<u>ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</u>

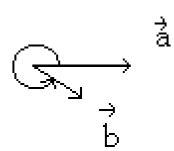
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1,2</u>

1.) Δύο διανύσματα $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$ και $\vec{a},\vec{b}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά. Έτσι σ' ένα οποιοδήποτε τρίγωνο δεν μπορεί να είναι κάποια απ' τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ίσα.

2.) Σχετικά με τη γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b}$: Με $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ θα εννοούμε τη μικρότερη γωνία από τις δύο που σχηματίζονται όταν ενώσουμε τις αρχές των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Έχουμε λοιπόν $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\sphericalangle(\vec{b},\vec{a})$. Όμως όταν έχουμε ορίσει φορά στροφής (όπως π.χ. στο επίπεδο Oxy) με $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ θα εννόουμε την αριστερόστροφη (δεξία προς αριστερά) γωνία από το $\vec{a}$ στο $\vec{b}$. Φυσικά τότε $\measuredangle(\vec{b},\vec{a})=2\pi-\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

3.) (συνέχεια) Με τον τύπο του εσωτερικού γινομένου $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ και της $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ διότι προφανώς $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

Στον τύπο $\sin(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ του εξωτερικού γινομένου βρίσκουμε στα σίγουρα το ημίτονο της $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ αλλά όχι στα σίγουρα και της $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$. Αυτό διότι εάν τύχει $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=2\pi-\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ όπως στο σχήμα :



τότε $\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

4.) (συνέχεια) Για να υπολογίσουμε λοιπόν σωστά το sin της $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ εργαζόμαστε με την βοήθεια του μικτού γινομένου:

εάν $(\vec{a},\vec{b},\vec{z}_0)>0$ τότε $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ και ίσα ημίτονα
εάν $(\vec{a},\vec{b},\vec{z}_0)<0$ τότε $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=2\pi-\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ και αντίθετα ημίτονα
εάν $(\vec{a},\vec{b},\vec{z}_0)=0$ τότε $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ και ίση με 0 ή π

(τα $\vec{a},\vec{b}$ υποθετουμε χωρις βλαβη οτι ανήκουν στο xOy επίπεδο)

π.χ. Να βρεθεί η γωνία φ που πρέπει να στρίψουμε τον Ox στα αριστερά να γίνει παράλληλος με την (ε) 3x + 2y + 5=0.

Λύση: Τα διανύσματα $\vec{a}=(2,-3)$ και $-\vec{a}=(-2,3)$ είναι παράλληλα με την (ε) οπότε η φ είναι η μικρότερη από τις $\measuredangle(\vec{x}_0,\vec{a})$ και $\measuredangle(\vec{x}_0,-\vec{a})$. Έχουμε $(\vec{x}_0,\vec{a},\vec{z}_0)=...=-3<0$, $(\vec{x}_0,-\vec{a},\vec{z}_0)=...=3>0$. Άρα τελικά φ=$\measuredangle(\vec{x}_0,-\vec{a})=\sphericalangle(\vec{x}_0,-\vec{a})$. Οπότε

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{x}_0\times-\vec{a}|}{|\vec{x}_0|\cdot|-\vec{a}|}=\frac{|\vec{x}_0\times\vec{a}|}{|\vec{a}|} \quad \text{και} \quad \cos\varphi=\frac{-\vec{a}\cdot\vec{x}_0}{|\vec{x}_0|\cdot|-\vec{a}|}=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}_0}{|\vec{a}|}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Από την τιμή του cos μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε ακριβώς την φ= τοξ cos$\frac{-2}{\sqrt{3}}\cong 123^0$.

5.) Στις ασκήσεις καλό θα ήταν όλες οι ευθείες του επιπέδου 0xy : Ax + By + Γ=0 να έχουν A>0. Διότι τότε η γωνία $\measuredangle(\vec{x}_0,(\varepsilon))$ είναι ίση με $\sphericalangle(\vec{x}_0,(-\mathrm{B},\mathrm{A}))$ και έτσι αν χρειαστούμε να υπολογίσουμε τα συνημίτονα και ημίτονα (σε τύπους αλλαγής συντεταγμένων να μην κάνουμε λάθος κάποιο πρόσημο).

6.) Αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά του 0xy στο $O'(x_0,y_0)$ και μετά στροφή κατά αριστερή γωνία φ τότε οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων είναι

$$x=x_0+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \quad (*)$$
$$y=y_0+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi \quad (*)$$

π.χ. Βρείτε την $x'y'$ εξίσωση της $xy=4$ όταν στρίψουμε τον Oxy γύρω από το O κατά αριστερή γωνία φ=45^0.

Λύση: Έχουμε $\measuredangle(\mathrm{Ox},\mathrm{Ox}')=\sphericalangle(\mathrm{Ox},\mathrm{Ox}')=\frac{\pi}{4}$ οπότε αντικαθιστώντας στους τύπους (*) παίρνουμε $x=x'\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}y'$ και $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$ και αντικαθιστώντας στην $xy=4$ βρίσκουμε μετά από τις σχετικές πράξεις $\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{8}=1$ δηλαδή εξίσωση υπερβολης.

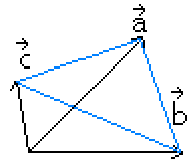
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν στρίβαμε δεξιά κατά γωνία 45^0 τότε θα έπρεπε να θέσουμε στους (*) $\phi=2\pi-\frac{\pi}{4}$.

7.) Το μικτό γινόμενο $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ έχει ± πρόσημο που εξαρτάται από το αν είναι δεξιόστροφο το $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (+ πρόσημο) ή αριστερόστροφο (- πρόσημο). Ανάλογα τώρα με το πρόσημο έχουμε $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\pm V$, οπου V ο όγκος του παραλληλεπιπεδου των $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

8.) (συνέχεια) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3\\ c_1c_2c_3\end{vmatrix}(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Εάν όμως η βάση του χώρου μας $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$ είναι ορθοκανονική και δεξιόστροφη τότε ($\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$)=1 οπότε το $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ είναι η ορίζουσα των συντεταγμένων των $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

9.) $$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})\}=-\{(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}\ \}$$

10.)



Όγκος του τετραέδρου $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$. Εμβαδόν της $\vec{a},\vec{b}$ πλευράς $=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1.) Πολλές φορές μια καμπύλη ή μια επιφάνεια είναι γνωστή μόνο στην παραμετρική της μορφή. Έτσι αν η παραμετρική εξίσωση έχει μόνο μια παράμετρο τότε έχουμε καμπύλη ενώ αν έχει δύο πρόκειται για επιφάνεια.

Π.χ. οι εξισώσεις $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ και $y=\frac{2t}{t^2+1}$ παριστάνουν στο επίπεδο την περιφέρεια του κύκλου $x^2+y^2=1$ χωρίς το σημείο $(1,0)$. Οπότε αν αφήσουμε το z να «τρέχει» δηλαδή αν θέσουμε το z ως παράμετρο $z=\lambda$ τότε παίρνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις ενός <u>κυλίνδρου</u> (στο χώρο) που του λείπει όμως μια γενετειρά του.

2.) Με απαλοιφή των παραμέτρων σε μια παραμετρική εξίσωση παίρνουμε τις αναλυτικές εξισώσεις της. Αντίστροφα αν μας δοθεί μια αναλυτική π.χ. $f(x,y,z)=0$ και μπορούμε να λύσουμε π.χ. ως προς το z έστω $z=g(x,y)$ τότε θέτοντας $x=t$ και $y=\mu$ και $z=g(t,\mu)$ παίρνουμε ένα σύστημα παραμετρικής εξισώσεων (που ίσως βέβαια να μην περιγράφουν πλήρως την επιφάνεια

π.χ. $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$. Ας θέσουμε $x=t$, $y=\mu$, $z=\sqrt{1-t^2-\mu^2}$ περιγράφει την «μισή» σφαίρα . Φυσικά στην περίπτωση μας υπάρχει κι' άλλη παραμετρικοποίηση που περιγράφει την επιφάνεια πλήρως. Προτιμάμε <u>ρητές</u> παραμετρικές εξισώσεις δηλαδή αυτές που γράφονται ως το λόγο δύο πολυωνύμων, δύο υπολογίζονται εύκολα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1.) Μια ευθεία (ε) είναι γνωστή μόνο όταν ξέρουμε ένα σημείο της $P(\bar{r}_1)$ και ένα παράλληλο διάνυσμα $\vec{a}$ σ' αυτήν. Τότε η (ε) έχει παραμετρική εξίσωση: $\bar{r}=\bar{r}_1+t\bar{a}$, $t\in\Re$ ή ισοδύναμα χωρίς παραμέτρους $(\bar{r}-\bar{r}_1)\times\bar{a}=0$ ή ισοδύναμα

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} .$$

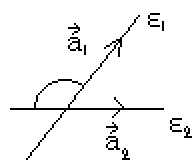
Ειδικά <u>στο επίπεδο</u> Oxy η ευθεία μπορεί να πάρει και την απλή μορφή $Ax+By+C=0$

2.) (συνέχεια) Εάν το Oxy είναι ορθογώνιο τότε το $\vec{\mathrm{n}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην (ε) και ο συντελεστής διευθύνσεως της (ε) είναι ίσος με $\lambda=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ (για $\mathrm{B}\neq 0$) . Φυσικά ο λ δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της (ε) δηλαδή είτε πάρουμε ως παράλληλο διάνυσμα το (-Β,Α) είτε το (Β,-Α) η γωνία που σχηματίζει με το $\vec{x}_0$ έχει εφαπτομένη ίση με λ.

3.) Ικανή και αναγκαία συνθήκη τρείς ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)$ του επιπέδου που τέμνονται ανά δύο να περνάνε από το ίδιο σημείο είναι η ορίζουσα των συντελεστων

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix} = 0 \;.$$

4.) Ο τύπος $\lambda = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2}$ όπου λ_1, λ_2 είναι οι κλίσεις δύο τεμνόμενων ευθείων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ δίνει την εφαπτομένη μιας από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν αλλά δεν ξέρουμε ακριβώς ποιάς! Έτσι αν θέλουμε να προσδιορίσουμε π.χ. την γωνία $\measuredangle(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ θα πρέπει όπως ήδη αναφέραμε να ξαναγράψουμε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με τους συντελεστές των x δηλαδή τους A_1, A_2 θετικούς και στη συνέχεια να θέσουμε $\vec{a}_1 = (-B_1, A_1),\ \vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$ και να πάρουμε το μικτό γινόμενο $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{z}_0)$. Εάν $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{z}_0)$<0 τότε το $\vec{a}_2$ δεξιά του $\vec{a}_1$ όπως στο σχήμα



και άρα $\measuredangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \pi - \measuredangle(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$. Εάν $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{z}_0)$>0 τότε το $\vec{a}_1$ δεξιά του $\vec{a}_2$ και άρα $\measuredangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \measuredangle(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$. Συνεπώς στην πρώτη περίπτωση (<0)

$$\varepsilon\varphi\measuredangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\varepsilon\phi\measuredangle(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$ και στη δεύτερη περίπτωση (>0)

$$\varepsilon\varphi\measuredangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon\phi\measuredangle(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2) = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

5.) Για να λύσουμε εξισώσεις με απόλυτες τιμές π.χ. $|x - 7y + 2| - 5|x - 2y + 1| + 4y = 0$ απαλοίφουμε πρώτα τις απόλυτες τιμές ως εξής:

ΒΗΜΑ 1 Χωρίζουμε το 0xy επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια όσες δηλαδή και οι γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ευθείες $(\varepsilon_1): x - 7y + 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 2y + 1 = 0$

ΒΗΜΑ 2 Σε κάθε ένα απ' αυτά τα τεταρτημόρια προσδιορίζουμε το πρόσημο των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έτσι π.χ. αν στο πρώτο τεταρτημόριο η (ε_1) παίρνει θετικές τιμές και η (ε_2) αρνητικές τιμές τότε η δοθείσα εξίσωση γίνεται: $+(x - 7y + 2) - 5\{-(x - 2y + 1)\} + 4y = 0$.

ΒΗΜΑ 3 Σχεδιάζουμε μέσα σε κάθε τεταρτημόριο το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει και στο τέλος λέμε ότι η ένωση των τεσσάρων ευθυγράμμων τμημάτων αποτελεί γεωμετρικό τόπο των λύσεων της εξίσωσης .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το πρόσημο μιας ευθείας στο ένα ημιεπίπεδο ή σε ένα τεταρτημόριο βρίσκεται αν πάρουμε ένα οποιδήποτε σημείο του ημιεπιπέδου ή του τεταρτημορίου και το βάλουμε (υπολογίσουμε) πάνω στην εξίσωση της ευθείας.

6.) Για να βρούμε τις εξισώσεις των διχοτόμων δύο τεμνόμενων ευθείων

$$(\varepsilon_1)\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1} \quad \text{και}$$

$$(\varepsilon_2)\frac{x-x_1}{a_2}=\frac{y-y_1}{\beta_2}=\frac{z-z_1}{\gamma_2}$$

του χώρου λύνουμε την εξίσωση $\frac{|(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot x\vec{a}_1|}{|\vec{a}_1|}=\frac{|(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot x\vec{a}_2|}{|a_2|}$ (*)

όπου $\vec{a}_1=(a_1,\beta_1,\gamma_1)$ και $\vec{\alpha}_2=(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$.

Ειδικά στην περίπτωση του Oxy επιπέδου η (*) μπορεί να γραφτεί στην απλή μορφή

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}}$$

όπου $(\varepsilon_1): A_1x+B_1y+C_1=0$ και $(\varepsilon_2):\ A_2x+B_2y+C_2=0$
και τα απόλυτα τα απαλοίφουμε δουλεύοντας με τεταρτημόρια όπως στο (5).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι τύποι $\mathrm{d}=\frac{|(\vec{\mathrm{r}}_0-\vec{\mathrm{r}}_1)\mathrm{x}\vec{\mathrm{a}}_1|}{|\vec{\mathrm{a}}_1|}$ και $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ στο επίπεδο δίνουν αντίστοιχα την απόσταση του $P(\vec{r}_0)$ από την ευθεία $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1}$ και του $P(x_0,y_0)$ από την ευθεία Ax + By +C=0 .

7.) Είναι συνήθως δύσκολο να βρούμε την εξίσωση (ε) της κοινής κάθετης ευθείας δύο ασύμβατων ευθειών $(\varepsilon_1):\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{a}_1$ και $(\varepsilon_2):\vec{r}=\vec{r}_2+t\vec{a}_2$.
Ο τύπος της (ε) έχει παραμετρική εξίσωση $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}_1x\vec{a}_2$ όπου $\vec{r}_0$ είναι το σημείο που η (ε) τέμνει την (ε_1) . Αποδεικνύεται ότι $\vec{r}_0=\vec{r}_1+t_0\vec{a}_1$ όπου $t_0=\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_2\times\vec{a}_1)}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Στον τύπο του t_0 παίζει ρόλο η σειρά των διανυσμάτων.

Το σημείο $\vec{r}_0'$ που η (ε) τέμνει την (ε_2) δίνεται αντίστοιχα από το $\vec{\mathrm{r}}_0'=\mathrm{r}_2+\mathrm{t}'_0\,\vec{\mathrm{a}}_2$ όπου

$$t'_0=\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\vec{a}_1,\vec{a}_2\times\vec{a}_1)}{(\vec{a}_2\times\vec{a}_1)^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1.) Ένα επίπεδο είναι γνωστό όταν ξέρουμε ένα σημείο του $P(\vec{r}_1)$ και δύο παράλληλα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ σ' αυτό. Τότε το επίπεδο (Ε) έχει παραμετρική εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{\alpha}_1 + \mu\vec{\alpha}_2$, $\lambda \in \Re$, $\mu \in \Re$ ή ισοδύναμα $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$ ή ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Ειδικά στην περίπτωση που το σύστημα συντεταγμένων Oxyz είναι <u>ορθογώνιο</u> η εξίσωση του (Ε) γράφεται στη μορφή Ax+By+Cz+D=0 όπου $\vec{u} = (A, B, C)$ είναι ένα διάνυσμα <u>κάθετο</u> στο (Ε).

2.) Η τομή των επιπέδων $(E_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ και $(E_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ είναι μια ευθεία με εξίσωση που βρίσκεται όταν λύσουμε το σύστημα των (E_1) και (E_2) .

3.) Το σημείο $P(\vec{r}_0)$ απέχει από το (Ε) απόσταση

$$d = \frac{\left|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2)\right|}{\left|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right|} \ .$$

Ειδικά εάν το επίπεδο είναι της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ και το Oxyz είναι η ορθοκανονικό τότε η απόσταση του $P(x_0, y_0, z_0)$ από το (Ε) παίρνει την μορφή

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

4.) (συνέχεια) Αν μας ζητήσουν να βρούμε τις εξισώσεις των επιπέδων (Ε) που διχοτομούν τις γωνίες μεταξύ των $(E_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ και $(E_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ τότε θα χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις

$$\frac{\left|A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right|}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}}} = \frac{\left|A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right|}{\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

δουλεύοντας σε τεταρτημόρια.

5.) Ως γωνία της (ε) $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}_1$ και του επιπέδου (Ε): $Ax + By + Cz + D = 0$ θεωρούμε την $\frac{\pi}{2} - \phi$ όπου φ η γωνία $\sphericalangle(\vec{\alpha}_1, \vec{u})$ όπου $\vec{u} = (A, B, C)$ το κάθετο διάνυσμα.

6.) Μια ευθεία $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ είναι πάνω στο (Ε) Ax+By+Cz+D=0 εάν $\vec{r}_0 \in (E)$ και $\vec{a} \cdot (A, B, C) = 0$ ενώ η $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ είναι κάθετη στο (Ε) εάν το $\vec{u}$ είναι παράλληλο με το $\vec{a}$.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</u>

1.) Η εξίσωση της περιφέρειας ενός κύκλου στο Oxy επίπεδο είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Αυτή παριστάνει περιφέρεια με κέντρο $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ εάν φυσικά $A^2+B^2-4C>0$.

2.) Η εξίσωση της σφαίρας στο χώρο είναι της μορφής $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$. Το κέντρο είναι $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2})$ και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$.

Η εφαπτομένη στο σημείο (ξ,n) της παραπάνω περιφέρειας δίνεται από τον τύπο

$$x\xi+yn+\frac{A}{2}(\xi+x)+\frac{B}{2}(y+n)+C=0$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο σημείο (ξ,n,ρ) είναι το

$$\xi x+ny+\rho z+\frac{A}{2}(\xi+x)+\frac{B}{2}(y+n)+\frac{C}{2}(\rho+z)+D=0.$$

3.) Έστω τώρα (ξ,n) οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου. Τότε η <u>πολική</u> του ευθεία δίνεται ξανά από τον τύπο $x\xi+yn+\frac{A}{2}(\xi+x)+\frac{B}{2}(y+n)+C=0$

4.) Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου με ακτίνα R και κέντρο K(0,0) είναι οι γνωστές μας πολικές $x=R\cos\theta$ και $y=R\sin\theta$ αλλά υπάρχουν και ρητές παραμετρικές εξισώσεις όπως για παράδειγμα $x=\frac{R(1-t^2)}{1+t^2}, y=\frac{2Rt}{1+t^2}$ $t\in\Re$.

Ως παραμετρικές εξισώσεις μιας σφαίρας με ακτίνα R και κέντρο K(0,0,0) παίρνουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες

$$x=R\cos\upsilon\cdot\cos u,\ y=R\cos\upsilon\cdot\sin u,\ z=R\sin\upsilon \text{ όπου } -\frac{\pi}{2}\le\upsilon\le\frac{\pi}{2},\ u\in[0,2\pi)$$

αλλά φυσικά υπάρχουν και πολλές άλλες.