[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$ δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο. $\sup(A)$ δεν υπάρχει. Πράγματι αν $\sup(A)=p\in\mathbb{Q}$ τότε $p\neq\sqrt{2}$ διότι $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. Άρα $p<\sqrt{2}$ ή $p>\sqrt{2}$. $p\nless\sqrt{2}$ διότι μεταξύ του p και του $\sqrt{2}$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A που είναι μεγαλύτερα του p. Άρα δεν είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, $p\ngtr\sqrt{2}$ διότι μεταξύ $\sqrt{2}$ και του p υπάρχουν άπειροι ρητοί μικρότεροι του p. Άρα p δεν μπορεί να είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A. Άρα, $\sup(A)$ δεν υπάρχει. Παρομοίως, $\inf(A)$ δεν υπάρχει.

3) $(P, \leq)$



Το σύνολο $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο. Είναι όμως άνω φραγμένο ($(\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa)$ είναι άνω φράγματα). Το $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο διότι τα α,β,γ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους. $\sup(\{\alpha,\beta,\gamma\})=\delta$, διότι $\delta=\min\{\delta,\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa\}$ του συνόλου όλων των άνω φραγμάτων.
$\inf(\{\alpha,\beta,\gamma\})$ δεν υπάρχει διότι το $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ δεν έχει κάτω φράγμα.
Το σύνολο $A=\{\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\}$ είναι φραγμένο, $\sup(A)=\eta$, $\inf(A)=\delta$, $\max(A)=\eta$, $\min(A)=\delta$. Για το σύνολο $B=\{\kappa,\iota,\theta\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Είναι όμως κάτω φραγμένο. $\max(B)$, $\min(B)$, $\sup(B)$ $\nexists$
$\inf(B)=\eta$

Πόρισμα

Επειδή τα $max(A)$, $min(A)$ όταν υπάρχουν είναι μοναδικά, έχουμε ότι $sup(A)$ και $inf(A)$ όταν υπάρχουν είναι μοναδικά

Άσκηση:

1. Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Να αποδείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

α) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του P έχει supremum

β) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο A του P έχει infimum

Απόδειξη:

$(α) \Rightarrow (β)$ | Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο. Τότε το σύνολο $L = \{p \in P \,;\, p$ είναι κάτω φράγμα του $A\} \neq \emptyset$ και άνω φραγμένο. Άρα από την υπόθεση μας $sup(L)$ υπάρχει. Δηλαδή $sup(L)$ είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα του L. Άρα $sup(L) = inf(A)$

$(β) \Rightarrow (α)$ | Παρόμοια

Ορισμός:

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ που ικανοποιεί μια εκ των σχέσεων (α) ή (β) λέγεται πλήρες μερικά διατεταγμένο σύνολο. Δεχόμαστε σαν ένα από τα αξιώματα του $\mathbb{R}$ την πληρότητά του. Δηλαδή κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

2. Έστω $(P, \leq)$ ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο και $A \neq \emptyset$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του P. Να αποδείξετε ότι το $min(A)$ υπάρχει.

Απόδειξη:

Έστω $A = \{a_1, \ldots, a_\nu\}$ $\nu \in \mathbb{N}$. Επειδή $\leq$ είναι γραμμική διάταξη, έχουμε ότι $a_1 \leq a_2$ ή $a_2 \leq a_1$. Έστω ότι $a_1 \leq a_2$. Επίσης, για τον ίδιο λόγο $a_1 \leq a_3$ ή $a_3 \leq a_1$. Έστω ότι $a_3 \leq a_1$. Συνεχίζοντας, με αυτό τον τρόπο, σε ν-οστό πλήθος βήματα θα καταλήξουμε στο ελάχιστο στοιχείο του A.

Το συμπέρασμα της άσκησης (2) δεν ισχύει στην περίπτωση που το A είναι άπειρο σύνολο.

π.χ

το $A=(0,1)$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

Καλά Διατεταγμένα Σύνολα

Ορισμός:

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P,\leq)$ λέγεται καλά διατεταγμένο αν για κάθε $\emptyset \neq S \subseteq P$, $\min(A)$ υπάρχει.

π.χ

• Το σύνολο $(\mathbb{N},\leq)$ είναι παράδειγμα καλά διατεταγμένου συνόλου. (γραμμικό διατεταγμένο σύνολο) Πράγματι, αν $S \neq \emptyset$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε $\min(S)$ υπάρχει (αν $v \in S$ τότε $S' = \{x \in S : x \leq v\}$ είναι $\neq \emptyset$ και πεπερασμένο. Άρα από την άσκηση 2, $S_0=\min(S')$ υπάρχει. Προφανώς $S_0=\min(S')$. Πράγματι αν $k \in S$ και $k \geq v$ τότε $s_0 \leq v \leq k$ και συνεπώς $s_0 \leq k$. Αν $k \leq v$ τότε $k \in S'$ και $S_0 \leq k$)

Άρα το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο

• Το $(\mathbb{R},\leq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο διότι το $A=(0,1)$ δεν έχει ελάχιστο.

• Το $(\mathbb{Q},\leq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο διότι $B=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο

• Το $(\mathbb{Z},\leq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο διότι $\Gamma=\{x\in\mathbb{Z}: x<0\}$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

• Το $(\mathbb{Q}^c,\leq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο το $A=(0,1)\cap\mathbb{Q}^c$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

8/4/13

Πρόταση:
Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι γραμμικά διατεταγμένο

Απόδειξη:
Έστω $x, y \in P$. Θα δείξουμε ότι $x \leq y$ ή $y \leq x$. Προφανώς $\emptyset \neq S = \{x, y\} \subseteq P$
Επειδή το $(P, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο, $s_0 = \min(S)$ υπάρχει.
Αν $s_0 = x$ τότε $x \leq y$. Αν $s_0 = y$ τότε $y \leq x$. Άρα $x \leq y$ ή $y \leq x$ και $(P, \leq)$ είναι γραμμικά διατεταγμένο σύνολο.

(*) Το αντίστροφο όπως είδαμε δεν ισχύει.
π.χ.: Το $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι γραμμικά διατεταγμένο σύνολο αλλά όχι καλά διατεταγμένο (το $(0,1)$ δεν έχει ελάχιστο.

(**) Για κάθε $X \neq \emptyset$ με $|X| > 1$ τότε το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P(X), \subseteq)$ δεν είναι καλά διατεταγμένο
Γιατί; $\rightsquigarrow$ Αν $a, b \in X$, $a \neq b$ τότε $S = \{\{a\}, \{b\}\}$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Ορισμός:
Έστω $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$ (η μεταβλητή x παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$). Τότε η πρόταση $q = \forall x \in \mathbb{N}, p(x)$ είναι αληθής $\Leftrightarrow$ $(p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge p(\nu) \wedge \ldots)$ είναι αληθής $\Leftrightarrow$
$p(1)$ αληθής και $p(2)$ αληθής και ... και $p(\nu)$ αληθής και ...
↳ Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να ελέγξουμε αν $p(1)$ είναι αληθής $p(2)$ αληθής ... κ.τ.λ. ... γιατί το $\mathbb{N}$ είναι άπειρο σύνολο.

Τίθεται το ερώτημα πότε η πρόταση είναι αληθής.
Την απάντηση στο ερώτημα την δίνει το γνωστό μας θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής.

Θεωρημα:

Εστω $P(x)$ ενας προτασιακος τυπος με συνολο αναφορας το $\mathbb{N}$

Αν 1) $p(1)$ ειναι αληθης και

2) Για καθε $\nu \in \mathbb{N}$, $p(\nu)$ αληθης $\to p(\nu+1)$ αληθης.

Τοτε $p(\nu)$ ειναι αληθης, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Αποδειξη:

Υποθετουμε το αντιθετο και εστω $p(\mu)$ ψευδης για καποιο $\mu \in \mathbb{N}$

Θετουμε $S = \{x \in \mathbb{N} : p(x) \text{ ψευδης}\}$.

Επειδη $\mu \in S$, $S \neq \emptyset$. Επειδη το $(\mathbb{N}, \leq)$ ειναι καλα διατεταγμενο συνολο Εχουμε οτι $s_0 = \min(S)$ υπαρχει. Δηλαδη $s_0 \in S$ και $s_0 \leq x$, $\forall x \in S$. Επειδη $p(1)$ αληθης, $s_0 > 1$.

Αρα $s_0 = \nu_0 + 1$ για καποιο $\nu_0 \in \mathbb{N}$. Επειδη $\nu_0 < s_0$, εχουμε οτι $p(\nu_0)$ αληθης. Αρα απο την (2), $p(\nu_0+1)$ ειναι αληθης. Αρα $p(s_0)$ ειναι αληθης. Αρα $s_0 \notin S$. Αρα s_0 δεν ειναι το ελαχιστο στοιχειο του S. ΑΤΟΠΟ Αρα $p(\nu)$ αληθης $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Ασκησεις:

1) Να αποδειξετε οτι ο προτασιακος τυπος $p(\nu) \equiv \left(1+2+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$ ειναι αληθης για καθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Αποδειξη:

Αρκει να δειξουμε οτι (1) $p(1)$ αληθης και (2) $p(\nu)$ αληθης $\to p(\nu+1)$ αληθης

Εχουμε οτι $p(1) \equiv (1=1)$ αληθης

Αν $p(\nu) \equiv \left(1+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$ τοτε

$$p(\nu+1) \equiv (1+\dots+\nu)+\nu+1 = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu+1) = \frac{\nu^2+\nu+2\nu+2}{2} = \frac{\nu^2+3\nu+2}{2} = \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{2}$$

$$= \frac{(\nu+1)((\nu+1)+1)}{2}$$

Επομενως $p(\nu+1) \equiv \left(1+2+\dots+\nu+(\nu+1)\right) \equiv \frac{(\nu+1)((\nu+1)+1)}{2}$ ειναι αληθης.

Το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής γενικευεται για οποιοδήποτε καλα διατεταγμένο συνολο $(P, \leq)$ στην θεση του $(\mathbb{N}, \leq)$

Θεώρημα: (Υπερπεπερασμένης Επαγωγης)
Εστω $p(x)$ ενας προτασιακος τυπος με σύνολο αναφορας το καλα διατεταγμένο συνολο $(P, \leq)$. Αν $(*)$ $\forall y \in P$, αν $p(x)$ αληθης $\forall x < y$ τοτε $p(y)$ αληθης
Τοτε $p(x)$ αληθης $\forall x \in P$
Απόδειξη:
Εστω $p(x), x \in P$, ενας προτασιακός τυπος που ικανοποιει της $(*)$
Θα δείξουμε οτι $p(x)$ είναι αληθης για καθε $x \in P$.
Υποθετουμε το αντίθετο και εστω $p(y)$ είναι ψευδης για κάποιο $y \in P$.
Αρα $\emptyset \neq S = \{y \in P : p(y)$ ψευδης$\} \subseteq P$. Επειδη $(P, \leq)$ είναι καλα διατεταγμένο. Εχουμε οτι $s_0 = \min(S)$ υπάρχει. Αρα $s_0 \in P$ και $\forall x < s_0$ $p(x)$ είναι αληθής.
Αρα, απο την $(*)$ εχουμε ότι $p(s_0)$ αληθης αλλά επειδη $s_0 \in S$, $p(s_0)$ είναι ψευδής. Άτοπο! Αρα $p(x)$ αληθης για καθε $x \in P$.

Συναρτησεις

Ορισμος:
Εστω A, B δυο σύνολα. Μια σχέση $f : A \to B$ τω
1) $Dom(f) = A$ και
2) $\forall x \in A$, $\forall y, z \in B$ αν $(x,y) \in f \wedge (x,y) \in f \to y = z$
λεγεται συνάρτηση απο το σύνολο A στο συνολο B. Αν $(x,y) \in f$ τοτε γραφουμε $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$. Το y λεγεται εξαρτημένη μεταβλητή ή εικονα του x μέσω της f. Το x λεγεται ανεξαρτητη μεταβλητη ή αντιστροφη εικονα του y μέσω της f.

Παρατήρηση: Επειδή $(x,y) \in f \leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$ εχουμε οτι $Dom(f) = Ran(f^{-1})$ και $Ran(f) = Dom(f^{-1})$

~>

Αν $X \subseteq A$ τότε $f \restriction A$ συμβολίζει τον περιορισμό της f στο X. Δηλαδή $(f/X)(x) = f(x)$, $x \in X$.

Ορισμός:
Αν $f: A \to B$ είναι μια συνάρτηση, $A \subseteq X$ και $F: X \to B$ είναι μια συνάρτηση τ.ω $\forall x \in A$, $f(x) = F(x)$.
Τότε την συνάρτηση F θα την λέμε επέκταση της f από το A στο X. Με B^A θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B.
• Έστω $f, g: A \to B$ δύο συναρτήσεις. Τότε $(x,y) \in f$ σημαίνει ότι $y = f(x)$ και $(x,y) \in g$ σημαίνει ότι $g(x) = y$.
Άρα $f = g \leftrightarrow \forall (x,y) \in A \times B$, $(x,y) \in f \leftrightarrow (x,y) \in g \leftrightarrow$
$\forall (x,y) \in A \times B$, $y = f(x) \leftrightarrow y = g(x) \leftrightarrow \forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.
Άρα δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.
• Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται επί αν $Ran(f) = B$.
Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή 1-1, αν $\forall x, y \in A$, $f(x) = f(y) \to x = y$. Ισοδύναμα, $\forall x, y \in A$, $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$.

Πρόταση:
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε f^{-1} είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow$ f είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη:
$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι f^{-1} είναι συνάρτηση. Επειδή $B = Dom(f^{-1}) = Ran(f)$ έχουμε ότι η f είναι επί.
Έστω $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) = y$. Τότε $(x_1, y) \in f$ και $(x_2, y) \in f$.
Άρα $(y, x_1) \in f^{-1}$ και $(y, x_2) \in f^{-1}$. Επειδή f^{-1} είναι συνάρτηση έχουμε ότι $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1.
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι f είναι 1-1 και επί.

$\longrightarrow$

Θα δείξουμε ότι f^{-1} είναι συνάρτηση. Επειδή $B = Ran(f) = Dom($
Έστω $y \in B$ και $x_1, x_2 \in A$ με $(y, x_1) \in f^{-1}$ και $(y, x_2) \in f^{-1}$
Επομένως, $(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$. Επειδή f είναι 1-1 έχουμε ότι $x_1 = x$
Άρα οι συνθήκες (1) ∧ (2) του ορισμού συνάρτησης ικανοποιούνται
από την f^{-1}. Άρα f^{-1} είναι συνάρτηση.

Επειδή οι συναρτήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις σχέσεων, η σύνθεση συναρτήσεων είναι σύνθεση σχέσεων και ισχύουν αυτό που αποδείξαμε στο κεφάλαιο των σχέσεων επιπλέον ισχύει το εξής.

Πρόταση:
Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ και $h: \Gamma \to \Delta$ τρείς συναρτήσεις.
Τότε $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
Απόδειξη H.W

Εικόνα και Αντίστροφη εικόνα συνόλου μέσω συναρτήσεων

Ορισμός.
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση και $X \subseteq A$. Το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων μέσω της f, $\{f(x) : x \in X\}$ λέγεται εικόνα του συνόλου X μέσω της f και συμβολίζεται με $f(X)$ δηλαδή $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$
Επομένως $y \in f(X) \leftrightarrow \exists x \in X, y = f(x)$. Άρα $f(X) = \{y \in B : \exists x \in A, f(x) = y\}$
Επομένως, 1) $f(\emptyset) = \{f(x) : x \in \emptyset\} = \emptyset$.
2) $f(X) \subseteq B$
3) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

Πρόταση:

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση και $X, Y \subseteq A$.

Τότε 1) $X \subseteq Y \to f(X) \subseteq f(Y)$

2) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

3) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

4) $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$

Απόδειξη:

1) $y \in f(X) \leftrightarrow x \in X, y = f(x) \to \exists x \in Y, y = f(x) \leftrightarrow x \in f(Y)$

Άρα $f(X) \subseteq f(Y)$

2) Επειδή $X \cap Y \subseteq X$ και $X \cap Y \subseteq Y$, από την (1)

$f(X \cap Y) \subseteq f(X)$ και $f(X \cap Y) \subseteq f(Y)$. Άρα $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

3) $y \in f(X \cup Y) \leftrightarrow \exists x \in X \cup Y, f(x) = y \leftrightarrow \exists x, x \in X \vee x \in Y \wedge y = f(x)$

$\leftrightarrow \exists x \in A \wedge y = f(x) \vee \exists x \in Y \wedge y = f(x) \leftrightarrow y \in f(X) \vee y \in f(Y)$

$\leftrightarrow y \in f(X) \cup f(Y)$. Άρα $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

4) $y \in f(X) \setminus f(Y) \leftrightarrow y \in f(X) \wedge \neg(y \in f(Y)) \leftrightarrow \exists x \in X, y = f(x) \wedge \neg(\exists z \in Y, y = f(z))$

$\leftrightarrow \exists x \in X, y = f(X) \wedge \forall z \in Y, y \neq f(z) \to \exists x \in X \setminus Y, y = f(x)$

$\leftrightarrow y \in f(X \setminus Y)$. Άρα $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$

π.χ

Έστω $f: A \to A$, $f(x) = a_0$ $\forall x \in A = \{a_0, \beta, \gamma, \delta\}$, $X = \{a_0, \beta\}$,

$Y = \{\gamma, \delta\}$, $f(X \cap Y) = \emptyset$, $f(X) \cap f(Y) = \{a_0\}$

! Αντιπαράδειγμα ίδιο για την (4).

10/4/13

Ορισμός:

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση ~~...~~ και $X \subseteq B$.
Το σύνολο όλων των αντίστροφων εικόνων των στοιχείων του X μέσω της f λέγεται αντίστροφη εικόνα του X μέσω της f και συμβολίζεται με $f^{-1}(X)$.
Δηλαδή $f^{-1}(X) = \{f^{-1}(x) : x \in X\} = \{x \in A : \exists\, y \in X \text{ με } f(x) = y\}$. Επομένως $x \in f^{-1}(X) \iff f(x) \in X$. Ισοδύναμα $x \notin f^{-1}(X) \iff f(x) \notin X$.
Παρατηρούμε ότι $\forall X \subseteq B$, $f^{-1}(X) \subseteq A$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$

Πρόταση:

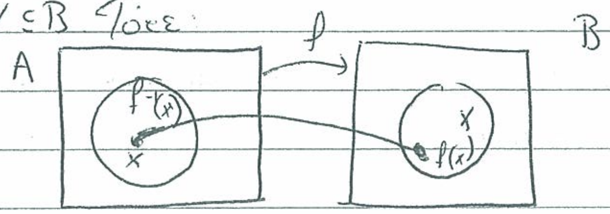
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση και $X, Y \subseteq B$. Τότε:

(1) $X \subseteq Y \to f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$,

(2) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

(3) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ και

(4) $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$



Απόδειξη:

(1) Υποθέτουμε ότι $X, Y \subseteq B$ με $X \subseteq Y$. Έστω $x \in f^{-1}(X) \iff f(x) \in X \xrightarrow{X \subseteq Y} f(x) \in Y \iff x \in f^{-1}(Y)$. Άρα $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$.

(2) Έχουμε $x \in f^{-1}(X \cap Y) \iff f(x) \in X \cap Y \iff f(x) \in X \wedge f(x) \in Y \iff x \in f^{-1}(X) \wedge x \in f^{-1}(Y) \iff x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. Άρα $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(3) Έχουμε $x \in f^{-1}(X \cup Y) \iff f(x) \in X \cup Y \iff f(x) \in X \vee f(x) \in Y \iff x \in f^{-1}(X) \vee x \in f^{-1}(Y) \iff x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ Άρα $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(4) Έχουμε $x \in f^{-1}(X \setminus Y) \iff f(x) \in X \setminus Y \iff f(x) \in X \wedge f(x) \notin Y \iff x \in f^{-1}(X) \wedge x \notin f^{-1}($
$\iff x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$ Άρα $f^{-1}(X \setminus Y = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$

Πρόταση:

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση, $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$. Τότε:

1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ και

2) $f^{-1}(f(Y)) \subseteq Y$

Απόδειξη:

$X \subseteq f^{-}(f(X))$ $\qquad$ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

1) $x \in X' \Rightarrow f(x) \in f(X') \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(X'))$. Άρα $X \subseteq f^{-1}(f(X'))$

2) $y \in f(f^{-1}(Y)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(Y)$ με $f(x)=y$ Άρα $f(x) \in Y$ και $f(x)=y$

Άρα $y \in Y$ Επομένως $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Ασκήσεις:

1) Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.

Να αποδείξετε ότι: (1) f είναι 1-1 $\Leftrightarrow \forall X' \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X'))$

(2) f είναι επί $\Leftrightarrow \forall Y \subseteq B$, $Y = f(f^{-1}(Y))$

Λύση: H.W

Πρόταση:

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε f είναι 1-1 $\Leftrightarrow \forall X, Y \subseteq A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι f είναι 1-1. Επειδή $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι και $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$.

Έστω $y \in f(X') \cap f(Y) \Leftrightarrow y \in f(X') \wedge y \in f(Y) \Leftrightarrow \exists x \in X'$ με $f(x)=y$ και $\exists z \in Y'$ με $f(z)=y \xrightarrow{f \text{ είναι } 1-1} x=z$ και $f(x)=y$. Άρα $x \in X \cap Y \wedge f(x)=y$

Άρα, $y \in f(X' \cap X')$. Επομένως, $f(X') \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$ και άρα $f(X' \cap Y) = f(X') \cap f(Y)$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\forall X', Y' \subseteq A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

Θα δείξουμε ότι f είναι 1-1. Έστω $x, y \in A$, $x \neq y$. Άρα, $\emptyset = \{x\} \cap \{y\}$.

Άρα $\emptyset = f(\emptyset) = f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\}$

Άρα $f(x) \neq f(y)$ και η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, όπως το θέλαμε.

Πρόταση:
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε η f είναι επί $\iff \forall X' \subseteq A$, $(f(X'))^c \subseteq f(X'^c)$

Απόδειξη:
$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι f είναι επί. Έστω $y \in (f(X'))^c \iff y \in B \wedge y \notin f(X') \xrightarrow{f \text{ επί}}$
$\exists x \in A$ με $f(x) = y \wedge y \notin f(X') \to x \in X'^c$ και $f(x) = y$. Άρα, $y \in f(X'^c)$.
Επομένως, $(f(X'))^c \subseteq f(X'^c)$ όπως το θέλαμε.
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\forall X' \subseteq A$, $(f(X'))^c \subseteq f(X'^c)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι επί.
Έχουμε $A = \emptyset^c$ και άρα $f(A) = f(\emptyset^c) \supseteq (f(\emptyset))^c = \emptyset^c = B$. Άρα f είναι επί.

Πρόταση:
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε f είναι 1-1 $\iff \forall X', Y \subseteq A$
$f(X' \setminus Y) = f(X') \setminus f(Y)$

Απόδειξη:
$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1. Επειδή $f(X') \setminus f(Y) \subseteq f(X' \setminus Y)$
αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(X' \setminus Y) \subseteq f(X') \setminus f(Y)$
Έστω $y \in f(X' \setminus Y)$. Άρα $\exists x \in X' \setminus Y$ με $f(x) = y$. Άρα $\exists x \in A$, $x \in X' \wedge x \notin Y$
και $f(x) = y$. Άρα, $y \in f(X')$. Επειδή $y \notin f(Y)$
(αν $y \in f(Y)$ τότε θα υπήρχε $x_1 \in Y$ με $f(x_1) = f(x) = y$ επειδή f είναι 1-1: $x_1 = x$.
όμως $x \notin Y$, άρα $x_1 \notin Y$ ΑΤΟΠΟ), έχουμε ότι $y \in f(X') \wedge y \notin f(Y)$.
Άρα $y \in f(X') \setminus f(Y)$ και συνεπώς $f(X' \setminus Y) \subseteq f(X') \setminus f(Y)$ όπως το θέλαμε.
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\forall X', Y \subseteq A$, $f(X' \setminus Y) = f(X') \setminus f(Y)$ και θα αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1.
Έστω $x \neq y$ τότε $\{x\} \setminus \{y\} = \{x\}$. Άρα $\{f(x)\} = f(\{x\}) = f(\{x\} \setminus \{y\})$
$= f(\{x\}) \setminus f(\{y\}) = \{f(x)\} \setminus \{f(y)\}$.
Άρα $f(x) \neq f(y)$ (γιατί αν ήταν ίσα θα έκαναν το $\emptyset$ και το $\{x\} \neq \emptyset$)
και η f είναι 1-1.

Προταση:

Εστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Τότε f ειναι 1-1 και επι $\Longleftrightarrow f(X)^c = f(X^c)$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$) Υποθετουμε οτι f ειναι 1-1 και επι. Επειδη η f ειναι επι απο προηγουμενη πρόταση εχουμε οτι $(f(X))^c \subseteq f(X^c)$

Επομένως αρκει να αποδείξουμε οτι f είναι 1-1 συνεπάγεται οτι $f(X^c) \subseteq f(X)^c$ Εστω $y \in f(X^c)$ Αυτο σημαινει οτι $\exists x \in X^c / y = f(x) = y$

Αρα, $y \in f(X))^c$ (αν $y \notin f(X)^c$ τοτε $y \in f(X)$ αρα $y = f(z)$ για καποιο $z \in X$) Επειδη f ειναι 1-1 και $f(x) = f(z) = y$ Εχουμε $x = z$ Ατοπο διοτι $x \in X^c \cap X$ Αρα $y \in f(X)^c$ Επομένως $f(X^c) \subseteq f(X)^c$

$\Leftarrow$) Το επι προκύπτει απο προηγούμενη Πρόταση.

($\forall X \subseteq A$, $f(X)^c \subseteq f(X^c) \to f$ ειναι επι).

Θα δείξουμε οτι f ειναι 1-1

Εστω $x, y \in A$, $x \neq y$ Εχουμε οτι $y \in \{x\}^c$ Επομενως $f(y) \in f(\{x\}^c) = f(\{x\})^c = \{f(x)\}^c$

Αρα, $f(x) \neq f(y)$ και η f ειναι 1-1.

13/4/13

Συναρτήσεις και διατεταγμένα σύνολα

Ορισμος:

Εστω $(P, \leq)$ και $(Q, \preceq)$ δυο μερικως διατεταγμένα συνολα και $f: P \to Q$ μια συνάρτηση.

i) Λεμε οτι η f ειναι ανω φραγμένη απο το στοιχειο $M \in Q$ αν το συνολο τιμων $Ran(f)$ ειναι ανω φραγμένο απο το M.

Το στοιχειο M λέγεται άνω φραγμα της f. Δηλαδη $\forall p \in P$, $f(p) \preceq M$

2) Λεμε οτι η f ειναι κάτω φραγμενη απο το στοιχειο $m \in Q$ αν το σύνολο τιμων $Ran(f)$ ειναι κάτω φραγμα απο το m.

Το m λέγεται κάτω φραγμα της f. Δηλαδη $\forall p \in P$, $m \preceq f(p)$

3) Αν f ειναι ανω και κάτω φραγμένη τότε λέμε οτι η f ειναι φραγμένη

4) Λεμε ότι η f είναι αυξουσα αν $\forall x, y \in P$ με $x \leq y$ εχουμε $f(x) \preceq f(y)$

5) Λεμε οτι η f ειναι φθινουσα αν $\forall x, y \in P$ με $x \leq y$ εχουμε $f(y) \preceq f(x)$

$\sim\!>$

6) Αν f είναι είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα τότε λέμε ότι η f είναι μονότονη.
7) Λέμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα αν $\forall x, y \in P$, $x < y$ $(x \leq y \wedge x \neq y)$, $f(x) < f(y)$
8) Λέμε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα αν $\forall x, y \in P$, $x < y$, $f(y) < f(x)$
9) Αν f είναι είτε γνήσια αύξουσα, είτε γνήσια φθίνουσα τότε λέμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη.

Πρόταση

Έστω $(P, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο και $f: P \to P$ μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Τότε $\forall p \in P$, $p \leq f(p)$.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε το αντίθετο και έστω ότι υπάρχει $p \in P$ με $f(p) < p$.
Θέτουμε $S' = \{x \in P : f(x) < x\}$. Από την υπόθεση μας, $S' \neq \emptyset$ $(p \in S')$.
Επειδή το $(P, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο και $\emptyset \neq S' \subseteq P$, έχουμε ότι $s = \min(S')$ υπάρχει.
Δηλαδή $s \in S'$ αυτό σημαίνει ότι $f(s) < s$ (1)
Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα έχουμε από την (1) ότι $f(f(s)) < f(s)$
Άρα, $f(s) \in S'$. Επομένως $s \leq f(s)$ (2)
Από (1) $\wedge$ (2) καταλήγουμε σε ΑΤΟΠΟ.
Άρα η υπόθεση ότι υπάρχει p με $f(p) < p$ είναι ψευδής. Άρα $\forall p \in P$, $p \leq f(p)$ ∎

Υπενθύμιση:

Στα Σύνολα και Αριθμοί είδαμε ότι αν $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία και $(a_{k_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ($k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση). Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $k_\nu = k(\nu) \geq \nu$. Το τελευταίο συμπέρασμα είναι μια άμεση εφαρμογή της τελευταίας πρότασης. Πράγματι, το $(\mathbb{N}, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνήσια αύξουσα. Άρα $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\nu \leq k(\nu) = k_\nu$.

ξ.ο.S

Προταση:
Εστω $X \neq \emptyset$ και $\phi: P(X) \to P(X)$ μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση ως προς την διάταξη $\subseteq$ ($A \subseteq B \to \phi(A) \subseteq \phi(B)$)
Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $D \subseteq X$ με $\phi(D) = D$ (Η ϕ εχει ενα τουλαχιστον σταθερο σημειο)

Απόδειξη:
Θέτουμε $S = \{A \subseteq X : A \subseteq \phi(A)\}$. Παρατηρούμε οτι $S \neq \emptyset$ διοτι $\emptyset \in P(X)$, $\phi(\emptyset) \subseteq X$ και $\emptyset \subseteq \phi(\emptyset)$.
$A \in S \to A \subseteq D \xrightarrow{\phi \text{ αυξουσ.}} A \subseteq \phi(A) \subseteq \phi(D)$
Θετουμε $D = \cup S$. Προφανώς, $\forall A \in S$ έχουμε $A \subseteq \phi(A) \subseteq \phi(D)$
Επομένως $D = \cup S \subseteq \phi(D)$ (1)
Επειδη ϕ ειναι αυξουσα και $D \subseteq \phi(D)$, εχουμε οτι $\phi(D) \subseteq \phi(\phi(D))$
Επομενως $\phi(D) \in S$. Επομένως $\phi(D) \subseteq \cup S = D$ (2)
Απο της (1) ∧ (2) εχουμε οτι $D = \phi(D)$

⇝ Η προηγουμε πρoταση είναι βασικη για την αποδειξη του Θεωρηματος του Shröeder-Bernstein

Θεωρημα Shröeder-Bernsten
Αν A, B είναι δυο συνολα τ.ω αν υπάρχουν $f: A \to B$ και $g: B \to A$ 1-1 συναρτήσεις, τοτε υπάρχει μια 1-1 και επι συνάρτηση $h: A \to B$

(ορισμος υπο συνθηκη πληρες καθε μη κενο και ανω φραγμενο $S \subseteq P$ εχει sup)

Πρόταση (Knaster)
Εστω $(P, \leq)$ ένα υπο συνθηκη πληρες μερικά διατεταγμένο σύνολο με ελάχιστο στοιχείο το m και μέγιστο στοιχειο το M.
Αν $\phi: P \to P$ είναι μια αυξουσα συνάρτηση τότε η f εχει ένα σταθερο σημείο.

Απόδειξη:
Θέτουμε $S = \{x \in P : x \leq \phi(x)\}$. Προφανως, $m \in S$ διότι $\phi(m) \in P$ και συνεπως $m \leq \phi(m)$. Αρα $S \neq \emptyset$ και S είναι ανω φραγμενο.
Επειδη το $(P, \leq)$ είναι υπο συνθηκη πληρες, εχουμε οτι $s = \sup(S)$ υπαρχει
Για καθε $x \in S$, $x \leq s$. Επομένως $\forall x \in S$, $x \leq \phi(x) \leq \phi(s)$.

⇝

Επομένως, $\phi(s)$ είναι άνω φράγμα του S' και συνεπώς, $s \leq \phi(s)$ (1)
Επειδή η ϕ είναι αύξουσα έχουμε ότι $\phi(s) \leq \phi(\phi(s))$. Άρα $\phi(s) \in S'$ και συνεπώς $\phi(s) \leq s$ (2). Από τις (1) ∧ (2) έχουμε ότι $s = \phi(s)$.
Άρα η ϕ έχει ένα σταθερό σημείο.

(β) Επειδή η συνήθης διάταξη $\leq$ κάνει κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ υποσυνολικά πλήρες σύνολο με ελάχιστο στοιχείο το a και μέγιστο στοιχείο το b, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f:[a,b] \to [a,b]$ έχει ένα σταθερό σημείο p $(f(p)=p)$.

Άσκηση
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g: A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Να αποδείξετε ότι:

1) $\sup(-f) = -\inf(-f)$
2) $\inf(-f) = -\sup(-f)$
3) $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$
4) $\sup(f+c) = \sup(f) + c$, $c \in \mathbb{R}$
5) $\sup(|c|f) = |c| \sup(f)$, $c \in \mathbb{R}$
6) $\sup(f+g) \geq \sup(f) + \inf(g)$
7) $\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$
8) $\inf(f+g) \leq \inf(f) + \sup(g)$
9) $\inf(f+c) = \inf(f) + c$, $c \in \mathbb{R}$
10) $\inf(|c|f) = |c| \inf(f)$, $c \in \mathbb{R}$

Οικογένεια συνόλων
Ορισμός:
Έστω I, A είναι σύνολα, $F: I \to A$ μια συνάρτηση. Για κάθε $i \in I$ την τιμή της F στο i $F(i)$ θα την συμβολίζουμε με F_i. Δηλαδή $F(i) = F_i$.
Το σύνολο τιμών $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ το λέμε οικογένεια. Το σύνολο I θα το λέμε σύνολο δεικτών της οικογένειας.
Ορίζουμε $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{F_i : i \in I\} = \{x : \forall i \in I, x \in F_i\}$ και $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{F_i : i \in I\} = \{x : \exists i \in I, x \in F_i\}$

Πρόταση:

Εστω A, B δυο συνολα, $f: A \to B$ μια συνάρτηση, $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του A και $\{Y_i : i \in I\}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του B

Τότε : 1) $f(\bigcup\{X_i : i \in I\}) = \bigcup\{f(X_i) : i \in I\}$

2) $f(\bigcap\{X_i : i \in I\}) \subseteq \bigcap\{f(X_i) : i \in I\}$

3) $f^{-1}(\bigcup\{Y_i : i \in I\}) = \bigcup\{f^{-1}(Y_i) : i \in I\}$

4) $f^{-1}(\bigcap\{Y_i : i \in I\}) = \bigcap\{f^{-1}(Y_i) : i \in I\}$

Απόδειξη:

1) $y \in f(\bigcup\{X_i : i \in I\}) \leftrightarrow \exists x \in \bigcup\{X_i : i \in I\}, f(x) = y \leftrightarrow \exists i \in I$ με $x \in X_i$ και $y = f(x)$ $\leftrightarrow \exists i \in I, y \in f(X_i) \leftrightarrow y \in \bigcup\{f(X_i) : i \in I\}$

2) $y \in f(\bigcap\{X_i : i \in I\}) \leftrightarrow \exists x \in \bigcap\{X_i : i \in I\}$ με $f(x) = y \to \forall i \in I, x \in X_i$ και $f(x) = y$ $\to \forall i \in I, y \in f(X_i) \leftrightarrow y \in \bigcap\{f(X_i) : i \in I\}$.

(3) Λ (4) παρομοια ΗΚ.

Καρτεσιανο γινόμενο

Ορισμος:

Εστω $\{X_i : i \in I\}$ μια οικογενεια συνόλων το σύνολο $\{f : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} : f$ συναρτηση τ.ω $\forall i \in I, f(i) \in X_i\}$ λέγεται καρτεσιανο γινόμενο της οικογένειας $\{X_i : i \in I\}$ και συμβολίζεται με $\prod_{i \in I} X_i$. Δηλαδη $\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} \; \forall i \in I, f(i) \in X_i\}$

Αν $f \in \prod_{i \in I} X_i$ τοτε το $f(i)$ θα το συμβολίζουμε με f_i και τα στοιχεία f μα $(f_i)_{i \in I}$. Ειδικά στην περίπτωση που το συνολο I είναι πεπερασμένο. Έστω $\{1, 2, \dots, \nu\}, \nu \in \mathbb{N}$. Τότε τα στοιχεια $f \in \prod_{i=1}^{\nu} X_i$ θα τα συμβολίζουμε ως $f = (f_1, f_2, \dots, f_\nu)$. Επομένως αν $I = \mathbb{N}$ και $f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ τοτε $f = (f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ή $f(f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots)$

$\to$ Αν $\forall i \in I, X_i = X$ τοτε το $\prod_{i \in I} X_i$ θα το συμβολίζουμε με X^I

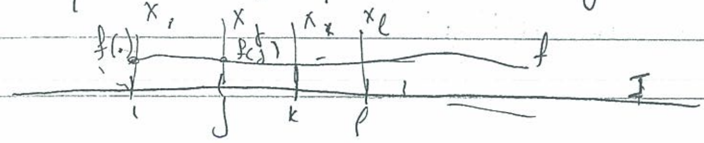
Δηλαδη $X^I = \{f : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} = X, \forall i \in I, f(i) \in I, f(i) \in X_i = X\}$

Είναι το συνολο όλων των συναρτήσεων απο το I στο X.

· Ιδιαιτερα $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμων και $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ είναι το συνολο όλων των συναρτήσων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. και $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $I=\{1,2,\dots,n\}$ στο $\mathbb{R}$.

Το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας $\{X_i : i\in I\}$ το αναπαριστούμε ως g

$f=(f(i), f(j), f(k), \dots)$



15/4/13

Πρόταση:
Έστω $\{A_i : i\in I\}$, $\{B_i : i\in I\}$ δύο οικογένειες συνόλων. Αν $\forall i\in I$, $A_i\subseteq B_i$ τότε $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$

Απόδειξη:
Έστω $f\in\prod_{i\in I} A_i$ έχουμε $\forall i\in I, f(i)\in A_i \xrightarrow{A_i\subseteq B_i} \forall i\in I, f(i)\in B_i \leftrightarrow f\in\prod_{i\in I} B_i$.
Άρα $\prod_{i\in I} A_i\subseteq\prod_{i\in I} B_i$
(Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο)(Ισχύει)

Πρόταση:
Έστω $\{A_i : i\in I\}$, $\{B_i : i\in I\}$ δύο οικογένειες συνόλων. Τότε $\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{i\in I} B_i = \prod_{i\in I} A_i\cap B_i$

Απόδειξη:
Έχουμε $f\in\prod_{i\in I} A_i \cap\prod_{i\in I} B_i \longleftrightarrow f\in\prod_{i\in I} A_i \wedge f\in\prod_{i\in I} B_i \longleftrightarrow \forall i\in I, f(i)\in A_i \wedge \forall i\in I, f(i)\in B_i \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow \forall i\in I, f(i)\in A_i\cap B_i \longleftrightarrow f\in\prod_{i\in I} A_i\cap B_i$. Άρα $\prod_{i\in I} A_i\cap\prod_{i\in I} B_i = \prod_{i\in I} A_i\cap B_i$

Παρατήρηση:
Αν $I=\{1,2,\dots,\nu\}$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $A_1, A_2,\dots, A_\nu$ είναι μη κενά σύνολα. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα $a_i\in A_i$, $i=1,\dots,\nu$
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\alpha: I\to A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_\nu$, $\alpha(i)=\alpha_i$ είναι στοιχείο του $\prod_{i\in I} A_i$. Επομένως $\prod_{i\in I} A_i\neq\emptyset$.
Στην περίπτωση όμως που το σύνολο I είναι άπειρο και τα στοιχεία της οικογένειας $\{A_i : i\in I\}$ είναι μη κενά τότε δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\prod_{i\in I} A_i\neq$
Το αξίωμα της επιλογής AC (Axiom of Choice) είναι η πρόταση:
Για κάθε οικογένεια $\{A_i : i\in I\}$ μη κενών συνόλων το $\prod_{i\in I} A_i\neq\emptyset$.
Κάθε στοιχείο $f\in\prod_{i\in I} A_i$, $f: I\to\bigcup\{A_i : i\in I\}$, $f(i)\in A_i$, λέγεται συνάρτηση επιλογής της οικογένειας $\{A_i : i\in I\}$

Ορισμός:

Το αξίωμα της επιλογής είναι ισοδύναμο με την πρόταση:
Για κάθε οικογένεια $\{A_i : i \in I\}$ μη κενών συνόλων, ανά δύο ξένων μεταξύ τους, υπάρχει ένα σύνολο C τ.ω $\forall i \in I$, το C περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A_i. Το σύνολο C το λέμε σύνολο επιλογής.

Άσκηση:

Έστω $\{A_i : i \in I\}$, $\{B_i : i \in I\}$ δύο οικογένειες μη κενών συνόλων.
Να αποδείξετε ότι το αξίωμα της επιλογής συνεπάγεται ότι $\prod_{i \in I} A_i \cap \prod_{i \in I} B_i = \emptyset$
$\Longleftrightarrow \exists i \in I$ με $A_i \cap B_i = \emptyset$.

Απόδειξη:

$\Rightarrow$ Έχουμε $\emptyset = \prod_{i \in I} A_i \cap \prod_{i \in I} B_i = \prod_{i \in I} A_i \cap B_i$. Το AC συνεπάγεται ότι αν $\forall i \in I$, $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ τότε $\prod_{i \in I} A_i \cap B_i \neq \emptyset$. ΑΤΟΠΟ. Άρα $\exists i \in I$ με $A_i \cap B_i = \emptyset$

$\Leftarrow$ Προφανές.

Λήμμα του ZORN

Ορισμός:

Έστω $(P, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα υποσύνολο $C \subseteq P$ λέγεται αλυσίδα του P αν $(C, \leq_C)$ είναι γραμμικά διατεταγμένο σύνολο.

Π.χ.

- Στο $(\mathbb{R}, \leq)$ το $\mathbb{N}$ καθώς και κάθε άλλο υποσύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι αλυσίδα του $(\mathbb{R}, \leq)$ (Το $\mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο κάθε υποσύνολο του είναι διατεταγμ. άρα αλυσίδα
- Στο $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$, $C = \{\{0\}, \{1\}\}$ δεν είναι αλυσίδα ενώ το $\{\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\}$ είναι αλυσίδα.

Ορισμός:

Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ λέγεται επαγωγικό αν κάθε αλυσίδα του P έχει άνω φράγμα.

π.χ.

- Το $(\mathbb{R}, \leq)$ δεν είναι επαγωγικό διότι η αλυσίδα $\mathbb{N}$ δεν έχει άνω φράγμα.
- Το $(P(\mathbb{R}), \subseteq)$ όπως κάθε $(P(X), \subseteq)$ είναι επαγωγικό διότι για κάθε αλυσίδα $\mathcal{C}$ του $P(X)$, $C = \bigcup \mathcal{C}$ είναι άνω φράγμα του $\mathcal{C}$ (να το αποδείξετε) και μάλιστα $\bigcup \mathcal{C} = \sup(\mathcal{C})$

Παράδειγμα:
Έστω $(V, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{C}$) και $(P, \subseteq)$, $P = \{X \subseteq V : X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο$\}$. Τότε $(P, \subseteq)$ είναι επαγωγικό.
απόδειξη
↳ Έστω $\mathcal{C}$ μια αλυσίδα του P και $C = \bigcup \mathcal{C}$. Προφανώς, $\forall X \in \mathcal{C}$, $X \subseteq C$ και C είναι γραμμικά ανεξάρτητο (Αν C δεν ήταν γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in C$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = 0$ και κάποιο από τα λ_i, $i = 1, \ldots, \nu$ είναι $\neq 0$.
Επειδή, $\forall i = 1, \ldots, \nu$, $x_i \in C = \bigcup \mathcal{C}$, $\exists C_i \in \mathcal{C}$ με $x_i \in C_i$.
Επειδή, $(\mathcal{C}, \subseteq_{\mathcal{C}})$ είναι γραμμικά διατεταγμένο και $\{C_1, C_2, \ldots, C_\nu\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{C}$, έχουμε ότι $\max(\{C_1, C_2, \ldots, C_\nu\})$ υπάρχει.
Έστω ότι $\max(\{C_1, C_2, \ldots, C_\nu\}) = C_\nu$. Επειδή $C_\nu \in P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\forall i \leq \nu$, $x_i \in C_i \subseteq C_\nu$, έχουμε ότι $\forall i \leq \nu$, $x_i \in C_\nu$. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$
Άτοπο. Άρα C είναι γραμμικά ανεξάρτητο) και συνεπώς C είναι άνω φράγμα του $\mathcal{C}$.

Λήμμα του Zorn: (ΛΖ)
Κάθε επαγωγικό μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ έχει ένα τουλάχιστο μεγιστοτικό στοιχείο.

Λήμμα του Zorn $\Rightarrow$ Κάθε διανυσματικός χώρος $(V, +, \cdot)$ επί του $\mathbb{R}$ έχει μια βάση.

Απόδειξη: (για την συνεπαγωγή)

~>

Απο το προηγούμενο παράδειγμα το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$,
$P = \{X' \subseteq V : X'$ είναι γραμμικά ανεξαρτητο$\}$ είναι επαγωγικο.
Άρα απο το Λήμμα του Zorn το $(P, \subseteq)$ εχει ενα μεγιστο
στοιχειο. Εστω το B.
Θα δειξουμε οτι κάθε στοιχειο $x \in V$ γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος
του B. Αν $x \in B$ δεν εχουμε να αποδειξουμε τιποτα.
Εστω ότι $x \notin B$ τοτε $S' = \{x\} \cup B$ δεν είναι γραμμικά ανεξαρτητα.
Άρα, $\exists x_1, x_2, \dots, x_\nu \in S'$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq 0$ για κάποιο $i \leq \nu$ με $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_\nu x_\nu = 0$.
Προφανως, $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}$ (B είναι γραμμικα ανεξάρτητα).
Εστω ότι $x = x_1$. Άρα, $x_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \dots + \frac{\lambda_\nu}{\lambda_1} x_\nu$ γράφεται σαν γραμμικος συνδυασμος
στοιχειων του B. Άρα B είναι βάση για τον διανυσματικό χώρο V.

Πρόταση: AC -> ΠZ

Απόδειξη

Εστω $(P, \leq)$ ένα επαγωγικό μερικα διατεταγμένο σύνολο
Εστω f μια συνάρτηση επιλογής του συνόλου $\mathcal{C} = \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$
Εστω $p_0 = f(P)$. Αν δεν υπάρχει τιποτα μεγαλυτερο του p_0 στο P
Τοτε p_0 είναι το μεγιστο στοιχειο που ψάχνουμε
Αν οχι τοτε $A_1 = \{p \in P : p_0 < p\} \neq \emptyset$ Εστω $p_1 = f(A_1)$. Προφανως, $p_0 < p_1$.
Αν δεν υπαρχει τιποτα μεγαλυτερο του p_1 είναι μεγιστο.
Εστω $A_2 = \{p \in P : p_1 < p\} \neq \emptyset$. Εστω $p_2 = f(A_2)$. Προφανως $p_0 < p_1 < p_2$
Συνεχίζοντας με τον ιδιο τροπο κατασκευαζουμε μια αλυσιδα
$\mathcal{C} = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_\nu < \dots$, $\nu \in \mathbb{N}$. Επειδη το $(P, \leq)$ είναι επαγωγικο, το $\mathcal{C}$
εχει ανω φραγμα. Άρα $A_\nu = \{p \in P : p$ ανω φραγμα του $\mathcal{C}\} \neq \emptyset$.
Εστω $p_N = f(A_N)$ αν δεν υπάρχει στοιχειο του P μεγαλυτερο του
p_N τοτε p_N είναι μεγιστο αλλιως συνεχίζουμε οπως και
προηγουμένως. Η διαδικασία αυτή κάπου "σταματάει"
Άρα αναγκαστικα εχουμε μεγιστο στοιχειό.

Κεραμίδης (αλγεβρικ. μαθ.)
23/4/13

Ορισμός:
Έστω $R \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις την $+, \cdot$.
Αν $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα και ο πολ/σμος ικανοποιεί τις συνθήκες:
1) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in R$ (αντιμεταθετικότητα)
2) $\forall a,b,c \in R \quad , a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (προσεταιριστικότητα)
3) $\forall a,b,c \in R \quad , a(b+c) = ab + ac$ (επιμεριστικότητα)
Τότε λέμε ότι $(R,+,\cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος.
Αν επιπλέον υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in R$ με $1 \cdot x = x \quad \forall x \in R$ τότε λέμε ότι $(R,+,\cdot,1)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

· Ένα υποσύνολο I του R λέγεται ιδεώδες του R αν $(I,+)$ είναι υποομάδα και $\forall a \in I$, $\forall x \in R$, $ax \in I$

π.χ
$I = \{0\}$ και $I = R$ είναι ιδεώδες του R
$I = \{0\}$ λέγεται τετριμμένο ιδεώδες
Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το $(\mathbb{Z},+,\cdot,1)$ $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

Πρόταση:
Έστω $(R,+,\cdot,1)$ ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο ~~στοι~~ στοιχείο τότε ένα υποσύνολο $I \subseteq R$ είναι ιδεώδες
ανν (1) $\forall x,y \in I$, $(x-y) \in I$
(2) $\forall x \in I$, $\forall r \in R$, $rx \in I$

Ένα ιδεώδες I του R λέγεται μέγιστο αν $1 \notin I$ και R είναι το μόνο ιδεώδες του R που περιέχει γνήσια το I.
Τα μέγιστα ιδεώδη είναι χρήσιμα διότι ο δακτύλιος πηλίκο R/M είναι σώμα.

Πρόταση:
ΠΖ ⇒ καθε ιδεώδες I, $I \neq R$ ένας μεταθετικού δακτυλίου $(R, +, \cdot)$ με μοναδιαίο στοιχείο περιέχεται σε ένα μέγιστο ιδεώδες.
Απόδειξη:
Εστω $P = \{J \subseteq R : I \subseteq J$ και J ιδεώδες του R με $1 \notin J\}$
Προφανώς, $P \neq \emptyset$ ($I \in P$ διότι $1 \notin I$ και $I \subseteq I$)
Επίσης $(P, \subseteq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο.
Θα δείξουμε οτι P είναι επαγωγικό.
Εστω $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ μια αλυσίδα του $(P, \subseteq)$ και $C = \cup \mathcal{C}$.
Θ.δ.ο C είναι ιδεώδες με $1 \in C$.
(1) Εστω $x, y \in C \Rightarrow x \in C_i$ και $y \in C_j$ για κάποια $i, j \in I$.
Επειδή $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα $C_i \subseteq C_j$ ή $C_j \subseteq C_i$, εστω $C_i \subseteq C_j$
$\Rightarrow x, y \in C_j$. Επειδη C_j είναι ιδεώδες $x \cdot y \in C_j \Rightarrow x \cdot y \in C = \cup \mathcal{C}$
(2) Εστω $x \in C$ και $r \in R \Rightarrow x \in C_i$ για καποιο $i \in I$.
Αρα $rx \in C_i \Rightarrow rx \in C$. Επομένως C είναι ιδεώδες του R.
Επιπλέον $1 \notin C$ (Αν $1 \in C \Rightarrow 1 \in C_i$ για καποιο i Ατοπο).
Επειδη $I \subseteq C_j$ $\forall j$ εχουμε $I \subset C$.
Αρα $C \in P$ και $C_i \subseteq C$ $\forall i \in I$.
Αρα C ανω φράγμα του $\mathcal{C}$ και συνεπως $(P, \subseteq)$ είναι επαγωγικο.
Απο το ΠΖ, $(P, \subseteq)$ έχει ενα μεγιστο στοιχειο J, δηλαδή $J \in P$ και J δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο ιδεώδες του R εκτος απο το R, το ίδιο. Επειδη το $J \in P$, $I \subseteq J$, $1 \notin J$ και J δεν περιέχεται σε κανενα άλλο ιδεώδες. Αρα J είναι ενα μέγιστο ιδεώδες του R που περιέχει το I. Αρα καθε ιδεώδες I του R περιέχεται σε ένα μεγιστο ιδεώδες.

Θεωρημα:

Το $\Pi Z \Rightarrow AC$

Αποδειξη:

Εστω $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ μια οικογενεια μη κενων συνολων

Θα δειξουμε ότι $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Εστω $P = \{p : I \xrightarrow[\text{συναρτηση}]{} \bigcup\{A_i : i \in I\}$ ωστε $\forall i \in Dom(p), p(i) \in A_i$

Προφανως $(P, \subseteq)$ ειναι μερικα διατεταγμενο συνολο.

Θα δειξουμε οτι $(P, \subseteq)$ ειναι επαγωγικο.

Εστω $\mathcal{C} = \{P_i : i \in I\}$ μια αλυσιδα του P.

Θετουμε $P = \bigcup\{P_i : i \in I\}$ Προφανως $Dom(p) = \bigcup\{Dom(P_i) : i \in I\}$.

Επιπλεον P είναι συνάρτηση. Πραγματι αν $(x,y) \in P$ και $(x,z) \in P$ τοτε $(x,y) \in P_i$ και $(x,z) \in P_j$ για καποιο $i, j \in I$

Επειδη $\mathcal{C}$ είναι αλυσιδα, εχουμε οτι $P_i \subseteq P_j$ ή $P_j \subseteq P_i$.

Εστω $P_i \subseteq P_j \Rightarrow (x,y), (x,z) \in P_j$ και επειδη P_j είναι συναρτηση $y = z$. Άρα p είναι συναρτηση με πεδίο ορισμού καποιο υποσυνολο του I. και τ.ω $\forall i \in I$, $p(i) \in A_i$

Επειδη $P_i \subseteq P$ $\forall i \in I$ εχουμε οτι p ειναι ένα ανω φραγμα του $\mathcal{C}$ και συνεπως $(P, \subseteq)$ είναι επαγωγικο.

Απο το $\Pi Z \Rightarrow \exists$ ενα μεγιστοτικο (γευδομεγιστο) στοιχείο f του P.

Ισχυριζομαι $Dom(f) = I$

Αν $x \in I \setminus Dom(f)$ και $\alpha \in A_x$ τοτε $h = f \cup \{(\alpha, x)\}$, $h \in P$, και $h \supseteq f$, $f \neq h$ ΑΤΟΠΟ!

(f ως γευδομεγιστο του P δεν περιέχεται γνήσια σε κανενα στοιχειο του P).

Άρα $Dom(f) = I$ και $\forall i \in I$, $f(i) \in A_i$.

Άρα $f \in \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ ☒

Συμπέρασμα:

$\Pi Z \Rightarrow AC$

Τέλος κεφαλαίου

22/4/13/ Κοριαρ

Ισοδύναμα Σύνολα

Ορισμός:

Εστω A, B δυο σύνολα. Τοτε θα λέγονται ισοδύναμα (ή έχουν την ιδια ισχύ ή έχουν τον ίδιο πληθυκό αριθμό) ανν υπάρχει "1-1" και "επί" συνάρτηση $f: A \to B$. Συμβολίζουμε $A \simeq B$.

Η σχεση $\simeq$ ειναι σχέση ισοδυναμίας: 1) ανακλαστική ($f: id: A \to A,\ id(x) = x$)
2) συμμετρική
3) μεταβατική

Π.χ

1) $\{a, b, \gamma, \delta\} \simeq \{1, 2, 3, 4\} \simeq \{-1, 0, 1, 2\}$

2) $\mathbb{N} \simeq \{2, 4, 6, \ldots\}$ $\quad f(x) = 2x,\ x \in \mathbb{N}$, $\ y \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ ειναι επι: για $x = \frac{y}{2}$ εχουμε $f(x) = \frac{2y}{2} = y$

3) $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \setminus \{100, 101, 102, \ldots, 1000\}$

Ορίζουμε: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 99 \\ 901 + x, & x \geq 100 \end{cases}$

Η f ειναι 1-1 και επί.

"1-1": Η f ειναι 1-1 διότι αν $f(x_1) = f(x_2)$ τοτε $x_1 = x_2$

Περιπτωσεις:

i) Αν $x_1, x_2 \leq 99$ τοτε $f(x_1) = x_1$ και $f(x_2) = x_2$. Αρα $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) Αν $x_1, x_2 \geq 100$ τοτε $\ldots$ $x_1 = x_2$

iii) Αν $x_1 \leq 99$ και $x_2 \geq 100$ τοτε $f(x_1) = x_1$ και $f(x_2) = 901 + x_2 > 100 > f(x_1)$

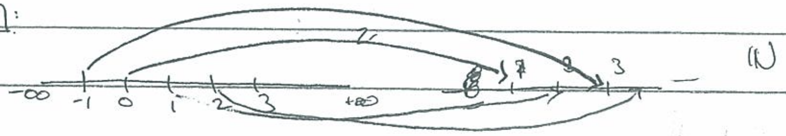
Αρα η περίπτωση αυτή αποκλείεται διότι έχουμε υποθέσει οτι $f(x_1) = f(x_2)$

Ομοια και για το επί.

Ορισμός:
Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο ανν $A=\emptyset$ είτε υπάρχει κάποιο $\nu\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $A\simeq\{1,2,3,\dots,\nu\}$

Άσκηση: (HW)
Δείξτε ότι $\forall A$ πεπερασμένο με $A\subseteq\mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{N}\simeq\mathbb{N}\setminus A$

Άσκηση:
Δείξτε ότι $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{N}$
Λύση:



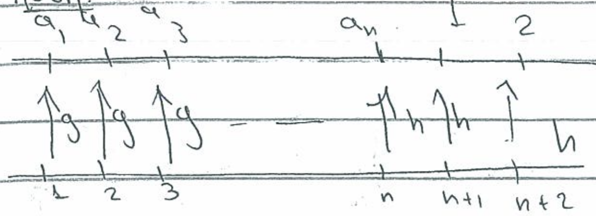
$$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in\mathbb{Z},\ x\geq 1 \\ -(2x-1), & x\in\mathbb{Z},\ x\leq 0 \end{cases}$$

Η f είναι 1-1 και επί
"1-1"
Έστω $f(x_1)=f(x_2)$
Περιπτώσεις:
i) Αν $x_1, x_2\geq 1$, $\longrightarrow$, $x_1=x_2$
ii) Αν $x_1\geq 1$, $x_2\leq 0$ $\underbrace{f(x_1)=2x_1}_{\text{Άρτιος}}$ και $\underbrace{f(x_2)=-(2x_2-1)=-2x_2+1=2(-x_2)+1}_{\text{Περιττός}}$
Άρα $f(x_1)\neq f(x_2)$ οπότε αυτή η περίπτωση αποκλείεται
iii) Αν $x_1, x_2\leq 0$ $\longrightarrow$ $x_1=x_2$
Παρόμοια δείχνουμε ότι είναι "επί".
Επομένως, $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{N}$

Άσκηση:

Έστω $A \neq \emptyset$, ένα πεπερασμένο σύνολο από στοιχεία που δεν είναι φυσικοί αριθμοί. Τότε το $\mathbb{N} \dot{\cup} A \simeq \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: ξένη ένωση συνόλων) ($\mathbb{N} \cap A = \emptyset$)

Λύση:



όπου h είναι η συνάρτηση $h(n+x)=x$

Από υπόθεση $A \simeq \{1,2,\dots,n\}$ όπου $n \in \mathbb{N}$

$g:\{1,2,\dots,n\} \to A$ $(g(x)=a_x)$, $h(n+x)=x$

Ορίζουμε $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N} \dot{\cup} A$ ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \leq n,\ x\in\mathbb{N} \\ x-n=h(x), & x \geq n+1,\ x\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Θ.δ.ο f "1-1"

Έστω $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

Περιπτώσεις:

i) $x_1, x_2 \leq n$, $\Rightarrow$ — $x_1 = x_2$

ii) $x_1, x_2 \geq n+1$ — — $x_1 = x_2$

iii) $x_1 \leq n$ και $x_2 \geq n+1 \Rightarrow f(x_1) = \underbrace{g(x_1)}_{\in A}$ και $f(x_2) = \underbrace{x_2 - n}_{\in \mathbb{N}}$

Όμως δε γίνεται $f(x_1)=f(x_2)$ αφού οι εικόνες ανήκουν σε ξένα μεταξύ τους σύνολα.

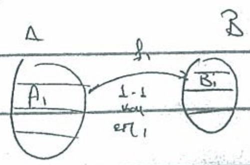
Άρα 1-1 και επί.

Πρόταση 1:

Αν $A_i, i\in I$ και $B_i, i \in I$ είναι δυο οικογένειες συνόλων $A_i \cap A_j = \emptyset$ και $B_i \cap B_j = \emptyset$ για $i \neq j$ με $i,j \in I$ και αν επιπλέον $A_i \simeq B_i$ τότε $\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i \simeq \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $f: \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i \to \dot{\bigcup}_{i\in I} B_i$ με $f(x)=f_i(x)$ για $x \in A_i$



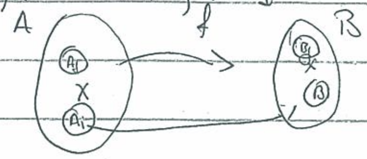
f επί:

Έστω $y \in B$ άρα $\exists\, i_0 \in I$ ώστε $y \in B_{i_0}$. Άρα $\exists\, x \in A_{i_0}$ ώστε $f_{i_0}(x) = y \Rightarrow f(x) = y$ οπότε η f είναι επί.

Παρόμοια f 1-1 ..

Πρόταση 8:

Αν $A_i, i \in I$ και $B_i, i \in I$ δυο οικογένειες συνόλων με $A_i \simeq B_i, \forall i \in I$ τότε $\prod_{i \in I} A_i \simeq \prod_{i \in I} B_i$.



Απόδειξη:

$x = (x_i)_{i \in I}$ όπου $x_i \in A_i$ ή $x = g$ όπου

$g : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ με $g(i) \in A_i$

(Σχόλιο: Το $g(i)$ συνηθίζουμε να το γράφουμε g_i οπότε τη g την γράφουμε $g = (g_i)_{i \in I}$)

Ορίζουμε $f : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$ ως εξής:

$$f\left((g_i)_{i \in I}\right) = \left(f_i(g_i)\right)_{i \in I}$$

20/5/2013

Ορισμός:
Ένα σύνολο A λέγεται πεπερασμένο αν $A=\emptyset$ τότε $\exists$ κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $A \approx \{1,2,\dots,k\}$

Πρόταση:
Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $\nexists$ μη κενό γνήσιο υποσύνολο A του $\{1,2,\dots,n\}$ με την ίδια ισχύ $\{1,2,\dots,n\}$

Απόδειξη: (Με μαθ. επαγωγή)
Για $n=1$ $A \subsetneq \{1\}$ τότε $A=\emptyset$.
Έστω ότι ισχύει για $n=k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$
Δηλαδή αν $\emptyset \neq A \subsetneq \{1,2,\dots,k+1\}$ τότε $A \not\approx \{1,2,\dots,k+1\}$.
Ορίζουμε $A' = A \setminus \{k+1\}$.
Παρατηρήσεις:
1) $A' \subsetneq \{1,2,\dots,k\}$.
Περίπτωση 1: Αν $A'=\emptyset$ τότε θα πρέπει $A=\{k+1\}$.
Το $A \approx \{1,2,\dots,k+1\}$, $k \geq 1$ δε γίνεται διότι σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε μια "1-1" και "επί" συνάρτηση $f:\{k+1\} \to \{1,2,\dots,k+1\}$ και άρα
$f^{-1}(1) = k+1$
$f^{-1}(2) = k+1$ ΑΤΟΠΟ
Άρα σε αυτή την περίπτωση ισχύει η πρόταση.
Περίπτωση 2: $A' \neq \emptyset$, $A' \in \{1,2,\dots,k\}$.
Έχουμε $A' \subsetneq \{1,2,\dots,k\}$
Άρα από επαγωγική υπόθεση $A' \not\approx \{1,2,\dots,k\}$
$A = A' \cup \{k+1\}$ και $\{1,2,\dots,k\} \cup \{k+1\} = \{1,2,\dots,k+1\}$
Αν $A \approx \{1,2,\dots,k+1\}$ τότε αφαιρώντας το $\{k+1\}$ και από τα δυο σύνολα, θα προέκυπτε $A' \approx \{1,2,\dots,k\}$ ΑΤΟΠΟ ~> από επαγωγική υπόθεση παραπάνω

Επομένως $A \not\approx \{1,2,\dots,k+1\}$ ☒

Πρόταση:

Έστω $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο με $k \in \mathbb{N}$ στοιχεία.
Τότε $A' = A \setminus \{a\}$ όπου $a \in A$ περιέχει $(k-1)$ στοιχεία.

Απόδειξη:

Υπάρχει $f : A \to \{1, 2, \dots, k\}$ "1-1" και "επί"

Περίπτωση 1: $k=1$, τότε $A = \{a\}$ και $A' = \emptyset$

Το A' περιέχει $(1-1)$ μηδέν στοιχείο οπότε το αποδείξαμε

Περίπτωση 2: $k > 1$, Τότε θα φτιάξουμε μια $f' : A' \to \{1, 2, \dots, k-1\}$ "1-1" και "ε

Έστω $f(a) = d$ με $d \in \{1, \dots, k\}$ τότε $f' = f^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}) \setminus f^{-1}(\{d\})$

Ορίζουμε $f' : a' \neq a \to f(a')$ για $a' = f^{-1}(p)$ με $p < d$

$a' \neq a \to p-1$ για $a' = f^{-1}(p)$ με $p > d$

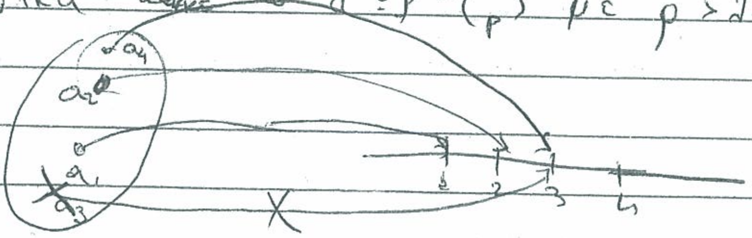
π.χ.

Έστω $d = 3$ τότε το $a_1 = f^{-1}(1)$ το στέλνουμε μέσω της f' στο 1

το $a_2 = f^{-1}(2)$ το στέλνουμε μέσω της f' στο 2

το $a_4 = f^{-1}(4)$ δεν το στέλνουμε στο 4, τότε στέλνουμε στο 3

Γενικά ~~...~~ το $a' = f^{-1}(p)$ με $p > d = 3$ το στέλνουμε στο $p-1$



Μας μένει ν.δ.ο η f' είναι "1-1" και "επί"

"1-1": Έστω $f'(a') = f'(a'')$ Θ.δ.ο $a' = a''$

Περίπτωση 1: $a' = f^{-1}(p')$, ~~...~~ $p' < d \Rightarrow f'(a') = p'$

$a'' = f^{-1}(p'')$, $p'' < d \Rightarrow f'(a'') = p''$

Περίπτωση 2: $a' = f^{-1}(p')$, $p' > d \Rightarrow f'(a') = p' - 1$

$a'' = f^{-1}(p'')$, $p'' > d \Rightarrow f'(a'') = p'' - 1$

$\Rightarrow p' = p''$

Έχουμε $f'(a') = f'(a'') \Rightarrow p' - 1 = p'' - 1 \Rightarrow p' = p'' \Rightarrow a' = a''$

$\longrightarrow$

Περίπτωση 3: $a' = f^{-1}(p'),\ p' > d \Rightarrow f'(a') = p' - 1$

$a'' = f^{-1}(p''),\ p'' < d \Rightarrow f'(a'') = p''$

Έχουμε $f'(a') = f'(a'') \Rightarrow \underbrace{p' - 1}_{\geq d} = \underbrace{p''}_{\leq d}$

Αυτή την περίπτωση δεν την εξετάζουμε γιατί δε μπορεί να συμβεί και τέτοιο.

επί Άσκηση: Να αποδείξετε ότι είναι "επί"

Πόρισμα:
Αν A και B πεπερασμένα και μη κενά με $A \simeq B$ και $a \in A$, $b \in B$ τότε $A \setminus \{a\} \simeq B \setminus \{b\}$.

Απόδειξη:
Έστω $k \in \mathbb{N}$ το πλήθος των στοιχείων του A και B. Τότε
~~Έχουμε~~ 1η περίπτωση: $k = 1 \Rightarrow A = \{a\}$ και $B = \{b\}$ και άρα $\emptyset \simeq \emptyset$.

*

Πρόταση (Άσκηση).
Αν B είναι ένα τυχόν υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου A τότε το B είναι και αυτό πεπερασμένο και μάλιστα ισχύει ότι
- Αν $B \subseteq A \Rightarrow \operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$
- Αν $B \subsetneq A \Rightarrow \operatorname{card} B < \operatorname{card} A$

s.o.s Θ.δ.ο αν $B \neq \emptyset$ είναι ένα υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου A τότε και το B είναι πεπερασμένο.

" Απόδειξη:
Υπάρχει $f: \{1, 2, \dots, m\}$ είναι "1-1" και "επί" $\to A$
Άρα $f: f^{-1}(B)$ είναι "1-1" και "επί" $\to B$
Το $\emptyset \neq f^{-1}(B) \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$
Είναι φανερό ότι $f^{-1}(B)$ ως γνήσιο υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, m\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα παίρνοντας τη σύνθεση $f^{-1} \circ g : \{1, 2, \dots, k\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$
Άρα το B είναι πεπερασμένο

Άσκηση:
Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Τότε οποιοδήποτε μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $T(k) := \{1, 2, \dots, k\}$ είναι και αυτό πεπερασμένο
(με επαγωγή για $k = 0$).

* 2η περίπτωση: $k > 1$ τότε $\left.\begin{array}{l} A \setminus \{a\} \simeq \{1, 2, \dots, k-1\} \\ B \setminus \{b\} \simeq \{1, 2, \dots, k-1\} \end{array}\right\}$ $A \setminus \{a\} \simeq B \setminus \{b\}$

Ορισμός:
Έστω $k \in \mathbb{N}$, $T(k) := \{1, 2, \dots, k\}$

Ορισμός:
Έστω $A \neq \emptyset$ πεπερασμένο σύνολο. Άρα υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $A \simeq T(k)$.
Το k αυτό ονομάζεται ο πληθικός αριθμός (cardinal number) του A και συμβολίζεται $\boxed{\operatorname{card} A = k}$
Αν $A \neq \emptyset$ ορίζουμε $\operatorname{card} A = 0$

Πρόταση:
Κάθε πεπερασμένο σύνολο έχει ένα και μοναδικό πληθικό αριθμό.

Απόδειξη:
- Αν $A = \emptyset$ τότε $\operatorname{card} A = 0$
- Αν $A \neq \emptyset$ (με άτοπο απαγωγή)

Έστω ότι υπάρχουν $k, k' \in \mathbb{N}$ με $k < k'$ ώστε
$A \simeq \{1, 2, \dots, k\}$
$A = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, k'\}$

Από την πρώτη πρόταση αυτό δεν ισχύει άρα δεν γίνεται να υπάρχουν k, k'

22/5/13

Πρόταση:
Έστω $B \subset T(m)$, $m \geq 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow B$ πεπερασμένο και μάλιστα $\operatorname{card} B \leq m$

Απόδειξη:
Με μαθ. επαγωγή
Για $m=1$, $T(m)=\{1\}$ και $B=\emptyset$. Άρα $\operatorname{card} B = 0 < 1 = m$
Έστω ότι ισχύει για $m=k$ και θ.δ.ο ισχύει για $m=k+1$.
Έστω $B \subset T(k+1)$ Θ.δ.ο B πεπερασμένο και $\operatorname{card} B < k+1$.
Ορίζουμε $B' = B \setminus \{k+1\}$
Σχόλιο: Αν υποθέσουμε ότι $B' = T(k)$ τότε το B είναι πεπερασμένο και $\operatorname{card} B = k < k+1$ Άρα ισχύει η πρόταση.
Τώρα, αν υποθέσουμε ότι $B' \subset T(k)$. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι B' πεπερασμένο και $\operatorname{car} B' < k$
Άρα, έχουμε $B = B'$ (στην περίπτωση που $k+1 \notin B$) και άρα B πεπερασμένο και $\operatorname{card} B = \operatorname{card} B' < k+1$
2η περίπ. $B = B' \cup \{k+1\}$ (στην περίπτωση που $k+1 \in B$) και άρα B πεπεπερασμένο με $\operatorname{card} B = \operatorname{car} B' + 1 < k+1$ το δείξαμε ☒

Πρόταση:
Αν A πεπερασμένο σύνολο, και $A \neq \emptyset$ και $B \subset A$. Τότε το B είναι πεπερασμένο $\operatorname{card} B < \operatorname{card} A$.
Απόδειξη:
Αν $A \simeq T(m)$, $m \geq 1$, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$
Άρα υπάρχει $\exists k < m$ έτσι ώστε $B \simeq T(k)$ οπότε το B είναι πεπερασμένο και $\operatorname{card} B = k < m = \operatorname{card} A$. ☒

Άσκηση*

Δείξτε ότι $\forall k, m \geq 1$, $k, m \in \mathbb{N}$ αν $T(k) \simeq T(m) \Rightarrow k = m$

Απόδειξη: (Εις άτοπο απαγωγή)

Έστω $k > m$ τότε $T(k) \supset T(m)$, Άτοπο

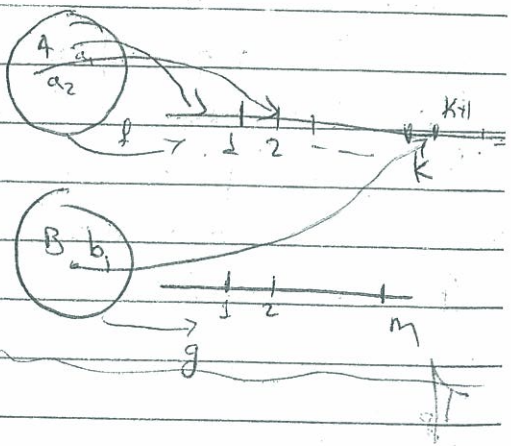
Άρα, από προηγούμενη πρόταση, το $T(m)$ δεν μπορεί να έχει την ίδια ισχύ με το $T(k)$

Δηλαδή, $T(k) \not\simeq T(m)$ ΑΤΟΠΟ. Άρα $k = m$.

Πρόταση:

Αν A, B πεπερασμένα και ξένα μεταξύ τους σύνολα, $A \cap B = \emptyset$, τότε $A \cup B$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $card(A \cup B) = card A + card B$.

Απόδειξη:



Έστω $A \overset{f}{\simeq} T(k)$ και $B \overset{g}{\simeq} T(m)$

Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση

$h: A \cup B \to T(m+k)$, "1-1" και "επί"

Ορίζουμε $h(y) = \begin{cases} f(y), & y \in A \\ g(y) + k, & y \in B \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι η h είναι "1-1" και "επί"

h επί:

Έστω $p \leq m + k$

1η περίπτωση: Έστω $p \leq k$ τότε $y = f^{-1}(p)$ διότι $h(y) = f(f^{-1}(p)) = p$

2η περίπτωση: Έστω $p \geq k+1$ τότε $y = g^{-1}(p-k)$ διότι $h(y) = g(g^{-1}(p-k)) + k =$

1-1 για σπίτι

☒

Πρόταση:
Έστω A, B δυο πεπερασμένα σύνολα. Τότε $A \cup B$ και $A \times B$ είναι πεπερασμένα σύνολα και ισχύει

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card\, A \cap B$
- $card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$

Απόδειξη

- $A \cup B = A \dot\cup (B \setminus A)$ = πεπερασμένη ένωση ξένων συνόλων άρα πεπερασμένη

$card(A \cup B) = card(A) + card(B \setminus A)$ (1)

$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

Έχουμε $(B \setminus A) \dot\cup (A \cap B) = B \Rightarrow card(B \setminus A) + card(A \cap B) = card(B)$

$card(B \setminus A) = card\, B - card(A \cap B)$ (2)

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

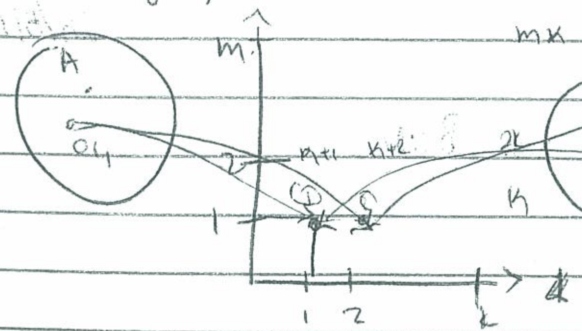
- Μας μένει να δείξουμε ότι $A \times B$ είναι πεπερασμένο και ισχύει $card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$

Έστω $A \simeq T(m)$, δηλαδή $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$B \simeq T(k)$, δηλαδή $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$

$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

Θα δείξουμε ότι $A \times B \simeq T(m \cdot k)$.



$(a_i, b_j) \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} (i, j) \in T(m) \times T(k)$

$\downarrow$

$p_{ij} = (i-1)k + j$

Δείξτε ότι $T(m) \times T(k) \simeq T(m \cdot k)$ με $(i, j) \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} (i-1)k + j$

Άρα $A \times B \simeq T(m\, k)$, άρα είναι πεπερασμένο και έχει $card(A \times B) = card A \cdot card B$.

Ορισμος:
Ενα συνολο $A \neq \emptyset$ θα λεγεται απειρο ή απεραντο ανν A δεν ειναι πεπερασμενο.

Ασκηση:
Δειξτε οτι $\mathbb{N}$ ειναι απεραντο
Λυση:
Εις ατοπο απαγωγη
Εστω $\mathbb{N}$ ειναι πεπερασμενο τοτε $\mathbb{N} \simeq T(m)$ για $m \geq 1$
Το $\mathbb{N} \supset T(m+1) \supset T(m) \simeq \mathbb{N}$
Αρα $\operatorname{card}\mathbb{N} > \operatorname{card}(m+1) > \operatorname{card}(m) = \operatorname{card}\mathbb{N}$ ΑΤΟΠΟ

Προταση:
Εαν A ειναι απεραντο και B πεπερασμενο τοτε $A \setminus B$ ειναι απεραντο.
Αποδειξη
Εις ατοπο απαγωγη.
Εστω $A \setminus B$ ειναι πεπερασμενο
Αρα $(A \setminus B) \cup B^{\epsilon\pi}$ = πεπερασμενο. Αρα A = πεπερασμενο. Ατοπο!

25/5/13

Προταση:
Ενα συνολο A ειναι απεραντο ανν $\exists B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$
Αποδειξη:
$\boxed{\Leftarrow}$ Εστω οτι υπαρχει καποιο $B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$. Θα αποδειξουμε οτι το A ειναι απεραντο
(Εις ατοπο απαγωγη)
Εστω οτι το A ειναι πεπερασμενο. Αρα το B θα επρεπε να ειναι πεπερασμενο ΑΤΟΠΟ (επειδη $B \simeq \mathbb{N}$)
$\boxed{\Rightarrow}$ Εστω οτι A απεραντο. Θα αποδειξουμε οτι υπαρχει $B \subseteq A$, $B \simeq \mathbb{N}$ ~~[illegible]~~
Θα κατασκευασουμε $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ τω ολα τα B να ειναι διαφορετικα
Εχουμε οτι $A \neq \emptyset$, αρα $\exists\, b_1 \in A$, $A \setminus \{b_1\}$ ειναι απεραντο

Άρα $A \setminus \{b_1\} \neq \emptyset$, άρα $\exists b_2 \in A \setminus \{b_1\}$

Γενικά, βρίσκουμε κάποιο $b_{i+1} \in A \setminus \{b_1, \dots, b_i\}$, $\forall i \geq 1$.

Ορίζουμε, $f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} B$ με $f(i) = b_i$

<u>Άσκηση</u>: ΕΠΕΣΕ!

Έστω $A \neq \emptyset$ και $a \in A$. Δείξτε ότι το A είναι απέραντο ανν $\exists B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$ και $a \notin B$

<u>Απόδειξη</u>:

$\Leftarrow$) Προφανές.

$\Rightarrow$) Έστω ότι το B που κατασκευάζουμε παραπάνω περιέχει το a.

Δηλαδή $a = b_{i_0}$, $i_0 \in \mathbb{N}$ τότε παίρνουμε $B' = B \setminus \{a\} = B \setminus \{b_{i_0}\} = \mathbb{N} \setminus \{i_0\} \simeq \mathbb{N}$

<u>Άσκηση</u>: (Θα αποδείξουμε το $\mathbb{N} \setminus \{i_0\} \simeq \mathbb{N}$)

Αν Γ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ τότε $\mathbb{N} \setminus \Gamma \simeq \mathbb{N}$

<u>Λύση</u>:

$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$. $\mathbb{N} \setminus \Gamma = \mathbb{N} \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$

Συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus \Gamma \to \mathbb{N}$.

- Αν υπάρχουν $x < \gamma_1$ τότε $f(x) = x$
- Αν υπάρχουν $\gamma_1 < x < \gamma_2$ τότε $f(x) = x - 1$
- Αν υπάρχουν $\gamma_2 < x < \gamma_3$ τότε $f(x) = x - 2$
- Αν υπάρχουν $\gamma_3 < x < \gamma_3$ τότε $f(x) = x - 3$

Γενικά αν υπάρχουν $\gamma_i < x < \gamma_{i+1}$, $f(x) = x - i$

<u>Άσκηση</u>:

Δείξτε ότι A απέραντο ανν $A \neq \emptyset$ και $\forall a \in A$, $A \setminus \{a\} \simeq A$

<u>Απόδειξη</u>:

$\Leftarrow$) (Εις άτοπο απαγωγή)

Υποθέτω ότι $A \neq \emptyset$, $A \setminus \{a\} \simeq A$. Αν A είναι πεπερασμένο τότε $A \setminus \{a\} \not\simeq A$ άτοπο

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι A απέραντο άρα $A \neq \emptyset$. Θα φτιάξουμε μια συνάρτηση

$f: A \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A \setminus \{a\}$ ως εξής: Υποθέτουμε ότι $B = \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq A$ όπου ορίζουμε

~>

$f(b_i) = b_{i+1}$. Ακόμα ορίζουμε $f(a) = b_1$ και τέλος για $x \neq a$ και $x \notin B$ ορίζουμε $f(x) = x$.
Η f είναι 1-1 και επί.

Πόρισμα: Αν A είναι απέραντο ανν $\forall \Gamma \subseteq A$ πεπερασμένο το $A \setminus \Gamma \simeq A$

Άσκηση: Μπορεί να πέσει
Δείξτε ότι το A είναι άπειρο ανν $\exists$ γνήσιο υποσύνολο $B \subset A$ με $B \simeq A$
Απόδειξη:
$\Rightarrow$] Έστω A απέραντο. Τότε ορίζουμε $B = A \setminus \{a\}$, για $a \in A$.
$\Leftarrow$] Έστω ότι $\exists B \subset A$ με $B \simeq A$ και θα δείξουμε ότι A άπειρο.
(Εις άτοπο απαγωγή).
Αν A είναι πεπερασμένο τότε θα έπρεπε $B \not\simeq A$ (Άτοπο)

Ορισμός:
Λέμε ότι το A υπερέχει του B ανν $\exists$ μια συνάρτηση $f: B \to A$, 1-1.
Συμβολισμός: $B \preccurlyeq A$.

Ορισμός:
Λέμε ότι A γνήσια υπερέχει του B ($B \prec A$) αν $B \preccurlyeq A$ και $B \not\simeq A$

Παράδειγμα:
Έστω $A \neq \emptyset$, πεπερασμένο και B απέραντο. Τότε $A \prec B$
Λύση:
- $A \not\simeq B$, επειδή A πεπερασμένο και B απέραντο
- $A \preccurlyeq B$. Έστω $B_1 \subset B$ και $B_1 \simeq \mathbb{N}$, $B_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Ακόμα $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την $f(a_i) = y_i$.
Οπότε η f είναι 1-1 συνάρτηση $f: A \to B$
Άρα $A \prec B$

__Άσκηση__!!

Αν $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \propto \mathbb{N}$. Τότε A είναι πεπερασμένο.

__Απόδειξη:__

(Εις άτοπο απαγωγή)

Αν A είναι άπειρο τότε θα δείξουμε ότι θα έπρεπε $A \simeq \mathbb{N}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Από τις υποθέσεις: $A \subseteq \mathbb{N}$ και άρα $A \preceq \mathbb{N}$
$B \subseteq A$ και άρα $\mathbb{N} \preceq A$ } Από θεώρημα Schröder-Bernstein (S-B) $A \simeq \mathbb{N}$ __ΑΤΟΠΟ__

__Θεώρημα (Schröder - Bernstein)__

Έστω A, B τυχαίο σύνολο. Αν $A \preceq B$ και $B \preceq A$ τότε $B \simeq A$.

__Ιδιότητες__ $\preceq$

1. $A \preceq A$
2. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \preceq B$ (Η $f: A \to B$ είναι ταυτοτική)
   ↳ __Σχόλιο__: Αν $A \preceq B$ τότε δεν έπεται ότι $A \subseteq B$.
3. Αν $A \preceq B$ και $B \preceq \Gamma$ τότε $A \preceq \Gamma$ (μεταβατική) (σύνθεση των f και g).
4. $A \preceq B$ ανν $A \propto B$ ή $A \simeq B$ (αν είναι επί παμε στην 2η περ αν όχι στην 1η)
5. $A \simeq B$ και $A \preceq B$ και $B \preceq A$ (η μια κατεύθυνση της απόδειξης είναι B-S και η άλλη προφανές)
6. Αν $f: A \to B$ 1-1 τότε $\exists g: B \to A$ επί ($A \preceq B$)

27/5/13

__Άσκηση__: Αξ

Έστω A, B τυχαία σύνολα. Τότε $A \preceq B \Leftrightarrow$ υπάρχει $g: B \to A$, g επί.

__Λύση:__

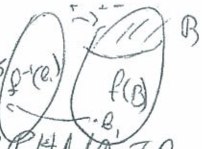
$\Leftarrow$) Έστω $g: B \to A$ επί. Θα κατασκευάσουμε μια $f: A \to B$, f 1-1

Έστω $a \in A$. Τότε $g^{-1}\{a\} \subseteq B$. Έστω $a' \neq a$. Τότε $g^{-1}\{a'\} \cap g^{-1}\{a\} = \emptyset$

__Αξίωμα επιλογής__: Έστω C μια συλλογή από ξένα μεταξύ τους μη κενά σύνολα $A_i, i \in I$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση f με $Dom(f) = I$ έτσι ώστε $f(i) \in A_i$ $\forall i$

Ορίζουμε τον $C = \{g^{-1}\{a\}, a \in A\}$ από αξίωμα επιλογής υπάρχει μια συνάρτηση f με $Dom(f) = A$ έτσι ώστε $f(a) \in g^{-1}\{a\} \subseteq B$ και άρα $f(a) \in B$

~>

ΟΧΙ
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1.
Έστω $f(a)=f(a')$. Άρα $f(a)\in g^{-1}(\{a\})$ και $f(a')\in g^{-1}(\{a'\})$
Άρα $g^{-1}(\{a\})\cap g^{-1}(\{a'\})\neq\emptyset$. Άρα $g^{-1}(\{a\})=g^{-1}(\{a'\})$. Άρα $a=a'$.
Άρα η f είναι 1-1 και άρα f είναι η ζητούμενη συνάρτηση.
$\Leftarrow$) Έστω $f:A\to B$, f 1-1. Θέλουμε να κατασκευάσουμε $g:B\to A$ g επί.
Ορίζουμε την g ως εξής: Για $b_1\in f(B)$. Ορίζουμε $g(b_1)=f^{-1}(b_1)$
Για $b_1\notin f(B)$. Ορίζουμε $g(b_1)=a_0$, όπου $a_0\in A$.
Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση g είναι επί.
Η g είναι επί διότι αν $a\in A$ τότε $g(f^{-1}(a))=f(f^{-1}(a))=a$ και άρα το $f^{-1}(a)$ είναι προεικόνα του a μέσω της g.

Σχόλιο: Αν $A=\emptyset$ και $g:B\to A$ επί τότε (ανεξάρτητα ποια είναι η g) έχουμε κάποια $f:A\to B$, f 1-1 ($f=\emptyset$).

Άσκηση:
Δείξτε ότι $N\times N\simeq N$
Απόδειξη:
Από Θεώρημα S-B αρκεί ν.δ.ο $N\times N\preceq N$ και $N\preceq N\times N$
1) Θα κατασκευάσουμε $N\preceq N\times N$: Ορίζουμε $f:N\to N\times N$ (θέλουμε να είναι 1-1) ως εξής: $f(n)=(n,n)$. Προφανώς, η f είναι 1-1.
Άλλος τρόπος: Ορίζουμε μια $g:N\times N\to N$ (θέλουμε να είναι επί) ως εξής: $g(m,n)=n$
Προφανώς, η g είναι επί.
2) $N\times N\preceq N$: Ορίζουμε $f:N\times N\to N$ (θέλουμε να είναι 1-1) ως εξής:
$f(n,m)=2^n(2m+1)$ αριθμός περιττός.
Θα κατασκευάσουμε $g:N\to N\times N$ που να είναι "επί" $g(n)=(n_1,m_1)$, όπου $n=2^{n_1}(2m_1+1)$
Η g είναι "επί" (π.χ. Για $n=18=2(2\cdot 4+1)$)

Παράδειγμα:
Δείξτε ότι το $Q^+=\{\frac{p}{q}: p\in N, q\in N\}\simeq N$
Λύση.
Από S-B αρκεί ν.δ.ο $Q^+\preceq N$ και $N\preceq Q^+$

$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}^+$: Θα βρίσκουμε $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, "1-1" $f(n) = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}^+$ και προφανώς f = "1-1"
~~$\mathbb{Q}$~~ $\mathbb{Q}^+ \preceq \mathbb{N}$: Θα φτιάξουμε $f': \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, "1-1", $f_1(\frac{p}{q}) = 2^p(2q+1) \in \mathbb{N}$ και είναι "1-1"

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$ Σ.Ο.Σ

Άσκηση:
Να δείξετε ότι $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Z}$

Λύση:
Από S-B αρκεί ν.δ.ο $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{Q}$
Θα βρίσκουμε $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ "1-1", $f(n) = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ και f "1-1"
$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$: $f_1(0) = 0$, $f_1(-\frac{p}{q}) = 2^p(2(-q)-1) \in \mathbb{Z}^-$, $f_1(p/q) = 2^p(2q+1)$, $p, q \in \mathbb{N}$
Η f_1 είναι "1-1".

Άσκηση:
Δείξτε ότι $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$

Λύση:
Από S-B αρκεί ν.δ.ο $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$
$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$: Ορίζουμε $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με $f(n) = n$ η οποία είναι "1-1"
$\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}$: Ορίζουμε $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ~~1-1~~ επι. με $g(1) = 0$, $g(2k) = k$, $g(2k+1) = -k$ επί.

Άσκηση:
Αν A, B, Γ τυχαία σύνολα και $B \prec \Gamma$ και $A \approx B$ τότε $A \prec \Gamma$

Λύση:
Από $B \prec \Gamma$ έπεται ότι $B \preceq \Gamma$ οπότε $A \preceq B$ και $B \preceq \Gamma$
Άρα $A \preceq \Gamma$ μένει να δείξουμε ότι το $A \not\approx \Gamma$
(σε άτοπο απαγωγή)
Έστω $A \simeq \Gamma$. Άρα $A \prec \Gamma \simeq A$. Άρα $A \prec A$ Άτοπο
Επομένως $A \prec \Gamma$.

Άσκηση:
$A_1 \precsim \mathbb{N}$, $A_2 \precsim \mathbb{N}$ τοτε $A_1 \cup A_2 \precsim \mathbb{N}$
Λυση:
Εστω $f_1 : \mathbb{N} \to A_1$ επι και $f_2 : \mathbb{N} \to A_2$ επι
Θα κατασκευασουμε μια $f : \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$ με

$$f(n) = \begin{cases} f_1(k) \in A_1 & , n = 2k \\ f_2(\lambda) \in A_2 & , n = 2\lambda + 1 \end{cases}$$

29/5/13

Ορισμος:
(1) Ενα συνολο A λεγεται αριθμησιμο ανν $A \approx \mathbb{N}$
(2) Ενα συνολο A λεγεται το πολυ αριθμησιμο ανν $A \precsim \mathbb{N}$
(3) Ενα συνολο A λεγεται απεραντο ανν $\mathbb{N} \precsim A$. (το αποδειξαμε)
(4) Ενα συνολο A ειναι πεπερασμενο ανν $A \propto \mathbb{N}$
(5) Ενα συνολο A λεγεται υπεραριθμησιμο ανν $\mathbb{N} \propto A$

Προταση:
Αν $A \propto \mathbb{N}$ τοτε ειναι πεπερασμενο.
Αποδειξη (Εις ατοπο απαγωγη)
Υποθετουμε οτι A δεν ειναι πεπερασμενο (αρα απεραντο)
Απο (3) $\mathbb{N} \precsim A$. Αρα απο $A \propto \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \precsim A$ εχουμε απο μεταβατικη ιδιοτητα οτι $\mathbb{N} \propto \mathbb{N}$. Ατοπο
Αντιστροφα, αν A πεπερασμενο τοτε εχουμε δειξει οτι $A \propto \mathbb{N}$.

Προταση:
Ενα συνολο ειναι υπεραριθμησιμο ανν ειναι απεραντο και δεν ειναι ουτε αριθμησιμο (ουτε το πολυ αριθμησιμο)
Αποδειξη:
$\Rightarrow$) Εστω $\mathbb{N} \propto A^{(*)}$ αρα $\mathbb{N} \precsim A$ και A απεραντο.
(Εις ατοπο απαγωγη)
Αν A αριθμησιμο τοτε $A \approx \mathbb{N}$ και αρα $A \precsim \mathbb{N}$ (**)

Από (*) και (**) και μεταβατική ιδιότητα, έχουμε $\mathbb{N} \propto \mathbb{N}$ ΑΤΟΠΟ
Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το A δεν μπορεί να είναι το πολύ αριθμήσιμο
$\Leftarrow$ A απέραντο $\Rightarrow \mathbb{N} \preceq A$ } $\Rightarrow \mathbb{N} \propto A$
A όχι αριθμήσιμο $\Rightarrow A \not\approx \mathbb{N}$ }

Θεώρημα (Cantor)
Για κάθε σύνολο X, το $X \propto P(X)$
Απόδειξη:
Θα δείξουμε ότι $X \preceq P(X)$
$f(x) = \{x\}, \forall x \in X$, η f είναι "1-1"
Δείχνουμε ότι $X \not\approx P(X)$
1η περίπτωση: Αν X πεπ. τότε το P(X) περιέχει είτε ένα στοιχείο για $X = \emptyset$ είτε 2^n στοιχεία για $card X = n \geq 1$. Άρα $X \not\approx P(X)$
Γενικά: (Εις άτοπο απαγωγή)
Έστω μια $f: X \to P(X)$ "1-1" και τότε θεωρούμε το σύνολο A
$A = \{x \in X \notin f(x)\} \in P(X)$ (πλήρως)
Αφού η f είναι "επί", έχει μια προεικόνα ~~της~~
Έστω $a \in X$ $f(a) \in A$ $a \overset{?}{\in} A \Leftrightarrow a \in X$ και $a \notin f(a) \Rightarrow a \in X$ και $a \notin A$ Ατο

Παραδείγματα:
$\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$ Από θεώρημα Cantor $\mathbb{N} \propto P(\mathbb{N})$.

Υπόθεση του συνεχούς (αξίωμα)
Δεν υπάρχει σύνολο U έτσι ώστε $\mathbb{N} \propto U \propto P(\mathbb{N})$

Άσκηση 1
Δείξτε ότι $[0,1] \approx P(\mathbb{N})$

Πρόταση

Έστω $b>1$ ένας φυσικός αριθμός. Τότε κάθε $x \in (0,1]$ έχει μία και μοναδική b-δική μη τερματιζόμενη παράσταση της μορφής $x = x_1/b + x_2/b^2 + \dots + x_n/b^n$ όπου $x_i \in \mathbb{N}$ και $b > x_i \geq 0$. Στην περίπτωση που το x είναι της μορφής $x = a/b^r$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ και για κάποιο $a \in \mathbb{N}, a \leq b^r$ τότε (και μόνο τότε) ο x έχει δύο b-δικές παραστάσεις, η μία μη τερματιζόμενη και η άλλη τερματιζόμενη.

Ακόμα ισχύει, αν $\frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \dots + \frac{x_m}{b^m} = \frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + \dots + \frac{y_n}{b^n}$ είναι δύο ίσες τερματιζόμενες b-δικές παραστάσεις τότε αναγκαστικά $m=n$ και $x_1=y_1, x_2=y_2, \dots, x_m=y_m$.

Ακόμα ισχύει, αν $\frac{x_1}{b} + \dots + \frac{x_m}{b^m} + \dots = \frac{y_1}{b} + \dots + \frac{y_m}{b^m} + \dots$ είναι δύο ίσες μη-τερματιζόμενες b-δικές παραστάσεις τότε $x_1=y_1, \dots, x_m=y_m, \dots$

Ακόμα ισχύει, αν $\frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \dots + \frac{x_m}{b^m} = \frac{y_1}{b} + \frac{y_2}{b^2} + \dots + \frac{y_n}{b^n} + \dots$ δύο ίσες b-δικές παραστάσεις η μία τερματιζόμενη και η άλλη μη τερματιζόμενη, τότε αναγκαστικά $x_1=y_1, x_2=y_2, \dots,$ $y_m = x_m - 1$ και $y_{m+1} = b-1, y_{m+2} = b-1, \dots, y_i = b-1$

Άσκηση:

Έστω $x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}}$, όπου $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ φυσικοί.

Δείξτε ότι ο x δεν μπορεί να είναι ίσος με κάποιον αριθμό μη-τερματιζόμενο της μορφής $y = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \dots$, όπου $m_1 < m_2 < \dots$ μια άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών.

Λύση:

(Εις άτοπο απαγωγή)

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο 2-αδικές παραστάσεις είναι ίσες τότε θα έπρεπε $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \ldots, n_k = m_{k-1}$ και $\mathcal{I}m_k = \mathcal{I}n_k - 1$ που δεν γίνεται ~~..~~ <u>Άτοπο</u>

Άρα δεν μπορεί ένα τέτοιο x να γραφτεί σαν τέτοιο y.

<u>Π.χ</u>

$$x = 0.00000101010001 = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{0}{2^{12}} + \underbrace{\frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} + \cdots}_{\frac{1}{2^{12}}}$$

$n_1 = 3$

$n_2 = 4$

$n_3 = 6 = n_k$

$$= 0.00000101000011\ldots$$

<u>Λύση</u> (Άσκησης 1)

Πρέπει το $(0,1] \preceq P(\mathbb{N})$ και $P(\mathbb{N}) \preceq (0,1]$

Θα βρούμε μια $f : (0,1] \to P(\mathbb{N})$ "1-1"

Έστω $x \in (0,1]$ τότε ο x σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχει μια και μοναδική ~~..~~ μη τερματιζόμενη 2-αδική παράσταση.

$$x = 0, x_1, \ldots \ldots = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \cdots + \quad \text{όπου } x_i = 0 \text{ ή } 1$$

Π.χ

$x = 0,00010 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_4 = 1$

$x_5 = 0$

$\to A_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\} \in P(\mathbb{N})$

Αν $A_x = A_y$ θα είχαμε ότι τα x και y έχουν ακριβώς τις ίδιες μη τερματιζόμενες 2-αδικές παραστάσεις, δηλαδή $x_1 = y_1, x_2 = y_2 \ldots$

Επειδη κάθε αριθμος στο $[0,1]$ έχει μονοσήμαντη μη τερματιζόμενη 2-αδική αναπαράσταση, εχουμε $x=y$.

Άρα η f είναι "1-1" και $[0,1] \precsim P(\mathbb{N})$

Θα δειξουμε οτι $P(\mathbb{N}) \precsim [0,1]$

$$\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \text{ με } n_1 < n_2 < \dots < n_k$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}}$$

$$\{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{k-1}, n_k - 1, n_k, n_k + 1, n_k + 2, \dots\} \Rightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k - 1}} + \frac{1}{2^{n_k + 2}} + \dots$$

<u>Διορθωση:</u>

$$\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \xrightarrow{g} \frac{1}{2^{2n_1}} + \frac{1}{2^{2n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{2n_k}}$$

$$\{m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots\} \longrightarrow \frac{1}{2^{2m_1}} + \frac{1}{2^{2m_2}} + \dots + \frac{1}{2^{2m_k}} + \dots$$

(Απο προηγουμενη ασκηση ενα πεπερασμενο δεν μπορουμε να το στειλουμε σε ενα απειρο πληθος και αρα είναι g "1-1")

Άρα $P(\mathbb{N}) \precsim [0,1]$.