18/02/15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Προτασιακή λογική
ή λογική των προτάσεων

Κατηγορηματική λογική
ή λογική των κατηγορημάτων
ή λογική 1ης τάξεως.

Ατομική Πρόταση:

Σύνθετες Προτάσεις:

Π.χ. εάν ο αριθμός α είναι πολ/σιο του 10 τότε ο αριθμός α είναι πολ/σιο του 5. (A) (ατομική πρόταση) (B) (ατομική πρόταση)

Οι σύνθετες προτάσεις κατασκευάζονται από ατομικές προτάσεις χρησιμοποιώντας συνδέσμους. (A + B)

ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ: σύζευξη "$\wedge$", διάζευξη "$\vee$", άρνηση "$\neg$", "$\longleftrightarrow$" (διπλή συνεπαγωγή), "$\longrightarrow$" (συνεπάγεται).

Π.χ. κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή περιττός.
↳ αποκλειστική διάζευξη.

Π.χ. εάν $\underset{Z}{a<10}$ και $\underset{H}{a\in\mathbb{N}}$ τότε: $\underset{A}{a=1}$ ή $\underset{B}{2/a}$ ή $\underset{\Gamma}{3/a}$ ή $\underset{\Delta}{5/a}$ ή $\underset{E}{7/a}$

$Z \wedge H \rightsquigarrow A \vee B \vee \Gamma \vee \Delta \vee E$
(εάν/τότε)

Σύστημα: $\left.\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x-3y=4 \end{array}\right\}$ (A) (B)

$A \wedge B$ Η γλώσσα της προτασιακής λογικής αποτελείται από: (1) το αλφάβητο (Α-Ω), ποσοδείκτες ($A_1, A_2, \ldots$) δεξιά, αριστερά παρένθεση, συνδέσμους.

(2) συντακτικό δηλ. πως φτιάχνουμε σύνθετες από ατομικές προτάσεις.

<u>Κανόνες συντακτικού</u>:

- κάθε ατομική πρόταση θεωρείται μια κανονική πρόταση.
- εαν σ είναι πρόταση τότε και η $(\neg\sigma)$ είναι πρόταση
- εαν σ και τ είναι προτάσεις τότε και η παρακάτω θεωρούνται προτάσεις:
  $(\sigma \wedge \tau)$, $(\sigma \vee \tau)$, $(\sigma \to \tau)$, $(\sigma \leftrightarrow \tau)$
- κάθε πρόταση κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τους παραπάνω κανόνες πεπερασμένο το πλήθος φορές.

(3) σημαντική της προτασιακής λογικής δηλ. πως δίνουμε αλήθεια ή ψέμματα στις προτάσεις της γλώσσας μας.

→ η αλήθεια ή το ψέμα μιας πρότασης εξαρτάται από την αλήθεια ή το ψέμα των ατομικών προτάσεων της πρότασης

$\boxed{\text{Π.χ}}$ $\underbrace{(\underset{\alpha}{A} \vee (\underset{\alpha}{B} \vee \underset{\psi}{\Gamma}))}_{\alpha} \longleftrightarrow \underbrace{(\underbrace{(\underset{\alpha}{A} \vee \underset{\alpha}{B})}_{\alpha} \wedge \underbrace{(\underset{\alpha}{A} \vee \underset{\psi}{\Gamma})}_{\alpha})}_{\alpha}$ συνολικά η πρόταση είναι αληθής.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ αν $\underbrace{\text{πάμε σινεμά}}_{A}$ τότε $\underbrace{\text{χρειαζόμαστε χρήματα}}_{B}$ για το εισιτήριο. $(A \to B)$

<u>άρνηση</u>: - αν δεν έχουμε χρήματα για το εισιτήριο τότε δεν θα πάμε σινεμά $((\neg B) \to (\neg A))$. αλήθεια
- αν δεν πάμε σινεμά τότε δεν χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο $((\neg A) \to (\neg B))$ αλήθεια.

Για να δώσουμε μια τιμή αλήθειας (α ή ψ) σε μια πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω πράξεις

	$\sim$
α	ψ
ψ	α

		$\sqcup$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

		$\sqcap$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

		$-]$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

		$[-]$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $\sigma = (A \vee (\neg A)) \to \alpha$
A: αλήθεια.

Ορισμός: Μια εκτίμηση αλήθειας ή αλλιώς ερμηνεία συμβ. (V) είναι μια συνάρτηση $V : S \to \{\alpha, \psi\}$, S το σύνολο όλων των προτάσεων της Προτασιακής λογικής.

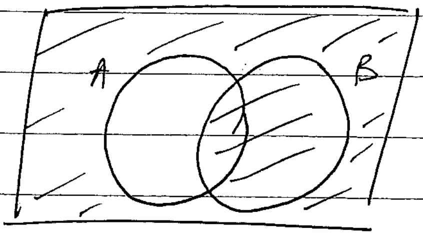
Για την V πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:
- αν σ είναι ένα άτομο τότε $V(\sigma) = \alpha$ ή ψ
- αν $\sigma = (\neg\tau)$ τότε $V(\sigma) = \sim V(\tau)$
- αν $\sigma = (\tau_1 \wedge \tau_2)$ τότε $V(\sigma) = V(\tau_1) \sqcap V(\tau_2)$.
- αν $\sigma = (\tau_1 \vee \tau_2)$ τότε $V(\sigma) = V(\tau_1) \sqcup V(\tau_2)$
- αν $\sigma = (\tau_1 \to \tau_2)$ τότε $V(\sigma) = V(\tau_1) -] V(\tau_2)$
- αν $\sigma = (\tau_1 \leftrightarrow \tau_2)$ τότε $V(\sigma) = V(\tau_1) [-] V(\tau_2)$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\sigma = (A \vee (\neg A))$ είναι μια ταυτολογία (δηλ. για κάθε V έχουμε $V(\sigma) = \alpha$)

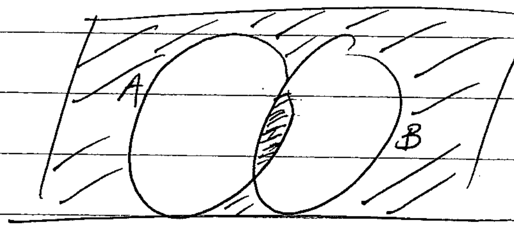
Λύση: 1η Έστω $V(A) = \alpha$. Έχουμε $V(\neg A) = \sim V(A) = \sim\alpha =$
$V(\sigma) = V(A \vee (\neg A)) = V(A) \sqcup V(\neg A) = \alpha \sqcup \psi = \alpha$

2η $V(A) = \psi$ $\quad V(\neg A) = \sim V(A) = \alpha$

$V(\sigma) = V(A \vee (\neg A)) = V(A) \sqcup V(\neg A) = \psi \sqcup \alpha = \alpha$.



συνεπαγωγή



διπλή συνεπαγωγή

$\emptyset \subseteq A \qquad \forall \underbrace{x \in \emptyset}_{B} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\Gamma}$

$B \rightarrow \Gamma \quad : \alpha$

Άσκηση: Γνωρίζουμε από τη θεωρία συνόλων ότι $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$. Να γράψετε την παραπάνω ισότητα με μια πρόταση και να ελέγξουμε αν πρόκειται για νόμο.

Λύση: Έχουμε $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
και $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$.

Άρα $A \cap (B \cup \Gamma) \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$A \wedge (B \vee \Gamma) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma)$.

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma) \rightarrow A \wedge (B \vee \Gamma)$

Προτασιακή λογική

- Ατομικές προτάσεις A, B
- Σύνδεσμοι , $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$

$\boxed{\pi.\chi.}$ $(B \rightarrow (\neg\Gamma))$

$((\neg\Gamma) \leftrightarrow B)$

Σημαντική των προτάσεων.

$f: Q \rightarrow \{\alpha, \psi\}$, όπου Q σύνολο ατομικών προτάσεων λέγεται απονομή αλήθειας.

Αληθοπράξεις

$\sim$	
α	ψ
ψ	α

$\sqcap$		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

$\sqcup$		
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

$-\!\rceil$		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

$\sqsubset\!-$		
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

$\boxed{\pi.\chi.}$ $\alpha \sqcap \alpha = \alpha$

$\psi \sqcup \alpha = \alpha$

Σχόλιο: "Έχοντας στα χέρια του" κάποιος μια απονομή αλήθειας και τις παραπάνω αληθοπράξεις μπορεί να ερμηνεύσει μια οποιαδήποτε πρόταση που το δοθεί.

$\boxed{\pi.\chi.}$ $A: f(A)=\alpha$, $B: f(B)=\psi$, $\Gamma: f(\Gamma)=\alpha$

$\sigma=((A\wedge B)\rightarrow\Gamma)$ $\quad \left.\begin{array}{l}\sigma_1 = A\wedge B\\ \sigma_2 = \Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma=(\sigma_1\rightarrow\sigma_2)$

Άρα $f(\sigma)=f(\sigma_1) -\!\!\rbrack\, f(\sigma_2)$
$f(\sigma)=\psi -\!\!\rbrack\, f(\sigma_2)=\psi -\!\!\rbrack\, \alpha=\alpha$

$f(\sigma_1)=f(A\wedge B)=f(A)\sqcap f(B)=\alpha\sqcap\psi=\psi$

<u>Ορισμός</u>: Μια εκτίμηση αλήθειας ή απλά ερμηνεία είναι μια συνάρτηση $f: S\rightarrow\{\alpha,\psi\}$ όπου S είναι το σύνολο όλων των προτάσεων της Προτασιακής λογικής η οποία "σέβεται" τις παραπάνω αληθοπράξεις που αναφέραμε.

$\boxed{\pi.\chi.}$ $f(\neg\sigma)=\sim f(\sigma)$ για οποιαδήποτε πρόταση σ
όμοια $f(\sigma_1\wedge\sigma_2)=f(\sigma_1)\sqcap f(\sigma_2)$
$f(\sigma_1\vee\sigma_2)=f(\sigma_1)\sqcup f(\sigma_2)$
$f(\sigma_1\rightarrow\sigma_2)=f(\sigma_1) -\!\!\rbrack\, f(\sigma_2)$
$f(\sigma_1\leftrightarrow\sigma_2)=f(\sigma_1) \lbrack\!\!-\!\!\rbrack\, f(\sigma_2)$

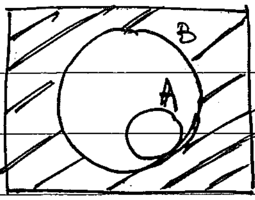
<u>Ορισμός</u>: Μια πρόταση σ η οποία έχει την ιδιότητα να επαληθεύεται με την οποιαδήποτε ερμηνεία f θα τη λέμε νόμο ή ταυτολογία ή πάντοτε αληθής πρόταση.

$\boxed{\pi.\chi.}$ $\sigma=(A\vee(\neg A))$ Νόμος αποκλείσεως τρίτου
Έστω f μια οποιαδήποτε ερμηνεία $f(\sigma)=f(A)\sqcup(\sim f(A))$

<u>1η περίπτωση</u>: $f(A)=\alpha$, $\sim f(A)=\psi$
$f(\sigma)=\alpha\sqcup\psi=\alpha$, νόμος

<u>2η περίπτωση</u>: $f(A)=\psi$, $\sim f(A)=\alpha$
$f(\sigma)=f(A)\sqcup(\sim f(A))=\psi\sqcup\alpha=\alpha$

$A \subseteq B$
$B^c \subseteq A^c$



Αν $\boxed{x \in A}$ τότε $\boxed{x \in B}$
Αν $x \notin B$ τότε $x \notin A$

έχουμε 2 ατομικές προτάσεις $\Gamma := x \in A$
$\Delta := x \in B$

Αν Γ τότε Δ ή πιο σωστά $(\Gamma \to \Delta)$
Αν $\neg\Delta$ τότε $\neg\Gamma$ $((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma))$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι νόμος
$(\Gamma \to \Delta) \to ((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma))$

Απόδειξη: Έστω V μια τυχαία ερμηνεία. Θ.δ.ο. $V(\sigma) = \alpha$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Αν $V(\Gamma) = \alpha = V(\Delta)$, τότε $V(\Gamma \to \Delta) = \alpha$
$V((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)) = \alpha$
Άρα $V(\sigma) = \alpha -I\, \alpha = \alpha$

ii) Αν $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \psi$, τότε
$V(\Gamma \to \Delta) = \psi$, $V((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)) = \psi$
Άρα $V(\sigma) = \psi -I\, \psi = \alpha$

iii) Αν $V(\Gamma) = \psi$, $V(\Delta) = \alpha$, τότε
$V(\Gamma \to \Delta) = \alpha$, $V((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)) = \alpha$
Άρα $V(\sigma) = \alpha -I\, \alpha = \alpha$

iv) Αν $V(\Gamma) = \psi$, $V(\Delta) = \psi$, τότε
$V(\Gamma \to \Delta) = \alpha$, $V((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)) = \alpha$
Άρα $V(\sigma) = \alpha -I\, \alpha = \alpha$

Σχόλιο: Εάν μας δίνεται μια σ πρόταση και μας ζητείται να βρούμε τις αληθοτιμές της, τότε θα δουλεύουμε ως εξής:
Κατασκευή ενός πίνακα που στα αριστερά βάζουμε όλες τις ατομικές προτάσεις της σ. Δεξιότερα θα βάζουμε τις υποπροτάσεις της σ και τέλος τη σ. Θα δίνουμε όλες τις δυνατές αληθοτιμές στις ατομικές προτάσεις. Κάθε τέτοια αποτίμηση αποτελεί μια γραμμή του πίνακα αλήθειας της σ.

$\boxed{\pi.\chi.}$ $\sigma = (\Gamma \to \Delta) \longrightarrow ((\neg\Delta) \to (\neg\Gamma))$

	Γ	Δ	$\Gamma \to \Delta$	$(\neg\Delta)$	$(\neg\Gamma)$	$(\neg\Delta) \to (\neg\Gamma)$	σ
v_1	α	α	α	ψ	ψ	α	α
v_2	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
v_3	ψ	α	α	ψ	α	α	α
v_4	ψ	ψ	α	α	α	α	α

$\boxed{\pi.\chi.}$ $\emptyset \subseteq A$

Αν $\boxed{x \in \emptyset}$ τότε $\boxed{x \in A}$

$\sigma = (\Gamma \to \Delta)$, όπου Δ οποιαδήποτε ατομική πρόταση και Γ μια ατομική πρόταση που θεωρούμε ότι είναι ψευδής.

Έστω v μια τυχαία εκτίμηση αλήθειας έτσι ώστε $v(\Gamma)=\psi$.
Θ.δ.ο. η $v(\sigma)$ είναι αληθής.

Γ	Δ	σ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

2-03-15

Μαθηματική Λογική

Πίνακες Αληθείας:

Το πλήθος των γραμμών του πίνακα αληθείας μιας πρότασης σ είναι πάντοτε καθοριστικό.

π.χ. $\sigma = (((\neg A \wedge B) \rightarrow \Gamma) \vee \Delta)$

$2^4 = 16.$

A	B	Γ	Δ	¬A	(¬A∧B)	(¬A∧B)→Γ	σ
α	α	α	α	ψ	ψ	α	α
α	α	α	ψ	ψ	ψ	α	α
α	α	ψ	α				
α	α	ψ	ψ				
α	ψ	α	α				
α	ψ	α	ψ				
α	ψ	ψ	α				
α	ψ	ψ	ψ				
ψ	α	α	α				
ψ	α	α	ψ				
ψ	α	ψ	α				
⋮	⋮	⋮	⋮				

Στην αριστερότερη ατομική στήλη του αληθοπίνακα οι μισές γραμμές είναι αληθείς και οι υπόλοιπες ψέματα. Ενώ στη δεξιότερη ατομική στήλη του αληθοπίνακα η αλήθεια με το ψέμα εναλλάσσονται.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Είναι η σ πάντοτε αληθής?

Απ: Εάν η σ δεν ήταν πάντοτε αληθής θα υπήρχε μια ερμηνεία V έτσι ώστε $V(\sigma) = \psi$.

Έχουμε $\sigma = (\sigma_1 \vee \sigma_2)$ όπου $\sigma_2 = \Delta$ και $\sigma_1 = (\neg A \wedge B) \rightarrow \Gamma$

Άρα θα πρέπει ~~και~~ $V(\sigma_1) = \psi$ και $V(\sigma_2) = \psi$

$V(\sigma_1)=\psi$ Θα πρέπει $V(\neg A\wedge B)=\alpha$ και $V(\Gamma)=\psi$

Από $V(\neg A\wedge B)=\alpha$ έχουμε $V(\neg A)=\alpha$ και $V(B)=\alpha$

Άρα $\begin{cases} V(A)=\psi \\ V(B)=\alpha \\ V(\Gamma)=\psi \\ V(\Delta)=\psi \end{cases}$

Άρα Από τις 16 δυνατές περιπτώσεις του αληθοπίνακα μόνο σε μία περίπτωση η σ διαψεύδεται.

- σ = Αν πάμε **σινεμά** τότε θα χρειαστούμε χρήματα για το εισιτήριο.

$\neg\sigma = A\wedge(\neg B)$

A = Εμείς θα πάμε σινεμά

B = Εμείς χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο.

$\sigma = A\rightarrow B$

A	B	σ	¬σ	A∧(¬B)
α	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ

Οι δύο τελευταίες στήλες είναι είναι ίδιες.
Άρα ¬σ και (A∧(¬B)) έχουν το ίδιο "νόημα".

Άρα μπορούμε να ορίσουμε σαν ¬σ την (A∧(¬B)).

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Δύο προτάσεις σ_1 και σ_2 της λογικής των προτάσεων λέγονται <u>ισοδύναμες</u> και γράφουμε $\sigma_1\equiv\sigma_2$ ή πιο απλά $\sigma_1=\sigma_2$ αν-ν ο αληθοπίνακας της σ_1 ταυτίζεται με τον αληθοπίνακα της σ_2. Ή ακριβέστερα για κάθε ερμηνεία V έχουμε $V(\sigma_1)=V(\sigma_2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A\wedge(\neg A)\equiv B\wedge(\neg B)$, διότι $\forall V$: $V(A\wedge(\neg A))=V(B\wedge(\neg B))=\psi$.
$A\vee(\neg A)\equiv B\vee(\neg B)$, διότι $\forall V$: $V(A\vee(\neg A))=V(B\vee(\neg B))=\alpha$.

$\neg\sigma = (A \wedge (\neg B))$ = εμείς πάμε σινεμά και δεν χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο.

A = εμείς πάμε σινεμά

B = Θα χρειαστούμε χρήματα για το εισιτήριο

Έστω σ_1 = Εάν δεν χρειαζόμαστε χρήματα για το εισιτήριο τότε δεν πάμε σινεμά

$\sigma_1 = ((\neg B) \to (\neg A)) = \sigma$

A	B	σ	¬σ	σ_1
α	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

Άσκηση: $\sigma = ((\neg A \wedge B) \to \Gamma) \vee \Delta$

$\neg\sigma = (\neg A) \wedge B \wedge (\neg\Gamma) \wedge (\neg\Delta)$

$V(A) = \psi$

$V(B) = \alpha$

$V(\Gamma) = \psi$

$V(\Delta) = \psi$

π.χ.

A	B	σ	¬σ
α	α	α	ψ
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ

$\sigma = (A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$

$\neg\sigma = (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$

Τρικ: Εάν γνωρίζουμε τον αληθοπίνακα μιας πρότασης σ τότε μπορούμε να βρούμε μια ισοδύναμη πρόταση με τη σ απλά i) εντοπίζουμε τις γραμμές που αληθεύει η σ

ii) σε κάθε τέτοια γραμμή φτιάχνουμε μια σύζευξη από άτομα ή αρνήσεις ατόμων σύμφωνα με το πρόσημο (α) ή (ψ) που έχουν τα άτομα αυτά στη γραμμή αυτή.

iii) Ενώνουμε τις συζεύξεις που πήραμε στο ii) με χρήση της διάζευξης (∨).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

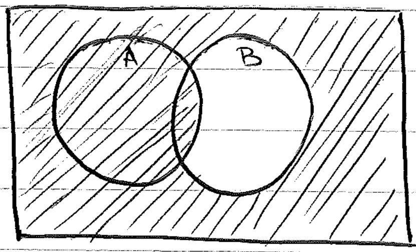
A	B	Γ	Δ	δ
.	.	.	.	.
α	α	ψ	ψ	α
.	.	.	.	.

$$\delta = \big((A \wedge B) \wedge (\neg \Gamma) \wedge (\neg \Delta)\big) \vee (\ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A \to B = \overset{\delta_1}{(\neg B) \to (\neg A)} = \overset{\delta_2}{(\neg A) \vee B}$

A	B	¬A	¬B	δ_1	δ_2
α	α	ψ	ψ	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	α	α

Αποδείξαμε ότι $\delta_1 = \delta_2$

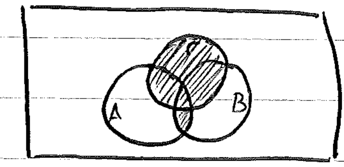


: $B \to A$

A = φοιτητές που ταξιδεύουν για Αθήνα
B = το Μύκονος είναι στο Καρλόβασι
$B \to A = (\neg B) \vee A$

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ:

$(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$:



→ ΑΣΚΗΣΗ (Αληθοπίνακες).

ΟΡΙΣΜΟΙ:

- Δύο προτάσεις λέγονται ισοδύναμες ή ίσες και γράφουμε $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ή $\sigma_1 = \sigma_2$ αν και μόνο αν για κάθε V ισχύει $V(\sigma_1) = V(\sigma_2)$

- Μια πρόταση σ λέγεται νόμος ή ταυτότητα ή ταυτολογία αν και μόνο αν για κάθε V, $V(\sigma) = \alpha$ ή ισοδύναμα η $\sigma = A \vee (\neg A)$

- Μια πρόταση σ λέγεται αντίφαση ή αντιλογία ή πάντα ψευδής αν και μόνο αν για κάθε V, $V(\sigma) = \psi$ ή ισοδύναμα η $\sigma = A \wedge (\neg A)$ ή ισοδύναμα η $(\neg\sigma)$ είναι ένας νόμος.

- Μια πρόταση σ λέγεται συνέπεια μιας άλλης πρότασης τ και γράφουμε $\tau \models \sigma$ αν και μόνο αν για κάθε V που επαληθεύει την τ τότε αναγκαστικά επαληθεύει και τη σ ή ισοδύναμα $\tau \to \sigma$ είναι ένας νόμος

Σχολιο: Εαν η $\tau \models \sigma$ τότε δεν συνεπάγεται πάντα ότι ισχυει $\sigma \models \tau$

Π.χ. Δείξτε ότι η $\tau = (A \wedge B)$ έχει συνέπεια $\sigma = B$ αλλά δεν ισχύει ότι $\sigma \models \tau$

Απόδειξη: Έστω V μια τυχαία ερμηνεία

1^{η} $V(\tau) = \alpha \Rightarrow V(A) = \alpha$ και $V(B) = \alpha \Rightarrow V(B) = \alpha \Rightarrow V(\sigma) = \alpha$

2^{η} $V(\tau) = \psi \Rightarrow$ όμως ο ορισμός της συνέπειας δεν μας αναγκάζει σε αυτή την περίπτωση να ελέγξουμε αν επαληθεύεται η σ.

Άρα η 2^{η} περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει.

Τώρα θα δείξουμε ότι η σ δεν έχει συνέπεια την τ θα κατασκευάσουμε μια ερμηνεία V στην οποία η σ να επαληθεύεται και παρ' όλα αυτά η τ να μην επαληθεύεται.

Έστω V έτσι ώστε $V(B)=\alpha$ και $V(A)=\psi$. Άρα $V(\sigma)=\alpha$ και $V(\tau)=\alpha \sqcap \psi = \psi$. Άρα η τ δεν είναι συνέπεια της σ

<u>Σχόλιο</u>: Οι ισότητες μεταξύ δύο συνόλων στη Θεωρία Συνόλων μας βοηθάει να ανακαλύπτουμε μαθηματικούς νόμους αλλά και ισοδυναμίες στη μαθηματική λογική.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ (1) Έστω A ένα σύνολο το οποίο είναι υποσύνολο του Ω. Έχουμε $(A^c)^c = A$ δηλ. αν ονομάσουμε Γ την πρόταση "$x \in A$". Έχουμε με $\neg\Gamma$ εκφράζουμε το γεγονός "$x \notin A$". Έχουμε με $\neg(\neg\Gamma)$ εκφράζουμε το γεγονός ότι δεν ισχύει "$x \notin A$". Θα δείξουμε ότι $\neg(\neg\Gamma)=\Gamma$ και γενικά $\forall \sigma$ ισχύει $\neg(\neg\sigma)=\sigma$.

σ	$\neg\sigma$	$\neg(\neg\sigma)$
α	ψ	α
ψ	α	ψ

Η τελευταία στήλη είναι ίδια με την πρώτη. Συμπεραίνουμε ~~και~~ την ισότητα των δύο προτάσεων.

<u>Νόμοι De Morgan</u>: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

<u>Νόμοι De Morgan (στη μαθηματική λογική)</u>:

$\neg(\sigma_1 \vee \sigma_2) = (\neg\sigma_1) \wedge (\neg\sigma_2)$
$\neg(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = (\neg\sigma_1) \vee (\neg\sigma_2)$

Νόμοι Απορρόφησης: $\Omega \cap A = A$

$\Omega \cup A = \Omega$

$\emptyset \cap A = \emptyset$

$\emptyset \cup A = A$

Νόμοι Απορρόφησης (στη μαθηματική λογική):

Μια οποιαδήποτε ταυτ. $\wedge \sigma = \sigma$

ταυτ. $\vee \sigma =$ ταυτ.

αντιφ. $\wedge \sigma =$ αντιφ.

αντιφ. $\vee \sigma = \sigma$.

$A \cup A^c = \Omega$ $\quad \sigma \vee (\neg\sigma) =$ ταυτ. (νόμος αποκλείσεως τρίτο

$A \cap A^c = \emptyset$ $\quad \sigma \wedge (\neg\sigma) =$ αντιφ.

Επιμεριστικοί Νόμοι:

$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	$\sigma_1 \vee (\sigma_2 \wedge \sigma_3) = (\sigma_1 \vee \sigma_2) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_3$
$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	$\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_3) = (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma$

Αντιμεταθετικοί Νόμοι:

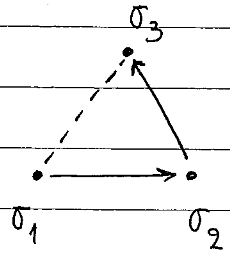
$A \cup B = B \cup A$	$\sigma_1 \vee \sigma_2 = \sigma_2 \vee \sigma_1$
$A \cap B = B \cap A$	$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_2 \wedge \sigma_1$

Προσεταιριστικοί Νόμοι:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$\sigma_1 \vee (\sigma_2 \vee \sigma_3) = (\sigma_1 \vee \sigma_2) \vee \sigma_3$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3) = (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge \sigma_3$

Πρώτος συλλογιστικός νόμος του Αριστοτέλη:

$(\sigma_2 \to \sigma_3) \to ((\sigma_1 \to \sigma_2) \to (\sigma_1 \to \sigma_3))$



Δεύτερος συλλογιστικός νόμος του Αριστοτέλη:

$(\sigma_1 \to \sigma_2) \to ((\sigma_2 \to \sigma_3) \to (\sigma_1 \to \sigma_3))$

Πρόταση: Εαν είναι γνωστό ότι $\sigma_1 = \sigma_2$ αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι ένας νόμος.

Απόδειξη:

σ_1	σ_2	$\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$
α	α	α
ψ	ψ	α

Υποθέτουμε ότι $\sigma_1 = \sigma_2$ και θ.δ.ο $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$

Από τον παραπάνω αληθοπίνακα προκύπτει ότι $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι πάντοτε αληθινή.

Έστω $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ είναι ένας νόμος θ.δ.ο. $\sigma_1 = \sigma_2$

σ_1	σ_2	$\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$	
α	α	α	
α	ψ	ψ	απορρίπτεται.
ψ	α	ψ	−//−
ψ	ψ	α	

Από τον παραπάνω αληθοπίνακα συμπεραίνουμε ότι οι μόνες περιπτώσεις είναι η 1η και η τελευταία, δηλ. όταν σ_1, σ_2 παίρνουν ακριβώς τις ίδιες αληθοτιμές. Και άρα $\sigma_1 = \sigma_2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια πρόταση σ θα λέγεται επαληθεύσιμη αν υπάρχει ερμηνεία V έτσι ώστε $V(\sigma)=\alpha$. Όμοια η σ θα λέγεται απλά επαληθεύσιμη εάν είναι επαληθεύσιμη αλλά όχι ταυτολογία. (ή με άλλα λόγια μια απλά επαληθεύσιμη πρόταση δεν μπορεί να αληθεύει πάντα και άρα υπάρχουν δύο διαφορετικές ερμηνείες V_1, V_2 έτσι ώστε $V_1(\sigma)=\alpha$, $V_2(\sigma)=\psi$.)

ΑΣΚΗΣΗ: Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απλά επαληθεύσιμες;

(i) $((A \to B) \to A) \to A$

(ii) $((A \to B) \to A) \to B$

(iii) $((A \to B) \to B) \to A$

(i)

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$	$((A \to B) \to A) \to$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

$((A \to B) \to A) \to A$ ταυτολογία (Νόμος του Pierce)

(ii)

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to A$	$((A \to B) \to A) \to$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α

$((A \to B) \to A) \to B$ απλά επαληθεύσιμη

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$((A \to B) \to B) \to A$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	ψ

$((A \to B) \to B) \to A$ απλά επαληθεύσιμη.

Νόμοι Συνεπαγωγής:

Εις άτοπο απαγωγή: $(\sigma_1 \to \sigma_2) \longleftrightarrow ((\neg\sigma_2) \to (\neg\sigma_1))$

Σχόλιο: Από την πρόταση που αποδείξαμε προηγουμένως προκύπτει ότι ισχύει η ισότητα $\sigma_1 \to \sigma_2 = (\neg\sigma_2) \to (\neg\sigma_1)$

Συμβολισμός: Με $\square$ θα συμβολίζουμε οποιαδήποτε αντιλογία. Ενώ με Τ, μια οποιαδήποτε ταυτολογία.

Κανονικές Μορφές

- στοιχειώδης τύπος: μια ατομική πρόταση, π.χ. A ή $\neg A$
- παράγοντας/πρoγραμματικός τύπος: μια διάζευξη ενός πε περασμένου συνόλου τύπων π.χ. $(\neg A) \vee B \vee (\neg \Gamma)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: (συζευκτική κανονική μορφή): Ένας παράγοντας ή μια σύζευξη κάποιων παραγόντων.

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $\underbrace{((\neg A) \vee B \vee (\neg \Gamma))}_{\sigma_1} \wedge \underbrace{(A \vee (\neg B) \vee (\neg \Gamma) \vee (\neg \Delta))}_{\sigma_2}$

(διαζευκτική κανονική μορφή): Μια διάζευξη $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$, όπου κάθε σ_i $\forall i = 1, \ldots k$ είναι μια σύζευξη στοιχειωδών τύπων. Ειδικά για $k=1$ η σ_1 θεωρείται από μόνη της Δ.Κ

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $\sigma_1 = (\neg A) \wedge B \wedge (\neg \Gamma)$: Δ.Κ.Μ.

$\sigma_2 = (A) \wedge (\neg B) \wedge (\Gamma)$

$\sigma_1 \vee \sigma_2$: Δ.Κ.Μ.

Σχολιο: Κάθε πρόταση σ, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα κα σε Σ.Κ.Μ. αλλά και σε Δ.Κ.Μ.

Σχολιο: Υπάρχουν κάποιες προτάσεις που είναι ήδη γραμμέν και σε Σ.Κ.Μ αλλά και σε Δ.Κ.Μ.

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $(\neg A)$: Δ.Κ.Μ.

: είναι από μόνο του ένας παράγοντας, άρα είναι σε Σ.Κ.Μ.

$\boxed{\Pi.\chi.}$ $(\neg A) \vee B$: Δ.Κ.Μ. διότι $(\neg A)$ και B μπορεί να θεωρηθεί σύζευξη στοιχειωδών τύπων

$(\neg A) \vee B$: είναι ένας παράγοντας Σ.Κ.Μ.

$\boxed{\Pi.\chi.}$ $(\neg A) \wedge B \wedge (\neg \Gamma)$: Σ.Κ.Μ. , διότι είναι σύζευξη τριών παραγόντων

: Η παραπάνω πρόταση είναι σύζευξη τριών στοιχειωδών τύπων άρα είναι σε Δ.Κ.Μ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Μια οποιαδήποτε σύζευξη / διάζευξη στοιχειωδών τύπων, μπορεί να θεωρηθεί και ως Δ.Κ.Μ και ως Σ.Κ.Μ.

Για άλλες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους προτασιακούς νόμους και να απλοποιήσουμε οποιαδήποτε πρόταση σ σε Δ.Κ.Μ ή Σ.Κ.Μ.

$\boxed{\Pi.\chi.}$ Έστω $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ στοιχειώδεις τύποι.

Τότε η Δ.Κ.Μ. : $(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3) \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)$

$= (\sigma_1 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \wedge (\sigma_2 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \wedge (\sigma_3 \vee (\sigma_4 \wedge \sigma_5))$

$= (\sigma_1 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_5) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_5) \wedge (\sigma_3 \vee \sigma_4) \wedge (\sigma_3 \vee \sigma_5)$

$\rightarrow$ Σ.Κ.Μ.

$\boxed{\Pi.\chi.}$ $\sigma_1 = (\neg A)$, $\sigma_2 = B$, $\sigma_3 = (\neg E)$, $\sigma_4 = \Delta$.

$(\sigma_2 \vee \sigma_3) \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_4)$: Σ.Κ.Μ.

$= (\sigma_2 \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_4)) \vee (\sigma_3 \wedge (\sigma_1 \vee \sigma_4))$

$= (\sigma_2 \wedge \sigma_1) \vee (\sigma_2 \wedge \sigma_4) \vee (\sigma_3 \wedge \sigma_1) \vee (\sigma_3 \wedge \sigma_4)$: Δ.Κ.Μ.

Π.χ. Έστω $\sigma = ((A \to B) \to A) \to A$.

$$
\begin{aligned}
\sigma &= (((\neg A) \vee B) \to A) \to A \\
&= (\neg((\neg A) \vee B) \vee A) \to A \\
&= ((A \wedge (\neg B)) \vee A) \to A \\
&= \neg((A \wedge (\neg B)) \vee A) \vee A \\
&= (((\neg A) \vee B) \wedge (\neg A)) \vee A \\
&= ((\neg A) \wedge (\neg A) \vee (B \wedge (\neg A))) \vee A \\
&= ((\neg A) \vee (B \wedge (\neg A))) \vee A \\
&= (\neg A) \vee (B \wedge (\neg A)) \vee A \\
&= ((\neg A) \vee A) \vee (B \wedge (\neg A)) \\
&= T \vee (B \wedge (\neg A)) = T.
\end{aligned}
$$

$\sigma_1 \to \sigma_2 = (\neg \sigma_1) \vee$

$\neg(\sigma_1 \vee \sigma_2) = (\neg \sigma_1) \wedge (\neg \sigma_2)$

$\neg(\neg \sigma) = \sigma$

Σχόλιο: Κάθε σ που είναι ισοδύναμη με μια ταυτολογία (δηλ. $\sigma = T$.) ή είναι ισοδύναμη με μια αντιλογία ($\sigma =$ είναι γραμμένη συγχρόνως και σε Δ.Κ.Μ. και σε Σ.Κ.Μ

Σχόλιο: Εάν είναι γνωστός ο αληθοπίνακας μιας πρότασ σ τότε είναι πολύ εύκολο να βρούμε την Σ.Κ.Μ και την Δ.Κ.Μ.

Π.χ.

A	B	Γ	σ	¬σ
α	α	α	α ←	ψ
α	α	ψ	ψ	α ←
α	ψ	α	ψ	α ←
ψ	α	α	α ←	ψ
ψ	ψ	α	ψ	α ←
ψ	α	ψ	ψ	α ←
α	ψ	ψ	ψ	α ←
ψ	ψ	ψ	α ←	ψ

Για να κατασκευάσουμε την Δ.Κ.Μ. παίρνουμε μόνο εκείνες τις γραμμές στις οποίες αληθεύει η σ.

$(A \wedge B \wedge \Gamma) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge \Gamma) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg \Gamma))$. : $Δ.Κ.Μ_{\sigma}$

ΣΧΟΛΙΟ: $\neg(\Delta.\kappa.M_{\neg\sigma}) = \Sigma.\kappa.M_\sigma$ δηλαδή η συζευκτική κανονική μορφή της σ βρίσκεται από την Δ.Κ.Μ. της ¬σ παίρνοντας την $\Delta.\kappa.M_{\neg\sigma}$ και με τη χρήση των νόμων De Morgan.

$\Delta.\kappa.M_{\neg\sigma}$: $(A\wedge B\wedge(\neg\Gamma))\vee(A\wedge(\neg B)\wedge\Gamma)\vee((\neg A)\wedge(\neg B)\wedge\Gamma)$
$\vee((\neg A)\wedge B\wedge(\neg\Gamma))\vee(A\wedge(\neg B)\wedge(\neg\Gamma))$

$\neg\Delta.\kappa.M_{\neg\sigma} = ((\neg A)\vee(\neg B)\vee\Gamma)\wedge((\neg A)\vee B\vee(\neg\Gamma))\wedge(A\vee B\vee(\neg\Gamma))$
$\wedge(A\vee(\neg B)\vee\Gamma)\wedge((\neg A)\vee B\vee\Gamma) = \Sigma.\kappa.M_\sigma$.

Π.χ.	A	B	Γ	Δ	Ε	σ	¬σ
(1)	α	ψ	?	α	?	α	ψ
(1)	?	α	α	?	ψ	α	ψ
(24)	όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις					ψ	α

$(A\wedge(\neg B)\wedge\Delta)\vee(B\wedge\Gamma\wedge(\neg E)) = \Delta.\kappa.M_\sigma$

$((A\wedge(\neg B)\wedge\Delta)\vee B)\wedge((A\wedge(\neg B)\wedge\Delta)\vee\Gamma)\wedge((A\wedge(\neg B)\wedge\Delta)\vee(\neg E))$
$= (A\vee B)\wedge T\wedge(\Delta\vee B)\wedge(A\vee\Gamma)\wedge((\neg B)\vee\Gamma)\wedge(\Delta\vee\Gamma)\wedge(A\vee(\neg E))$
$\wedge((\neg B)\vee(\neg E))\wedge(\Delta\vee(\neg E))$

$= (A\vee B)\wedge(\Delta\vee B)\wedge(A\vee\Gamma)\wedge((\neg B)\vee\Gamma)\wedge(\Delta\vee\Gamma)\wedge(A\vee(\neg E))$
$\wedge((\neg B)\vee(\neg E))\wedge(\Delta\vee(\neg E)) = \Sigma.\kappa.M_\sigma$

(που αποτελείται από 8 παράγοντες).

Π.χ. Να βρείτε την $\Sigma.\kappa.M_\sigma$ αν ο αληθοπίνακας της σ είναι:

A	B	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	σ
σε όλες τις περιπτώσεις							ψ

$\sigma = \square = A \wedge (\neg A)$

$\Sigma.K.M_{\sigma} = \Delta.K.M_{\sigma}$

<u>Σχόλιο</u>: Εάν γνωρίζουμε την Δ.Κ.Μ ή την Σ.Κ.Μ. μιας πρότασης σ τότε ουσιαστικά γνωρίζουμε τα πάντα για την σ και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αληθοπίνακά της.

$\boxed{\text{πχ}}$ $\sigma = (A \wedge (\neg E) \wedge Z) \vee (\Gamma \wedge E \wedge B)$: Δ.Κ.Μ.

	A	B	Γ	~~Δ~~	Ε	Ζ	σ
(4)	α	?	?	?	ψ	α	α
(4)	?	α	α	?	α	?	α
	όλες οι υπόλοιπες						ψ

Τρίτη 10-03-15

Μαθηματική Λογική

Όταν φτιάχνουμε τη Δ.Κ.Μ. ή τη Σ.Κ.Μ. μιας φράσης σ είναι πολύ εύκολο να βρούμε για ποιες εκτιμήσεις η πρόταση μας επαληθεύεται:

π.χ. $\sigma = (A \wedge B) \vee (\neg B) \wedge \Gamma \wedge (\neg \Delta) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$

- Έστω V_1, η οποία επαληθεύει τη σύζευξη $A \wedge B$, δηλαδή $V_1(A) = \alpha$, $V_1(B) = \alpha$
- Έστω V_2, η οποία επαληθεύει τη σύζευξη $(\neg B) \wedge \Gamma \wedge (\neg \Delta)$ δηλαδή $V_2(B) = \psi$, $V_2(\Gamma) = \alpha$, $V_2(\Delta) = \psi$
- Έστω V_3, η οποία επαληθεύει τη σύζευξη $(\neg A) \wedge (\neg B)$ δηλαδή $V_3(A) = \psi$, $V_3(B) = \psi$

Για όλες τις άλλες εκτιμήσεις αλήθειας η σ διαψεύδεται

π.χ. $V(A) = \alpha$, $V(B) = \psi$, $V(\Gamma) = \alpha$, $V(\Delta) = \alpha \Rightarrow$ η $V(\sigma) = \psi$

π.χ. $\sigma_1 = (A \vee B) \wedge ((\neg B) \vee \Gamma \vee (\neg \Delta)) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B)) \Rightarrow$ Σ.Κ.Μ.

Σχόλιο: Κάθε πρόταση σ_1 γραμμένη σε Σ.Κ.Μ μορφή μπορεί εύκολα να γραφεί με τη μορφή ενός συνόλου:

π.χ. η $\sigma_1 \rightarrow \{\{A, B\}, \{\neg B, \Gamma, \neg \Delta\}, \{\neg A, \neg B\}\}$

Τα εσωτερικά κόμματα παριστάνουν διαζεύξεις ενώ τα εξωτερικά μεταξύ των συνόλων παριστάνουν τις συζεύξεις.

Για να ~~[illegible]~~ επαληθεύεται η σ_1 αρκεί κάθε παράγοντας της να επαληθεύεται

✓ Έστω $V_1(A) = \alpha$, $V_1(B) = \psi \Rightarrow V_1(A \vee B) = \alpha$, $V_1((\neg B) \vee \Gamma \vee (\neg \Delta)) = \alpha$, $V_1((\neg A) \vee (\neg B)) = \alpha$ $\Rightarrow V_1(\sigma) = \alpha$

✓ Έστω $V_2(B) = \alpha$, $V_2(\Gamma) = \alpha$, $V_2(A) = \psi \Rightarrow V_2(\sigma) = \alpha$

✓ Έστω $V_3(B)=α$, $V_3(Δ)=ψ$, $V_3(A)=ψ$ $\Rightarrow V_3(σ)=α$
Για οποιαδήποτε άλλη εκτίμηση αλήθειας η $V(σ)=ψ$

<u>Σχόλιο</u>: Έστω ότι Σ.Κ.Μ. μιας πρότασης σ με n-πλήθος ατομικές προτάσεις έχει m-παράγοντες με $m\geq 1$, τότε η Δ.Κ.Μ. της σ έχει το πολύ 2^n-m όρους.

<u>Π.χ.</u> για τη σι έχουμε 3 παράγοντες ($m=3$)
Άρα η Δ.Κ.Μ. της σ έχει το πολύ $2^4-3=13$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων της ΛΠ. Το Σ θα λέγεται <u>συνεπές σύνολο</u> (ή επαληθεύσιμο) αν υπάρχει μια τουλάχιστον εκτίμηση V που να επαληθεύει κάθε πρόταση σ.

<u>Ορισμός</u>: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων της Λ.Π. Το Σ θα λέγεται <u>ασυνεπές</u> ή <u>μη επαληθεύσιμο</u> ανν δεν υπάρχει εκτίμηση V που να επαληθεύει κάθε πρόταση σ.

<u>Π.χ.</u> $Σ=\{(A\wedge B)\to Γ,\ A\to B\}$

A	B	Γ	$A\wedge B$	$(A\wedge B)\to Γ$	$A\to B$
α	α	α	α	α	α

Άρα το Σ είναι συνεπές.

<u>Π.χ.</u> $Σ_1=Σ\cup\{(A\wedge(\neg A))\}$ το $Σ_1$: ασυνεπές

<u>Ορισμός</u>: Έστω σ μια πρόταση και Σ ένα σύνολο προτάσεων τότε λέμε ότι το Σ έχει <u>συνέπεια</u> το σ ή διαφορετικά το σ είναι <u>συνέπεια</u> του Σ (και θα γράφουμε $Σ\models σ$) ανν

για κάθε ερμηνεία V, εαν η V επαληθεύει όλες τις προτάσεις της Σ, τότε αναγκαστικά επαληθεύει και τη σ.

Π.χ. σ_1 = «ο Χρήστος αγαπάει τη Νικολέτα ή αγαπάει την Κατερίνα».
σ_2 = «Εαν ο Χρήστος αγαπάει την Νικολέτα, τότε αγαπάει την Κατερίνα».
σ_3 = «Ο Χρήστος αγαπάει την Κατερίνα».

$\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$
A = «ο Χρήστος αγαπάει την Νικολέτα»
B = «ο Χρήστος αγαπάει την Κατερίνα»
$\Sigma = \{A \cup B, A \to B\}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Είναι το Σ συνεπές σύνολο? Ζητάμε V, με
$V(\sigma_1) = \alpha$ και $V(\sigma_2) = \alpha$
$V(A \cup B) = \alpha$ και $V(A \to B) = \alpha$
Προφανώς τέτοιο V υπάρχει $\Rightarrow$ Σ συνεπές σύνολο

ΕΡΩΤΗΜΑ: $\Sigma \models \sigma_3$?

Μέθοδος 1η: Με αληθοπίνακες. Βρίσκουμε τις γραμμές του αληθοπίνακα στις οποίες επαληθεύονται όλες οι υποθέσεις του Σ. (Εαν δεν υπάρχουν τέτοιες γραμμές τότε το Σ είναι ασυνεπές και όπως θα δούμε κάθε πρόταση σ είναι συνέπεια του Σ.) Στη συνέχεια ελέγχουμε για τις παραπάνω γραμμές εαν επαληθεύεται και η σ_3. Εαν πράγματι συμβαίνει αυτό, τότε η σ_3 είναι συνέπεια του Σ. Διαφορετικά δεν είναι.

Σχόλιο: Για να επαληθεύσουμε μία πρόταση σ γραμμένη σε Σ.Κ.Μ., θα πρέπει να επαληθεύσουμε κάθε παράγοντα της σ. Για να επαληθεύσουμε μία πρόταση σ γραμμένη σε Δ.Κ.Μ., θα πρέπει να επαληθεύσουμε τουλάχιστον έναν όρο της σ.

για την 1η σελ. τελευταίο π.χ.

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	B
α	α	α	α	α ✓
α	ψ	α	ψ	δεν μας ενδιαφέρει
ψ	α	α	α	α ✓
ψ	ψ	ψ	δεν μας ενδιαφέρει	δεν μας ενδιαφέρει.

Μέθοδος 2η: Παίρνουμε μία τυχαία αποτίμηση V, η οποία επαληθεύει όλες τις προτάσεις του Σ (υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε τέτοια V) και αποδεικνύουμε ότι $V(\sigma)=\alpha$.

Έστω $V(A \vee B)=\alpha$, $V(A \to B)=\alpha$

1η περίπτωση: $V_1(A)=\alpha$, $V_1(B)=\alpha$, τότε προφανώς το $\sigma_3 = B$ επαληθεύεται

2η περίπτωση: $V_2(B)=\alpha$, $V_2(A)=?$ οπότε μέσω της V_2 επαληθεύονται όλες οι προτάσεις του Σ. Τότε προφανώς το $\sigma_3 = B$ επαληθεύεται

Άρα $\Sigma \models \sigma_3$!

Π.χ. $\Sigma = \{A\}$, $\sigma = ((\neg B) \to (\Delta \to A))$, $\Sigma \models \sigma$?

A	B	Δ	A	$\neg B$	$\Delta \to A$	σ
α	?	?	α	?	α	α ✓

Πράγματι $\Sigma \models \sigma$.

Π.χ. $\Sigma = \{Β \to Α,\ Γ \to Δ,\ Δ \to Β,\ Β \vee Γ \vee Δ\}$, $σ = Α \wedge Β$

i) Σ συνεπές ?

ii) $\Sigma \models σ$?

Λύση: i)

Α	Β	Γ	Δ	Β→Α	Γ→Δ	Δ→Β	Β∨Γ∨Δ	σ
α	α	α	α	α	α	α	α	α

Σχόλιο: Εάν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι Σ: ασυνεπές τότε από το Σ μπορούμε να πάρουμε σαν συνέπεια κάθε πρόταση άρα και τη σ.

Από την πρώτη γραμμή διαπιστώνουμε ότι μπορούν να επαληθευτούν όλες οι προτάσεις του Σ. Άρα το Σ είναι πράγματι συνεπές.

ii)

Α	Β	Γ	Δ	Β→Α	Γ→Δ	Δ→Β	Β∨Γ∨Δ	σ
α	α	?	α	α	α	α	α	α ✓
ψ	ψ	?	α	α		ψ	α	δεν μας ενδιαφέρει
?	ψ	α	ψ	α	ψ	α	α	—‖—
α	ψ	ψ	α	α	α	ψ	α	—‖—
ψ	α			ψ				—‖—

Είναι συνέπεια!

Χρησιμες Προτασεις:

1) Εάν το Σ είναι ασυνεπές σύνολο. Τότε κάθε πρόταση σ, είναι συνέπειά του.

2) (Κανόνας πεπερασμένης σύζευξης) Εάν το Σ είναι πεπερασμένο $\Sigma = \{σ_1, σ_2, \dots, σ_n\}$, τότε $\Sigma \models σ$ ανν $σ_1 \wedge σ_2 \wedge \dots \wedge σ_n$ έχει συνέπεια το σ.

3) (κανόνας του συμπεράσματος) $\Sigma \models σ$ ανν $\Sigma \cup (\neg σ)$ είναι ασυνεπές, δηλαδή για να αποδείξουμε ένα συμπέρασμα σ, αρκεί να πάρουμε την άρνηση του συμπεράσματος μέσα

στις υποθέσεις μας και να καταλήξουμε σε αντίφαση.

Όμοια $\Sigma \models \neg\sigma \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ ασυνεπές σύνολο.

4) -|-|-.

16-03-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\Sigma = \{ A \leftrightarrow \Gamma, B \leftrightarrow \Delta, (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta) \}$, $\sigma = (A \wedge B) \vee (\Gamma \wedge \Delta)$

A	B	Γ	Δ	$A \leftrightarrow B$	$\Gamma \leftrightarrow \Delta$	$(A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)$	σ
α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	ψ ?
α	ψ	α	ψ	α	α	α	
ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	ψ *	

Σχόλιο: * Στην τελευταία περίπτωση οι υποθέσεις του Σ δεν επαληθεύονται, άρα η τελευταία περίπτωση δεν μας απασχολεί σχετικά με το αν $\Sigma \models \sigma$

? Από την δεύτερη γραμμή του αληθοπίνακα συμπεραίνουμε ότι $\Sigma \not\models \sigma$.

//

Έστω ένα Σ ένα σύνολο υποθέσεων και σ μία πρόταση, τότε για να δείξουμε ότι $\Sigma \models \sigma$ υπάρχουν πολλοί τρόποι όπως:

i) Με χρήση ορισμού

ii) Με αληθοπίνακες

iii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλους κανόνες και προτάσεις αναφορικά με το $\models$.

π.χ. Ν.δ.ο. $A \models (\neg B) \to (\Delta \to A)$ έχουμε $\Sigma = \{A\}$ και $\sigma = (\neg B) \to (\Delta \to A)$

i) Έστω V μία τυχαία εκτίμηση αλήθειας με $V(A) = \alpha$. $V(\sigma) = \alpha$? Έχουμε $V((\Delta \to A)) = \alpha$ διότι $V(A) = \alpha$.

Έχουμε όμοια $V(\sigma) = V(\neg B) \to (\Delta \to A) =$

$= V(\neg B) - \neg V(\Delta \to A) = V(\neg B) - \neg \alpha = \alpha$

ii)

A	B	Δ	A	(Δ→A)	¬B	(¬B)→(Δ→α)
α	?	?	α	α	?	α *

* Όποτε το Σ επαληθεύεται τότε και το $\sigma = (\neg B) \to (\Delta \to A)$ επαληθεύεται.

iii) Κανόνας συνεπαγωγής:

$\sigma_1 \to \sigma_2$ είναι πάντα ισοδύναμο με $(\neg \sigma_1) \vee (\sigma_2)$.

Άρα $\Delta \to A = (\neg\Delta) \vee (A)$

$$\neg B \to (\Delta \to A) = \neg B \to (\neg\Delta) \vee (A) = \underbrace{(B) \vee (\neg\Delta) \vee (A)}_{\sigma}$$

Αφού το ~~…~~ σ είναι ισοδύναμο με μία διάζευξη κάποιων ~~…~~ προτάσεων μία εκ των οποίων είναι η υπόθεσή μας είναι προφανές ότι η σ αληθεύει σε κάθε περίπτωση που η υπόθεσή μας αληθεύει.

Κανόνες Συνέπειας.

I. Κανόνας της δυαδικής επίλυσης:

Έστω Σ περιέχει προτάσεις από παράγοντες ~~…~~ και εμφανίζεται κάποια σύγκρουση μεταξύ 2 παραγόντων. Τότε μπορούμε να επιλύσουμε αυτή τη σύγκρουση.

π.χ. $\Sigma = \{A \vee B \vee \ldots, \neg A \vee B \vee \ldots, \ldots\} \models B \ldots \vee B \vee \ldots$

ΣΧΟΛΙΟ: Έστω A, B, Γ, Δ τέσσερα σύνολα. Τότε $(A^c \cup B \cup \Gamma) \cap (A \cup \Delta) \subseteq$
$\subseteq B \cup \Gamma \cup \Delta$

II. Κανόνας πεπερασμένης σύζευξης:

Αν $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ τότε $\Sigma \models \sigma$ αν-ν
$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \models \sigma$

III. <u>Κανόνας του συμπεράσματος:</u>

$\Sigma \models (\sigma_1 \to \sigma_2)$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\sigma_1\} \to \sigma_2$. Δηλαδή εάν θέλουμε να αποδείξουμε την υποθετική πρόταση $\sigma_1 \to \sigma_2$ τότε μπορούμε να προσθέσουμε στις υποθέσεις μας Σ την υπόθεση σ_1 και να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε απλά την σ_2.

<u>Π.χ.</u> $\Sigma \models \sigma_1 \to (\sigma_2 \to (\sigma_3 \to \sigma_4))$ είναι ισοδύναμο με το
$\Sigma \cup \{\sigma_1\} \models \sigma_2 \to (\sigma_3 \to \sigma_4)$ είναι ισοδύναμο με το
$\Sigma \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \models \sigma_4$.

<u>Σχόλιο:</u> (I) Γενικά, αν $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι ~~δύο~~ οποιεσδήποτε προτάσεις και $\Sigma = \{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$

IV. <u>Κανόνας Modus Ponens:</u>

$\{\sigma, \sigma \to \tau\} \models \tau$

<u>Σχόλιο:</u> Επειδή $\sigma \to \tau$ είναι ισοδύναμο με $(\neg\sigma) \vee \tau$ έχουμε $\{\sigma, (\neg\sigma) \vee \tau\} \models \tau$ από κανόνα επίλυσης. Άρα ο κανόνας Modus Ponens είναι ουσιαστικά υποπερίπτωση του κανόνα επίλυσης.

V. <u>Κανόνας του ενδιάμεσου αποτελέσματος:</u>

Έστω $\Sigma \models \sigma'$ και θέλουμε να δείξουμε $\Sigma \models \sigma$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ισοδυναμία: $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\sigma'\} \models \sigma$.

VI. Αν $\square$ είναι μια οποιαδήποτε αντιλογία τότε $\Sigma \models \square$ <u>ανν</u> το Σ ασυνεπής. Όμοια αν T είναι οποιαδήποτε ταυτολογία τότε $\Sigma \models T$ και όμοια $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{T\} \models \sigma$. Δηλαδή οι ταυτολογίες δεν παίζουν κανένα ρόλο στις υποθέσεις μας Σ και άρα μπορούμε να τις απαλείψουμε από το Σ.

<u>Σχόλιο:</u> Εάν το Σ περιέχει μία $\square$ τότε το Σ είναι δυστυχώς ασυνεπής και άρα το $\Sigma \models \sigma$ για κάθε σ.

<u>VII.</u> $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models \square$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ είναι ασυνεπές σύνολο και όμοια $\Sigma \models (\neg\sigma)$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\neg(\neg\sigma)\} \models \square$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \square$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{\sigma\}$ είναι ασυνεπές σύνολο.

<u>Σχόλιο:</u> Από το <u>VII</u> προκύπτει ότι $\Sigma \not\models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma \cup \{(\neg\sigma)\}$ είναι συνεπές (ικανοποιήσιμο).

<u>π.χ.</u> $\Sigma = \{A \leftrightarrow \Gamma,\ B \leftrightarrow \Delta,\ (A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)\} \not\models \underbrace{(A \wedge B) \vee (\Gamma \wedge \Delta)}_{\sigma}$

$\neg\sigma = (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\Gamma \vee \neg\Delta)$

$\Sigma \cup (\neg\sigma) = \{\underbrace{A \leftrightarrow \Gamma}_{\alpha\ \alpha \to \alpha},\ \underbrace{B \leftrightarrow \Delta}_{\psi\ \psi \to \alpha},\ \underbrace{(A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)}_{\alpha\ \Pi\ \alpha \to \alpha},\ \underbrace{(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\Gamma \vee \neg\Delta)}_{\psi\ \alpha \to \alpha,\ \psi\ \alpha \to \alpha;\ \to \alpha}\}$

$\Sigma \cup (\neg\sigma)$: συνεπής.

<u>π.χ.</u> $A \models (\neg B) \to (\Delta \to A)$ <u>ανν</u> $\{A, (\neg B)\} \models (\Delta \to A)$ <u>ανν</u> $\{A, (\neg B), \Delta\} \models A$ που ισχύει!

<u>π.χ.</u> $\{\overset{①}{A \vee B \vee \Gamma},\ \overset{②}{A \vee B \vee (\neg\Gamma)},\ \overset{③}{A \vee (\neg B)},\ \overset{⑤}{(\neg A) \vee \Gamma}\} \models \Gamma$

Από ①,② $\Rightarrow A \vee B$ ④

Από ③,④ $\Rightarrow A$ ⑥

Από ⑤,⑥ $\Rightarrow \Gamma$. Άρα $\Sigma \models \Gamma$.

17-03-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

8) <u>Κανόνας αντικατάστασης:</u>
Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων και Σ' είναι το Σ στο οποίο έχουμε αντικαταστήσει κάποιες προτάσεις του με ισοδύναμες προτάσεις. Τότε για κάθε πρόταση σ ισχύει: $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma' \models \sigma$.
Όμοια ακόμα αν $\sigma' \equiv \sigma$ τότε ισχύει $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> $\Sigma \models \sigma'$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> (δεύτερο κομμάτι)
Έστω V μία τυχαία εκτίμηση και υποθέτουμε ότι $\Sigma \models \sigma$. Θ.δ.ο. $\Sigma \models \sigma'$.
Υποθέτουμε ότι V επαληθεύει κάθε πρόταση του Σ. Οπότε πρέπει να δείξουμε ότι $V(\sigma') = \alpha$
Από τις υποθέσεις μας μπορούμε να πάρουμε $V(\sigma) = \alpha$.
Αφού $\sigma' \equiv \sigma$ προκύπτει και $V(\sigma') = \alpha$.

Θεώρημα Συμπάγειας ($1^{η}$ μορφή)

Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο προτάσεων. Τότε $\Sigma \models \sigma$ <u>ανν</u> υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο Σ' του Σ, έστω $\Sigma' = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ έτσι ώστε $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n \models \sigma$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u> $\Sigma = \{A_1, A_1 \to A_2, A_2 \to A_3, A_3 \to A_4, \dots\}$, $\sigma = A_{200}$
Θα δείξουμε ότι $\Sigma \models \sigma$.
Ορίζουμε $\Sigma' = \{A_1, A_1 \to A_2, \dots, A_{199} \to A_{200}\}$
Από Modus Ponens: $\{\sigma_1, \sigma_1 \to \sigma_2\} \models \sigma_2$

$\{A_1, A_1 \to A_2\} \models A_2$

$\{A_2, A_2 \to A_3\} \models A_3$

$\{A_3, A_3 \to A_4\} \models A_4$

$\vdots$

$\{A_{199}, A_{199} \to A_{200}\} \overset{?}{\models} A_{200}$

Θεώρημα Συμπάγειας (2η Μορφή)

Έστω Σ ένα άπειρο σύνολο προτάσεων τότε το Σ είναι συνεπές ανν $\forall\, \Sigma' \subseteq \Sigma$ πεπερασμένο το Σ' είναι συνεπές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $\Sigma = \{A_1, A_1 \to A_2, A_2, A_3, A_1 \to A_3, A_1 \to (A_2 \wedge A_3), A_2 \to A_3, A_2 \to (A_1 \wedge A_3), A_3 \to (A_1 \wedge A_2) \ldots$ γενικά $A_n \to$ μια πεπερασμένη σύζευξη από άτομα διαφορετικά του $A_n\}$

Είναι το Σ επαληθεύσιμο (συνεπές)?

Έστω $\Sigma' =$ τυχαίο πεπερασμένο υποσύνολο του Σ και ας υποθέσουμε ότι περιέχει προτάσεις στις οποίες εμφανίζονται τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και μόνο.

$\Sigma' \subseteq \{A_1, A_1 \to A_2, A_1 \to A_3, \ldots, A_1 \to A_n, \ldots, A_1 \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_2, \ldots, A_n$), $A_2 \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_1, A_3, \ldots, A_n$), $\ldots, A_n \to$ (πεπερασμένη σύζευξη των $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$)$\}$

Ορίζουμε $V(A_1) = \alpha = V(A_2) = V(A_3) = \cdots = V(A_n)$

είναι προφανές ότι όλες οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν και άρα V επαληθεύει το Σ'. Άρα το Σ' είναι συνεπές.

Μαθηματική Επαγωγή στην Λ.Π.

Έστω P μια ιδιότητα και μας ζητάνε να δείξουμε ότι για κάθε πρόταση σ της Λ.Π. ισχύει $P(\sigma)$

ΒΗΜΑ 1ο: Δείχνουμε ότι για κάθε ατομική πρόταση A ισχύει $P(A)$. (~~Επαγωγικό Βήμα~~)

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $P(\sigma_1)$ και $P(\sigma_2)$

για δύο τυχαίες προτάσεις. Τότε δείχνουμε και τα παρακάτω:

$P(\neg\sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\sigma = \Big(\big((A_1 \wedge A_2) \to A_3\big) \vee (\neg A_4)\Big)$ Δείξτε ότι για κάθε πρόταση σ το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων της είναι ίσο με το πλήθος των αριστερών παρενθέσεων της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $P(\sigma)$ = το πλήθος των δεξιών παρενθέσεων της σ, είναι ίσο με το πλήθος των αριστερών, έστω $\Delta\Pi(\sigma) = A\Pi(\sigma)$

ΒΗΜΑ 1°: Δείχνουμε ότι για κάθε ατομική πρόταση σ, ισχύει η $P(\sigma)$.
Εάν σ ατομική πρόταση τότε προφανώς $\Delta\Pi(\sigma) = 0 = A\Pi(\sigma)$.

Επαγωγικό ΒΗΜΑ: Υποθέτουμε $P(\sigma_1), P(\sigma_2)$ θα δείξουμε $P(\neg\sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

- $P(\neg\sigma_1) :\Leftrightarrow \Delta\Pi(\neg\sigma_1) \overset{?}{=} A\Pi(\neg\sigma_1)$ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Pi(\neg\sigma_1) &= \Delta\Pi(\sigma_1) + 1 \\ &\quad\ \| \\ A\Pi(\neg\sigma_1) &= A\Pi(\sigma_1) + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi(\neg\sigma_1) = A\Pi(\neg\sigma_1)$$

- $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2) :\Leftrightarrow \Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \overset{?}{=} A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ έχουμε

$$\Delta\Pi(\sigma_1) = A\Pi(\sigma_1)$$
$$\Delta\Pi(\sigma_2) = A\Pi(\sigma_2)$$
$$\left.\begin{aligned} \Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) &= \Delta\Pi(\sigma_1) + \Delta\Pi(\sigma_2) + 1 \\ &\qquad\ \| \qquad\qquad \| \\ A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) &= A\Pi(\sigma_1) + A\Pi(\sigma_2) + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = A\Pi(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

⋮

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι για κάθε τυχαία αποτίμηση V και για κάθε πρόταση σ η τιμή του $V(\sigma)$ είναι α ή ψ, αλλά όχι συγχρόνως και τα δύο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $P(\sigma)$ = η $V(\sigma) = \alpha$ ή $V(\sigma) = \psi$ και όχι συγχρόνως και οι δύο τιμές.

ΒΗΜΑ 1º: Έστω $\sigma = A$ για κάποιο A ατομική πρόταση.
Έχουμε από τον ορισμό της εκτίμησης ότι $V(\sigma)=\alpha$ ή $V(\sigma)=\psi$ αλλά όχι συγχρόνως και τα δύο, άρα ισχύει η $P(\sigma)$.

Επαγ. ΒΗΜΑ: Υποθέτουμε $P(\sigma_1)$, $P(\sigma_2)$. Θ.δ.ο. $P(\neg\sigma_1)$, $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

- Θα δείξουμε $P(\neg\sigma_1)$
  Έχουμε ότι $V(\sigma_1)=\alpha$ ή $V(\sigma_1)=\psi$ αλλά όχι και τα δύο
  $V(\neg\sigma_1)=\psi$ ή $V(\neg\sigma_1)=\alpha$ αλλά όχι και τα δύο.
- Θα δείξουμε $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$.
  Έχουμε $V(\sigma_1)=\alpha$ ή $V(\sigma_1)=\psi$ αλλά όχι και τα δύο
  $V(\sigma_2)=\alpha$ ή $V(\sigma_2)=\psi$ —— " ——

1η περίπτωση: $V(\overset{\alpha}{\sigma_1} \to \overset{\alpha}{\sigma_2}) = \alpha$
2η περίπτωση: $V(\overset{\alpha}{\sigma_1} \to \overset{\psi}{\sigma_2}) = \psi$
3η περίπτωση: $V(\overset{\psi}{\sigma_1} \to \overset{\alpha}{\sigma_2}) = \alpha$
4η περίπτωση: $V(\overset{\psi}{\sigma_1} \to \overset{\psi}{\sigma_2}) = \alpha$

Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε ~~α ή ψ αλλά όχι και τα δύο~~ για την $\sigma_1 \to \sigma_2$ αληθοτιμή α ή ψ, αλλά όχι και τα δύο.

Όμοια για $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$.

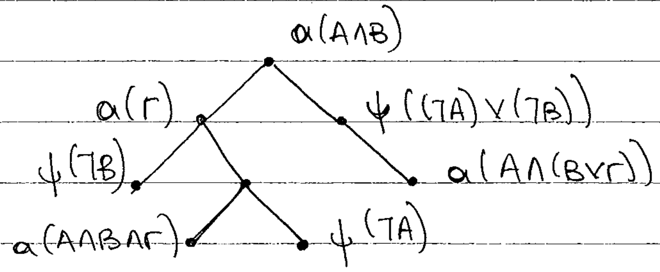
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω V τυχαία ερμηνεία και σ μία πρόταση που περιέχει κάποια από τα άτομα $A_1, A_2, \dots, A_n$. Δείξτε ότι αν V' είναι μία άλλη ερμηνεία έτσι ώστε $\boxed{V(A_1)=V'(A_1), \dots, V(A_n)=V'(A_n)}$ τότε αναγκαστικά $\boxed{V(\sigma)=V'(\sigma)}$: $P(\sigma)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: **ΒΗΜΑ 1º**: $\sigma = A$ μία οποιαδήποτε ατομική πρόταση
Περίπτωση 1η: Αν $A = A_i$, $i=1,\dots,n$ τότε προφανώς $V(A)=V'(A)$
Περίπτωση 2η: Αν $A \neq A_i$, $i=1,\dots,n$. Αυτό δεν γίνεται διότι η σ πρέπει να περιέχει κάποιο από αυτά.

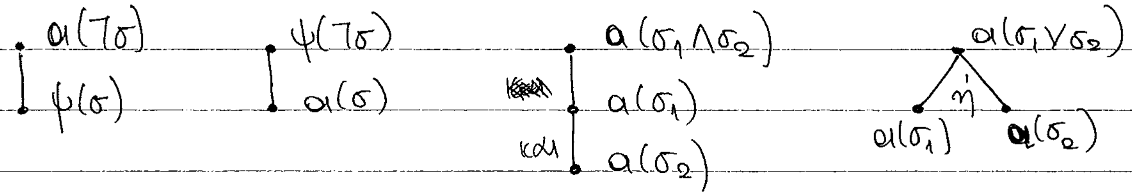
ΒΗΜΑ 2º: $P(\neg\sigma_1)$ Θ.δ.ο. εάν $V(A_1)=V'(A_1), \dots, V(A_n)=V'(A_n)$
Τότε $V(\neg\sigma_1)=V'(\neg\sigma_1) \Leftrightarrow \sim V(\sigma_1) = \sim V'(\sigma_1) \Leftrightarrow V(\sigma_1)=V'(\sigma_1)$
που ισχύει λόγω της υπόθεσης $P(\sigma_1)$
Όμοια αποδεικνύουμε τα $P(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \to \sigma_2)$, $P(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΟΥ BETH

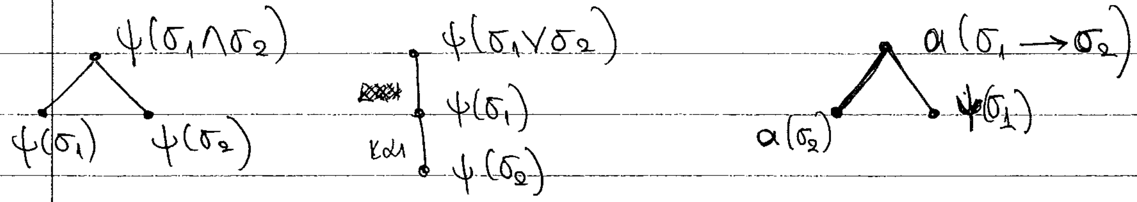
Είναι αντεστραμμένα δυαδικά δένδρα τα οποία έχουν κόμβους προτάσεις της Λ.Π. με κάποιο πρόσημο μπροστά (α ή ψ)

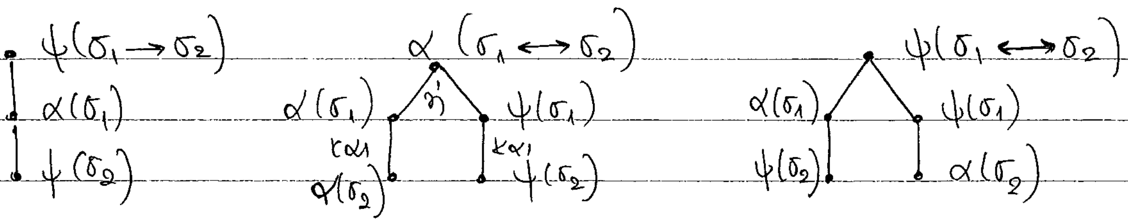


ΒΑΣΙΚΟΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΟΥ BETH.



Σχόλιο: Η διακλάδωση σε ένα σημαντικό πίνακα του Beth μας δίνει τη δυνατότητα να διαλέξουμε όποιο μονοπάτι από τα δύο θέλουμε.



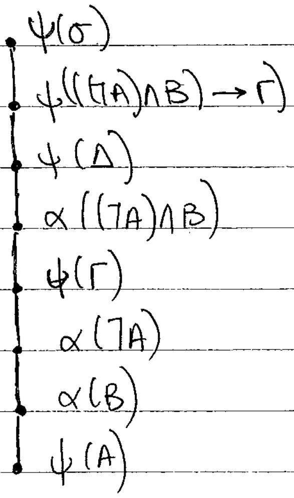


Υπάρχουν 10 σημαντικοί πίνακες του Beth.

Σχόλιο: Μπορούμε να βλέπουμε τους σημαντικούς πίνακες του Beth ως τον αληθοπίνακα μιας πρότασης σ. Έτσι για παράδειγμα εαν ζητάμε να βρούμε σε ποιές ερμηνείες ν ισχύει

$V(\sigma)=\alpha$ θα πρέπει να ξεκινήσουμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα Beth με κορυφή $\alpha(\sigma)$ και όμοια εάν ζητάμε τις V τ.ω. $V(\sigma)=\psi$. θα πρέπει να ξεκινήσουμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα Beth με κορυφή $\psi(\sigma)$.

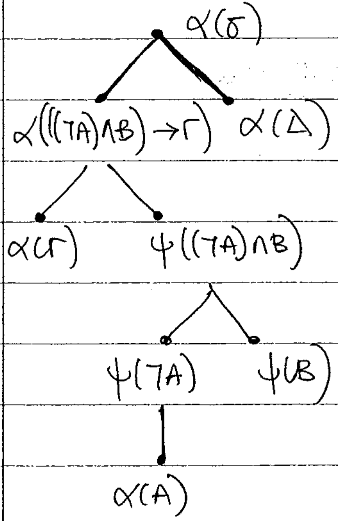
<u>Παράδειγμα</u>: $\sigma=(((\neg A)\wedge B)\rightarrow \Gamma)\vee\Delta$ Πότε διαψεύδεται πότε αληθεύει;



Άρα για να διαψεύσουμε την παραπάνω σ θα πρέπει να επιλέξουμε μια ερμηνεία V έτσι ώστε $V(A)=\psi$, $V(B)=\alpha$, $V(\Gamma)=\psi$, $V(\Delta)=\psi$.

(Η σ είναι απλά επαληθεύσιμη)

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Έστω $V'\neq V$ πχ. $V(A)=\alpha$ και $V=V'$ για όλα τα υπόλοιπα.
Τότε επειδή δεν εμφανίζεται η V στον πίνακα συμπεραίνουμε ότι $V'(\sigma)=\alpha$.



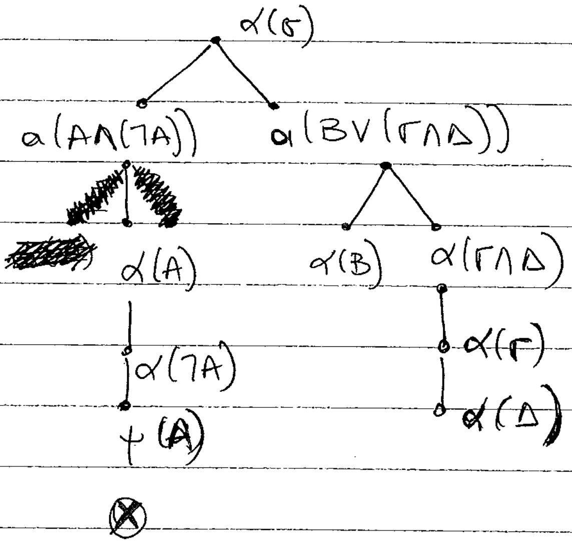
Άρα υπάρχουν μόνο 4 περιπτώσεις εκτιμήσεων V οι οποίες επαληθεύουν την πρότασή μας.

1η περίπτωση: $V_1(\Gamma)=\alpha \Rightarrow V_1(\sigma)=\alpha$
2η περίπτωση: $V_2(\Delta)=\alpha \Rightarrow V_2(\sigma)=\alpha$
3η περίπτωση: $V_3(B)=\psi \Rightarrow V_3(\sigma)=\alpha$
4η περίπτωση: $V_4(A)=\alpha \Rightarrow V_4(\sigma)=\alpha$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα μονοπάτι (κλάδος) λέγεται αντιφατικό εάν περιέχει την $\alpha(\sigma)$ και την $\psi(\sigma)$ για μια πρόταση σ.

ΣΧΟΛΙΟ: Όταν σε ένα σημαντικό δένδρο συναντάμε έναν αντιφατικό κλάδο. Τότε θέτουμε το σύμβολο ⊗ που σημαίνει ότι απαγορεύεται να επεκτείνουμε τον κλάδο αυτό. Από αντιφατικούς κλάδους δεν μπορούμε να ανακαλύψουμε κάποιες ερμηνείες που επαληθεύουν ή διαψεύδουν τη ρίζα μας.

Παράδειγμα: Να βρείτε όλες τις περιπτώσεις που η $\sigma = (\underbrace{A \wedge (\neg A)}) \vee (\underbrace{B \vee (\Gamma \wedge \Delta)})$ επαληθεύεται.



Άρα $1^{η}$ περίπτωση: $V_1(B)=\alpha \Rightarrow V_1(\sigma)=\alpha$.

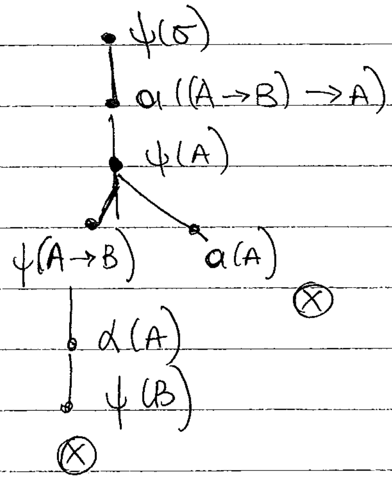
$2^{η}$ περίπτωση: [redacted]

$$\left.\begin{matrix} V_2(\Delta)=\alpha \\ V_2(\Gamma)=\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow V(\sigma)=\alpha.$$

ΣΧΟΛΙΟ: Εάν επιλέξουμε προσεκτικά μία ερμηνεία V που δεν ανήκει σε καμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις τότε η V διαψεύδει τη σ.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $V(B)=\psi,\ V(\Gamma)=\psi \Rightarrow V(\sigma)=\psi$.

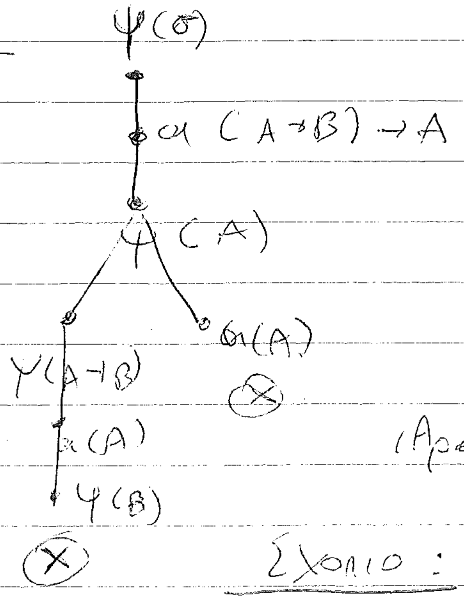
** $\boxed{\text{Πχ.}}$ $\sigma = (\underbrace{(A \to B) \to A}) \to \underline{A}$ Να κατασκευαστεί ο σημαντικός πίνακας του Beth $\psi(\sigma)$. Τι συμπεραίνετε για τη σ;



Άρα δεν υπάρχουν ερμηνείες που διαψεύδεται η σ. Άρα για την ερμηνεία V η σ επαληθεύεται. Άρα η σ είναι μια ~~[illegible]~~ ταυτολογία.

* Σχόλιο: Για να αποδείξουμε ότι μια σ είναι ένας νόμος (ταυτολογία) αρκεί να κατασκευάσουμε ένα σημαντικό πίνακα του Beth με κορυφή $\psi(\sigma)$ και όλους τους κλάδους του αντιφατικούς.

Λύση:



1η περίπτωση:

Δεν υπάρχουν ερμηνείες που διαψεύδεται η σ. Άρα για τυχαία ερμηνεία V η σ επαληθεύεται. Άρα η σ είναι νόμος/ταυτολογία.

Σχόλιο: Για να δω μία σ είναι ένας νόμος (ταυτολογία) χρειάζεται να κατασκευάσουμε έναν σημαντικό πίνακα του Beth με κορυφή ψ(σ) και όλους τους κλάδους τους αντιφατικούς. Στην αντιλογία ξεκινάμε με α(σ).

23/3/15

β' ώρα

Σχόλιο: εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι το σύνολο προτάσεων Σ είναι συνεπές, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός σημαντικού πίνακα του Beth στην οποία η κορυφή αποτελείται από τις προτάσεις του Σ με πρόθεμα α. Εάν βγουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το Σ είναι ασυνεπές. Διαφορετικά είναι συνεπές.

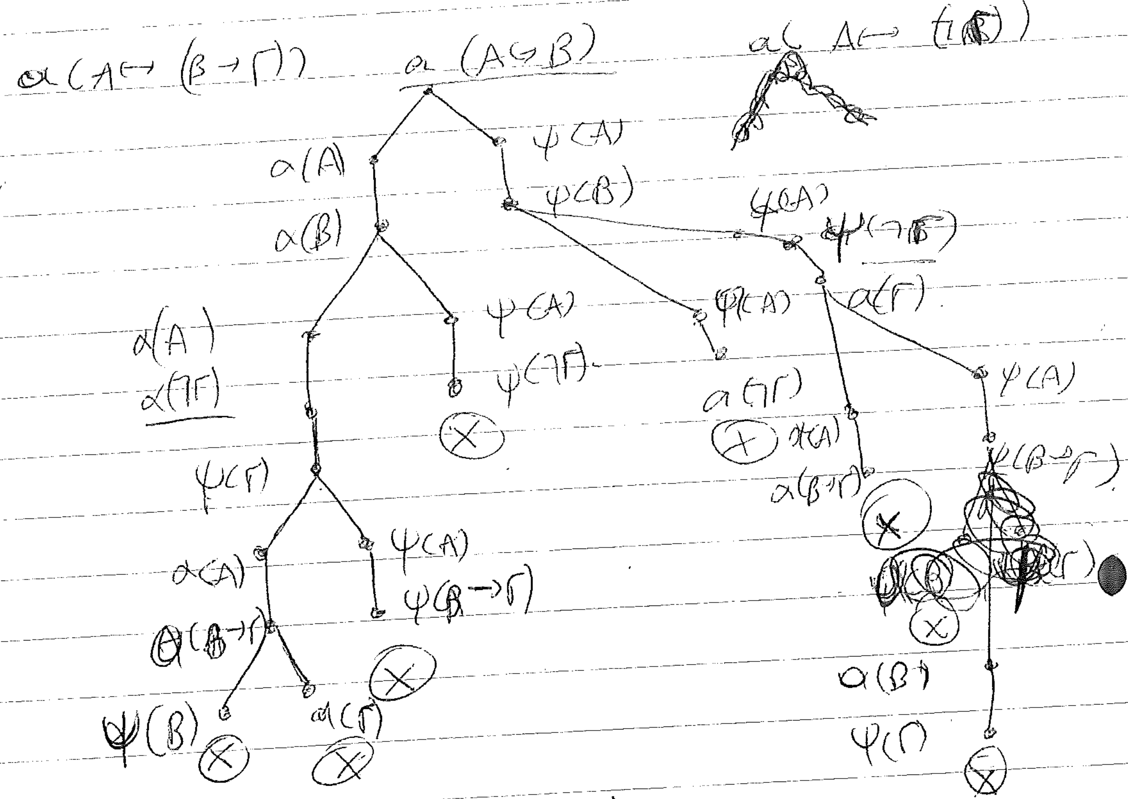
Εάν μας ζητάνε να δείξουμε ότι $Σ \models σ$, τότε ξεκινάμε την κατασκευή ενός ΣΠ του Beth με κορυφή που αποτελείται από όλες τις προτάσεις του Σ με πρόθεμα α και την πρόταση σ με πρόθεμα ψ. Εάν προκύψουν όλοι οι κλάδοι αντιφατικοί, τότε το $Σ \models σ$. Διαφορετικά δεν ισχύει $Σ \models σ$.

Σχόλιο: Γενικά εάν ξεκινάμε με κορυφή α(σ) και προκύπτει ένας ΣΠ του Beth με όλους τους κλάδους αντιφατικούς, τότε αυτό σημαίνει ότι η σ είναι μία αντίφαση. Διαφορετικά η σ είναι μια επαληθεύσιμη πρόταση.

Εάν ξεκινάμε με μορφή $\psi(\sigma)$ και προκύπτει ΕΠ το Beth με όλους τους κλάδους αντιφατικούς, τότε αυτό σημαίνει ότι η σ είναι μια ταυτολογία, διαφορετικά η σ είναι μία διαψεύσιμη πρόταση (δηλαδή μπορούμε να ανακατασκευάσουμε από την κατασκευή μας μία ερμηνεία V που δίνει ψ στην πρόταση)

(*) δηλαδή μπορούμε ... που δίνει α στην πρόταση.

π.χ. $\Sigma = \{ A \leftrightarrow (B \to \Gamma),\ A \leftrightarrow B,\ A \leftrightarrow (\neg\Gamma) \}$ ασυνεπές?

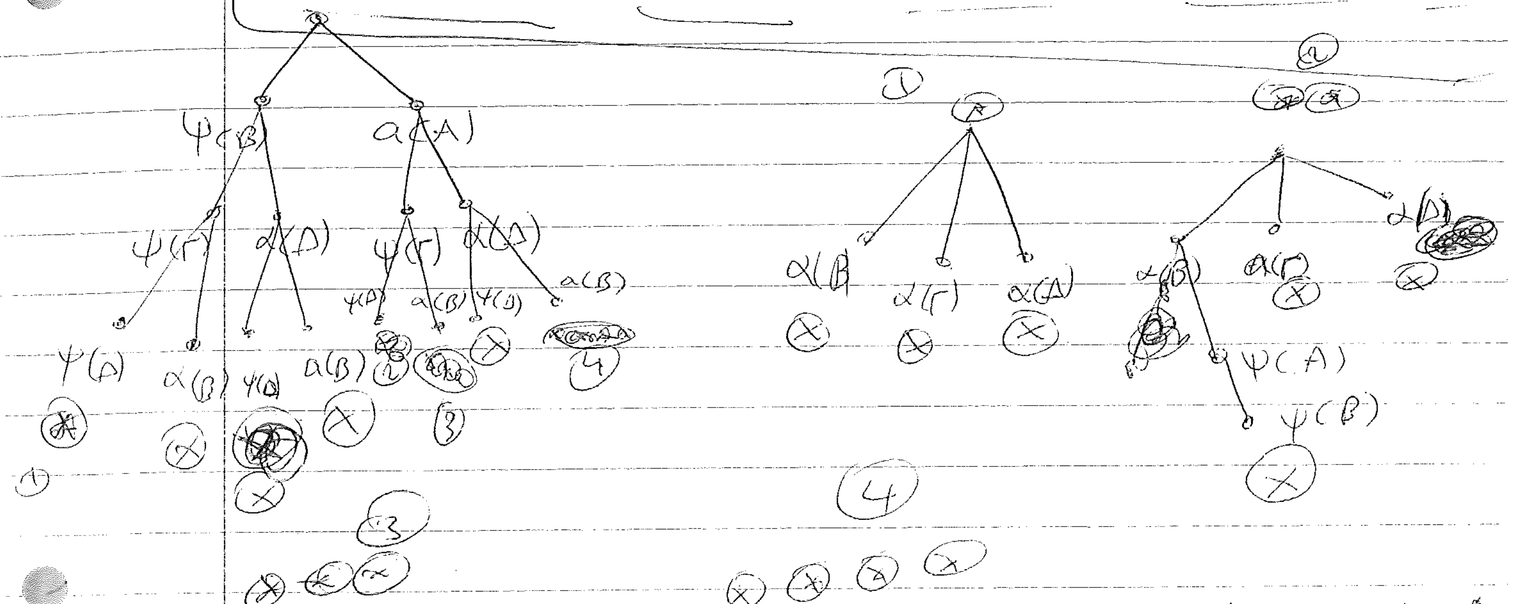


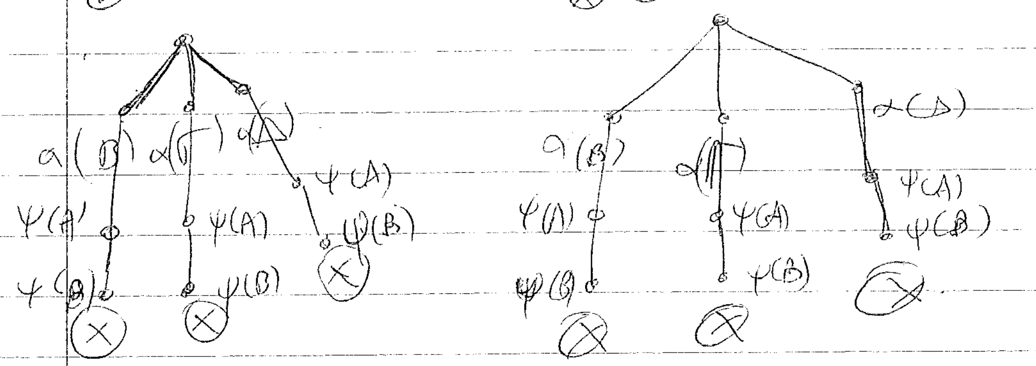
Αφού όλοι οι κλάδοι μας είναι αντιφατικοί, αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατο να επαληθεύσουμε με κάποια ερμηνεία την μορφή μας, άρα το Σ είναι ασυνεπές.

π.χ. Να ελέγξετε εάν ισχύει $\Sigma \models \sigma$ με $\Sigma = \{ B \to A,\ \Gamma \to \Delta,\ \Delta \to B,\ B \vee \Gamma \vee \Delta \}$ και $\sigma = (A \vee B)$

Λύση:

$\alpha(B\to A)$ $\alpha(\Gamma\to\Delta)$ $\alpha(\Delta\to B)$ $\alpha(B\vee\Gamma\vee\Delta)$ $\psi(A\vee$





Άρα τελικά το $\Sigma \models \sigma$.

24/3/15

Β' ώρα

Πρόταση: Δείξτε ότι εάν για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, τότε αναγκαστικά και το Σ είναι ασυνεπές.

Απόδειξη: Κανόνας επίλυσης $\{\neg\sigma_1\vee\sigma_2, \sigma_1\vee\sigma_3\} \models \sigma_2\vee\sigma_3$

Άρα όλα τα στοιχεία του $R(\Sigma)$ είναι συνέπειες του Σ, δηλαδή $\Sigma \models R(\Sigma)$. Με όμοιο τρόπο $R(\Sigma) \models R^2(\Sigma)$ ... $R^{n-1}(\Sigma) \models R^n(\Sigma)$. Άρα από αυτές τις σχέσεις έπεται ότι το $\Sigma \models R^n(\Sigma)$. Αφού το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές έπεται ότι και το Σ είναι ασυνεπές.

Ορισμός: Το $\emptyset$, δηλ. το $\{\ \}$ αντιστοιχεί σε μία αντίφαση και για αυτό το συμβολίζουμε με $\square$.

Ορισμός: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων με $R^*(\Sigma)$ συμβολίζουμε την άπειρη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(\Sigma)$, δηλαδή

ΣΧΟΛΙΟ: Εάν Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ τότε για να δείξουμε ότι $\Sigma \models \sigma$ αρκεί να πάρουμε την πρόταση $\tau = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n$ και να αποδείξουμε ότι $\tau \models \sigma$, δηλ. θα ξεκινήσουμε απλά με την κορυφή $\alpha\tau$, $\psi\sigma$.

Δυαδική επίλυση: Συνολοθεωρητική μορφή: Εάν η σ έχει γραφτεί σε Σ.Κ.Μ. τότε αυτή είναι φυσικά συζεύξεις διαζεύξεων στοιχειωδών τύπων, δηλ. $\sigma = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$ όπου σ_i, $i = 1, \dots, n$ είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων. Μια διάζευξη στοιχειωδών τύπων μετατρέπεται εύκολα σε συνολοθεωρητική μορφή στην οποία κάθε διάζευξη έχει μετατραπεί σε ένα κόμμα.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ $((\neg A) \vee (\neg \Delta) \vee (\neg \Gamma)) \longrightarrow \{\neg A, \neg \Delta, \neg \Gamma\}$.
Στην Σ.Κ.Μ. μετατρέπουμε τις συζεύξεις μεταξύ των διαζεύξεων στοιχειωδών τύπων σε κόμματα και στη συνέχεια μετατρέπουμε κάθε διάζευξη στοιχ. τύπων σε συνολοθεωρητική μορφή $A \rightarrow \{A\}$.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ $((\neg A) \vee (\neg \Delta) \vee (\neg \Gamma) \wedge (A \vee (\neg \Delta) \vee \Gamma) \rightarrow \{\{\neg A, \neg \Delta, \neg \Gamma\}, \{A, \neg \Delta, \Gamma\}\}$

$\boxed{\text{Π.χ}}$ $A \wedge B \rightarrow \{\{A\}, \{B\}\}$
$A \vee B \rightarrow \{\{A, B\}\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ όλες γραμμένες σε συνολοθεωρητική μορφή. Έστω L μια ατομική πρόταση για την οποία υπάρχουν 2 προτάσεις σ_i, σ_j για τις οποίες ισχύει ότι $L \in \sigma_i$ και $\neg L \in \sigma_j$. Τότε μπορούμε να εξάγουμε ως συμπέρασμα την πρόταση $\sigma_i \cup \sigma_j \setminus \{L, \neg L\}$. Την πρόταση αυτή τη λέμε επιλύουσα των σ_i, σ_j ως προς L και συμβολίζεται $R_L(\sigma_i, \sigma_j)$

$\boxed{\Pi.\chi.}$ $\sigma_1 = ((\neg A)\vee(\neg\Delta)\vee\Gamma)$ $\quad\sigma_1 = \{\neg A, \neg\Delta, \Gamma\}$

$\sigma_2 = (A\vee(\neg\Gamma)\vee(\neg B))$ $\quad\sigma_2 = \{A, \neg\Gamma, \neg B\}$

Επιλέγουμε να επιλύσουμε ως προς Α.

$\sigma_1 \vee \sigma_2 \quad \{A, \neg A\} = \{\neg\Delta, \Gamma, \neg\Gamma, \neg B\} = R_A(\sigma_1,\sigma_2)$ αντιστοιχεί στο $(\neg\Delta)\vee\Gamma\vee(\neg\Gamma)\vee(\neg B) = T$.

$R_\Gamma(\sigma_1,\sigma_2) = \{\neg A, A, \neg\Delta, \neg B\}$ αντιστοιχεί στο $((\neg A)\vee A\vee(\neg\Delta)\vee(\neg B)) = T$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων σε συνολοθεωρητική μορφή. Τότε το σύνολο $\Sigma\cup\{$όλες οι δυνατές επιλύουσες μεταξύ των προτάσεων του $\Sigma\}$. θα ονομάζεται επιλύουσα του Σ και θα συμβολίζεται $R(\Sigma)$.

$\boxed{\Pi.\chi.}$ $\Sigma = \{A\vee(\neg B)\vee(\neg\Gamma),\ B\vee\Delta,\ (\neg A)\vee(\neg\Delta)\}$

$\underbrace{\{A,\neg B,\neg\Gamma\}}_{=\sigma_1},\ \underbrace{\{B,\Delta\}}_{=\sigma_2},\ \underbrace{\{\neg A,\neg\Delta\}}_{=\sigma_3}$

$R(\Sigma) = \Sigma\cup\{R_B(\sigma_1,\sigma_2),\ R_A(\sigma_1,\sigma_3),\ R_\Delta(\sigma_2,\sigma_3)\}$

$= \Sigma\cup\{\underbrace{\{A,\neg\Gamma,\Delta\}}_{=\sigma_4},\ \underbrace{\{\neg B,\neg\Gamma,\neg\Delta\}}_{=\sigma_5},\ \underbrace{\{B,\neg A\}}_{=\sigma_6}\}$

$R(R(\Sigma)) = R(\Sigma)\cup\{\underline{R_A(\sigma_1,\sigma_6)},\ R_B(\sigma_1,\sigma_6),\ R_B(\sigma_0,\sigma_3),\ R_\Delta(\sigma_2,\sigma_3),$
$R_A(\sigma_3,\sigma_4),\ R_\Delta(\sigma_3,\sigma_4),\ \underline{R_A(\sigma_4,\sigma_6)},\ R_B(\sigma_5,\sigma_6)\}$

$R_A(\sigma_1,\sigma_6) = \{\neg B, \neg\Gamma, B\} = T$

$R_A(\sigma_3,\sigma_4) = \{\neg\Delta, \neg\Gamma, \Delta\} = T$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Τις ταυτολογίες τις αφαιρούμε από τις επιλύουσες.

Το $R^2(\Sigma) = R(R(\Sigma))$ είναι 14 διαφορετικές προτάσεις (έλεγχος;).

ΣΧΟΛΙΟ: Εαν το Σ είναι πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων τότε θα βρούμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$R^n(\Sigma) = R^{n+1}(\Sigma) = R^{n+2}(\Sigma) = \dots$$

δηλ. από ένα n και πέρα δεν υπάρχουν νέες επιλύσεις.

Π.χ. Αν $\Sigma = \{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}\}$

$$R(\Sigma) = \{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}, R_A(\sigma_1, \sigma_3)\} = \{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}, \{\ \}\}$$

$R^2(\Sigma) = R(\Sigma) \cup \{$οι επιλύσεις μεταξύ των στοιχείων του $\Sigma\}$
$= R(\Sigma)$.

για $n = 1$ $R^1(\Sigma) = R^2(\Sigma)$

ΣΧΟΛΙΟ: Εαν ένα Σ περιέχει το κενό μέσα του τότε προφανώς είναι <u>ασυνεπές</u>.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Δείξτε ότι εάν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, τότε αναγκαστικά και το Σ είναι ασυνεπές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Κανόνας επίλυσης: $\{\neg\sigma_1 \vee \sigma_2, \sigma_1 \vee \sigma_3\} \models \sigma_2 \vee \sigma_3$
άρα όλα τα στοιχεία του $R(\Sigma)$ είναι συνέπειες του Σ.
δηλ. $\Sigma \models R(\Sigma)$. Με όμοιο τρόπο $R(\Sigma) \models R^2(\Sigma)$, ... $R^{n-1}(\Sigma) \models R^n(\Sigma)$
Άρα απ' αυτές τις σχέσεις έπεται ότι το $\Sigma \models R^n(\Sigma)$.
Αφού το $R^n(\Sigma)$ είναι ασυνεπές, έπεται ότι και το Σ είναι ασυνεπές.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το $\emptyset$ δηλαδή το $\{\ \}$ αντιστοιχεί σε μια αντιλογία και γι' αυτό το συμβολίζουμε $\Box$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων με $R^*(\Sigma)$ συμβολίζουμε την άπειρη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(\Sigma)$. Δηλαδή μια οποιαδήποτε πρόταση που προκύπτει από επίλυση κάποιων προτάσεων του Σ ή από δυαδική επίλυση κάποιων προτάσεων του $R^n(\Sigma)$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Μπορούμε απλά να πούμε ότι $r\in R^*(\Sigma)$ αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $r_1, r_2, \dots, r_n$ με $r_n = r$ και κάθε r_i είτε ανήκει στο Σ είτε προέκυψε με δυαδική επίλυση (κάποιου ατόμου L) από δύο προηγούμενα βήματα r_k, r_j

r_1
r_2
$\vdots$
r_n

ΑΣΚΗΣΗ 1: Έστω $\Sigma = \{B\to A, \Gamma\to\Delta, \Delta\to B, B\vee\Gamma\vee\Delta\}$
Δείξτε ότι $A\in R^*(\Sigma)$, $B\in R^*(\Sigma)$

ΛΥΣΗ: Βήμα 1ο:

$B\to A \equiv (\neg B)\vee A$

$\Sigma = \{\{\neg B, A\}, \{\neg\Gamma, \Delta\}, \{\neg\Delta, B\}, \{B, \Gamma, \Delta\}\}$

r_1 $\{\neg B, A\}$
r_2 $\{\neg\Delta, B\}$
r_3 $R_B(r_1, r_2) = \{A, \neg\Delta\}$
r_4 $\{\neg\Gamma, \Delta\}$
r_5 $R_\Delta(r_3, r_4) = \{A, \neg\Gamma\}$
r_6 $\{B, \Gamma, \Delta\}$
r_7 $R_\Gamma(r_5, r_6) = \{A, B, \Delta\}$
r_8 $R_\Delta(r_3, r_7) = \{A, B\}$
r_9 $R_B(r_1, r_8) = \{A\}$

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $B\in R^*(\Sigma)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω Σ ένα σύνολο προτάσεων σε συνολοθεωρητική μορφή και σ μια διάζευξη στοιχειωδών τύπων σε συνολοθεωρητική μορφή. Θα γράφουμε $\Sigma \models_R \sigma$ αν $\sigma\in R^*(\Sigma)$ και θα λέμε ότι η σ είναι συνέπεια του Σ με δυαδική επίλυση.

Γενικά: εάν $\sigma = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$ είναι μια πρόταση γραμμένη σε Σ.Κ.Μ. τότε $\Sigma \models_R \sigma$ ανν $\forall i = 1, \ldots, n$ ισχύει $\Sigma \models_R \sigma_i$

Π.χ. Δείξτε ότι $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$ $\models_R A \wedge B$

Σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να δείξουμε $\Sigma \models_R \{A\}$ και όμοια $\Sigma \models_R \{B\}$

Σχόλιο: Έστω ότι θέλουμε ν.δ.ο. Σ ασυνεπές: τότε το γράφουμε σε συνολοθεωρητική μορφή και στη συνέχεια προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\Sigma \models_R \square$

$\sigma 7$
$\sigma 3$

Απόδειξη: $R_B(\sigma 1, \sigma 3) = \{A, \neg A\} = \sigma 5$,

$R_\Delta(\sigma 5, \sigma 9) = \{A, \neg\Gamma\} = \sigma 6$, $R_\Gamma(\sigma 6, \sigma 4) = \{A, B\Delta\} = \sigma 7$,

$R_B(\sigma 1, \sigma 7) = \{\Delta, A\} = \sigma 8$, ~~$RA(\sigma 5, \sigma 8) = \{A\}$~~.

10 μαρκα για το B.

Μαθηματική Λογική

17/4/15 Λογική των κατηγορημάτων (πρωτοβάθμια Λογική)

Ορισμός: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ της ΛΚ είναι ένα σύνολο από σύμβολα που χωρίζονται σε 2 κατηγορίες. Τα λογικά και τα ειδικά σύμβολα.

- Λογικά σύμβολα: α) σύμβολα μεταβλητών είναι όλα τα γράμματα ή λέξεις που ξεκινούν με κεφαλαία
π.χ. $X, Y, Z, X_1, \ldots,$ ~~Αθηνα~~ Αθηνά
β) λογικοί σύνδεσμοι: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
γ) Βοηθητικά σύμβολα όπως παρενθέσεις, σημεία στίξεως κ.ο.κ.
δ) ποσοδείκτες $\forall, \exists$; ε) το σύμβολο της ισότητας $=$
- Ειδικά σύμβολα: α) σύμβολα κατηγορημάτων. Από ξεκινάνε συνήθως με τα τελευταία γράμματα του ~~[illegible]~~ αλφαβήτου.
π.χ. $p, q, r, \ldots$
β) σύμβολα συναρτήσεων π.χ. $f, f_0, f_1, g, h, \ldots$
γ) σύμβολα σταθερών π.χ. $a, a_0, b, b_0, \ldots$

ΣΧΟΛΙΑ: Μία γλώσσα $\mathcal{L}$ περιέχει οπωσδήποτε όλα τα λογικά σύμβολα και κάποια από τα ειδικά σύμβολα ανάλογα με τις ανάγκες μας.

1) παράδειγμα: Κατασκευή γλώσσας της θεωρίας αριθμών

$$\mathcal{L}_{\Theta A} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$$

Τα σύμβολα 0, 1 θεωρούνται σύμβολα σταθερών.
Το $\leq$ θεωρούμε ότι είναι σύμβολο κατηγορήματος (διμελές σύμβολο κατηγορήματος)

Σχόλιο: Εάν το p θεωρείται ως ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος κάποιας γλώσσας L, τότε όταν γράφουμε XpY θα εννοούμε $p(X,Y)$. π.χ. Αντί να γράφουμε $\leq(X,Y)$ γράφουμε συνήθως $X \leq Y$.

Η $+$ (πρόσθεση) και $\cdot$ (πολλαπλασιασμός) θεωρούνται διθέσια σύμβολα συναρτήσεων. Σχόλιο: Για διθέσια σύμβολα συναρτήσεων ισχύει το ίδιο σχόλιο με το παραπάνω, π.χ. $X+Y$ εννοούμε $+(X,Y)$

Παραδείγματα: ① Υπάρχει ένας αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους

$$(\exists X)(\forall Y)\{Y \neq X \rightarrow Y \leq X\}$$

② Το 2 είναι πρώτος αριθμός

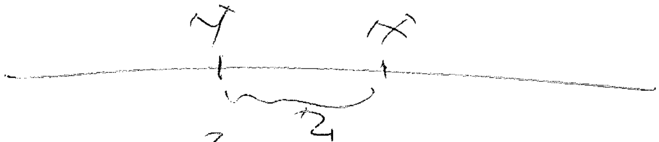
$$(\forall X)\{(X \neq 1) \wedge (X/2) \xrightarrow[(\text{τότε})]{} (X=2)\}.$$

Σχόλιο: Το $X/2$ μπορεί να γραφεί στην $L_{ΘΑ}$ ως εξής: $(\exists K)\ X \cdot K = 2$

Άρα $(\forall X)\{(X \neq 1) \wedge [(\exists K)\ X \cdot K = 1+1] \rightarrow (X = 1+1)\}$

Σχόλιο: Όταν μας δοθεί μια γλώσσα L της ΛΚ, τότε μπορούμε να προσθέσουμε καινούρια ειδικά σύμβολα, ώστε να καλύψουμε τις ανάγκες μας.
π.χ. $L'_{ΘΑ} = L_{ΘΑ} \cup \{\underbrace{/}_{\text{σύμβ. σχέσεων}}, \underbrace{2, 3, \dots}_{\text{σύμβ. σταθερών}}\}$

Στην $L_{ΘΑ}$ προσθέσαμε ένα καινούριο σύμβολο κατηγορήματος / (διμελές) και επίσης άπειρο το πλήθος νέα σύμβολα σταθερών. Μπορούμε επίσης σε μερικές περιπτώσεις να εξαλείψουμε κάποια από τα ειδικά σύμβολα και έτσι να κατασκευάσουμε μια μικρότερη γλώσσα.



π.χ. $\mathcal{L}_{\Theta A} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ ίδια όπως με πριν.

$(\exists X)(\forall Y)\{X \neq Y \rightarrow (\exists Z)(Y+Z = X)\}$ σταθερά

Παράδειγμα γλώσσας θεωρίας συνόλων: $\mathcal{L}_{\Theta\Sigma} = \{\emptyset, \in\}$

Το $\emptyset$ είναι σύμβολο μιας σταθεράς. Το $\in$ είναι σύμβολο κατηγορήματος διμελές. π.χ. $X \subseteq Y$ μπορούμε να το περιγράψουμε ως εξής: $(\forall Z)(Z \in X \rightarrow Z \in Y)$

π.χ. $W = \{\emptyset\}$. Μπορούμε να το περιγράψουμε: $(\forall Z)(Z \in W \leftrightarrow Z = \emptyset)$. Είναι σύνηθες να πλουτίσουμε τη γλώσσα μας με νέα ειδικά σύμβολα

π.χ. $\mathcal{L}_{\Theta\Sigma'} = \mathcal{L}_{\Theta\Sigma} \cup \{\subseteq, \cap, \cup, \setminus, \Delta, \wp, \dots\}$

σύμβ. σχέσεως κατηγορήματος · συμπλήρωμα

ΣΘ
- η τομή είναι σύμβολο διθέσιο σύμβολο συναρτήσεων
  η ένωση
  η διαφορά
  συμμετρική διαφορά
- το δυναμοσύνολο είναι σύμβολο μονοθέσιο συνάρτησης

ΣΟΣ

π.χ. Έστω A, B είναι 2 υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω. Τότε ισχύει $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\mathcal{L}_{\Theta\Sigma}$

$$(\forall A)(\forall B)\{(A \subseteq \Omega) \wedge (B \subseteq \Omega) \rightarrow (\Omega \setminus (A \cap B)) = (\Omega \setminus A) \vee (\Omega \setminus B)\}$$

π.χ. ① Το δυναμοσύνολο του $\emptyset$ δεν είναι το κενό σύνολο. $\mathcal{L}_{\Theta\Sigma}$

$$\wp(\emptyset) \neq \emptyset$$

② Το δυναμοσύνολο του $\emptyset$ είναι το μονοσύνολο που περιέχει το $\emptyset$. $(\{\emptyset\})$ $\mathcal{L}_{\Theta\Sigma}$

Θέλουμε αυτό: $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$(\forall Z)(Z \in \wp(\emptyset) \leftrightarrow Z = \emptyset)$.

Γλώσσα ευκλείδιας γεωμετρίας: ($\mathcal{L}_{\mathrm{E\Gamma}}$)

$\mathcal{L}_{\mathrm{E\Gamma}} = \{$σημείο, $\in$, ευθεία, παράλληλο, ...$\}$

Το σημείο είναι μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

Η ευθεία είναι μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.
Το $\in$ είναι διμελές σύμβολο κατηγορήματος.
Το $\parallel$ είναι κι αυτό διμελές σύμβολο κατηγορήματος.

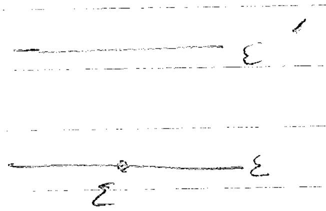
π.χ. Για κάθε δοσμένη ευθεία υπάρχει ένα σημείο εντός αυτής. ΔΕΓ

$$\forall X\,(\text{ευθεία}(X) \rightarrow (\exists Y)(\text{σημείο}(Y) \land (Y \in X)))$$

π.χ. Από 2 δοθέντα σημεία υπάρχει μια ευθεία που διέρχεται από αυτά. ΔΕΓ

$$(\forall X_1)(\forall X_2)(\text{σημείο}(X_1) \land \text{σημείο}(X_2) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\exists Y)(\text{ευθεία}(Y) \land (X_1 \in Y) \land (X_2 \in Y)))$$

π.χ. $\exists$ ευθεία μοναδική (ε) που διέρχεται από ένα σημείο Σ εκτός της ευθείας ε' έτσι ώστε ε||ε'.



ΤΕΛΟΣ 27-04-15

2η ώρα: 27-04-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (Γλώσσα Θεωρίας συνόλων)

$L_{Θ.Σ.} = \{\phi, \in\}$

Το ϕ είναι σύμβολο μιας σταθεράς

Το $\in$ είναι ~~σύμβολο~~ διμερές σύμβολο κατηγορήματος.

Το $(X \subseteq Y)$ μπορούμε να το περιγράψουμε ως εξής: $(\forall Z)[(Z \in X) \to (Z \in Y)]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $W = \{\phi\}$ μπορούμε να το περιγράψουμε:

$$(\forall Z)(Z \in W \leftrightarrow Z = \phi)$$

ΣΧΟΛΙΟ: Είναι σκόπιμο να πλουτίσουμε τη γλώσσα μας ($L_{Θ.Σ.}$) με νέα ειδικά σύμβολα.

Π.χ. $L'_{Θ.Σ.} = L_{Θ.Σ.} \cup \{\subseteq, \cap, \cup, \setminus, \Delta, P, \ldots\}$

όπου $\subseteq$ είναι ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος.

όπου $\Delta, \cap, \cup, \setminus$ είναι διθέσια σύμβολα συναρτήσεων.

Το δυναμοσύνολο P είναι μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης.

Π.χ. Έστω A, B είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω. Τότε ισχύει $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(\forall A)(\forall B)\{(A \subseteq \Omega) \wedge (B \subseteq \Omega) \to (\Omega \setminus (A \cap B)) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)\}$

Π.χ. Το δυναμοσύνολο του κενού δεν είναι το κενό σύνολο.

$$P(\phi) \neq \phi.$$

Π.χ. Το δυναμοσύνολο του κενού είναι το μονοσύνολο που περιέχει το κενό: $P(\phi) = \{\phi\}$

$(\forall Z)(Z \in P(\phi) \leftrightarrow Z = \phi)$

Γλώσσα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας $\mathcal{L}_{\varepsilon.\gamma.}$

$\mathcal{L}_{\varepsilon.\gamma.} = \{$σημείο, $\in$, ευθεία, $//$, ...$\}$

Το σημείο είναι ~~...~~ μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

Η ευθεία είναι μονομελές σύμβολο κατηγορήματος.

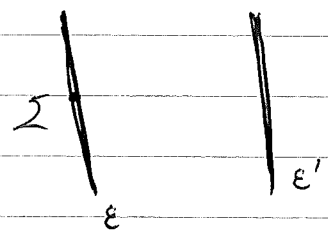
Το $\in$ είναι διμελές σύμβολο κατηγορήματος.

Το $//$ είναι διμελές σύμβολο κατηγορήματος.

π.χ. Για κάθε δοσμένη ευθεία, υπάρχει ένα σημείο εκτός αυτής: $(\forall x)\{(\text{ευθεία}(x)) \to (\exists y)(\text{σημείο}(y) \wedge \neg(y \in x))\}$

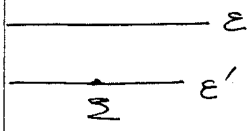
π.χ. Από δύο δοσμένα σημεία, υπάρχει μία ευθεία που διέρχεται απ' αυτά τα σημεία:
$(\forall x_1)(\forall x_2)\{\text{σημείο}(x_1) \wedge \text{σημείο}(x_2) \to (\exists y)(\text{ευθεία}(y) \wedge (x_1 \in y) \wedge (x_2 \in y))\}$.

π.χ. Υπάρχει μοναδική ευθεία ε που διέρχεται από ένα σημείο Σ εκτός της ευθείας ε', έτσι ώστε $\varepsilon // \varepsilon'$.



$\mathcal{L} = \{$σημείο, ευθεία, $/\!/$, $\in\}$

Υπάρχει μοναδική ευθεία ε' που διέρχεται από το σημείο Σ που βρίσκεται εκτός της ευθείας ε και είναι παράλληλη στην ε (ε'//ε)



$(\forall \Sigma)(\forall E)[(\text{ευθεία}(E) \wedge \text{σημείο}(\Sigma) \wedge (\neg(\Sigma \in E))) \to$
$\to (\exists E')(\text{ευθεία}(E') \wedge (\Sigma \in E') \wedge (E' /\!/ E))]$

Κλασσικά Λάθη: (1) Δεν επιτρέπεται μέσα σε ένα σύμβολο κατηγορήματος να βάζουμε άλλα σύμβολα κατηγορήματος.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $\text{σημείο}(x) \neq \text{σημείο}(y) \to (\exists E)((x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (\text{ευθεία}(E)))$ ×
$\text{σημείο}(x) \wedge \text{σημείο}(y) \wedge (x \neq y) \to (\exists E)((x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (\text{ευθεία}(E)))$ ✓

(2) Δεν επιτρέπεται μετά από ποσοδείκτες να βάζουμε οποιοδήποτε άλλο σύμβολο εκτός από μεταβλητές.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $(\forall\ \text{ευθεία}(E))(\exists\ \text{σημείο}(X))(\exists\ \text{σημείο}(y))[(x \in E) \wedge (y \in E) \wedge (x \neq y)]$ ×
$(\forall E)(\exists X)(\exists Y)(\text{ευθεία}(E) \to \text{σημείο}(X) \wedge \text{σημείο}(Y) \wedge (X \neq Y) \wedge (X \in E) \wedge (Y \in E))$ ✓

$(\forall \Sigma)(\forall E)[\text{ευθεία}(E) \wedge \text{σημείο}(\Sigma) \wedge \Sigma \notin E \to$

Ύπαρξη
$\to$ ① $(\exists E')[\text{ευθεία}(E') \wedge (\Sigma \in E') \wedge (E' /\!/ E)]$

Μοναδικότητα
$\to$ ② $(\forall E_1)(\forall E_2)[\text{ευθεία}(E_1) \wedge \text{ευθεία}(E_2) \wedge (\Sigma \in E_1) \wedge (\Sigma \in E_2)$
$\wedge (E_1 /\!/ E_2) \wedge (E_2 /\!/ E) \to E_1 = E_2]$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\exists!$ Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $(\exists! z)\phi(z)$ όπου $\phi(z)$ ένας τύπος της $\mathcal{L}_K$ θα εννοούμε τον τύπο $[(\exists z)\phi(z)] \wedge (\forall z_1)(\forall z_2)[\phi(z_1) \wedge \phi(z_2) \rightarrow (z_1 = z_2)]$.

$(\forall \Sigma)(\forall E)[\text{ευθεία}(E) \wedge \text{σημείο}(\Sigma) \wedge (\Sigma \in E) \rightarrow (\exists! E')(\phi(E'))]$

$\boxed{\text{π.χ}}$ Υπάρχει πτήση της Ο.Α. από οποιαδήποτε μεγάλη πόλη της Αθήνας.

$\mathcal{L} = \{$αθήνα, ο.α., ελλάδα, μεγάληπόλη$(\cdot,\cdot)$, πτήση$(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\}$

$(\forall x)[$ μεγάληπόλη$(x,$ ελλάδα$) \longrightarrow (\exists y)($πτήση$(y,$ o.A.$, x,$ αθήνα$)]$.

$\mathcal{L}' = \{$μεγάληπόλητηςελλάδος$(\cdot)$, πτήσηολυμπιακήςγιααθήνα$(\cdot)\}$

$(\forall x)[$μεγάληπόλητηςελλάδος$(x) \longrightarrow$ πτήσηολυμπιακήςγιααθήνα$(x)]$

$\boxed{\text{π.χ}}$ Κάθε θετικός αριθμός έχει μια μοναδική τετραγωνική ρίζα.

$\mathcal{L} = \{$θετικόςαριθμός$(\cdot)$, τετραγωνικήρίζα$(\cdot)\}$

μονομερές σύμβολο κατηγορήματος — μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης

$(\forall x)[$θετικόςαριθμός$(x) \longrightarrow \exists!(z)($τετραγωνικήρίζα$(x) = z]$

αλλιώς: $\mathcal{L} = \{0, \sqrt[2]{\cdot}, >\}$

σταθερά — διμερές σύμβολο σχέσης — μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης

$(\forall x)[(x > 0) \longrightarrow \exists!(z)(\sqrt[2]{x} = z)]$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα της Λ.Κ. τότε ένας <u>όρος</u> είναι πρώτον ένα οποιοδήποτε σύμβολο σταθεράς $c \in \mathcal{L}$, δεύτερον μια οποιαδήποτε μεταβλητή, τρίτον ένα οποιοδήποτε σύμβολο συνάρτησης f που στις θέσεις του έχουμε βάλει κάποιους όρους που ήδη έχουμε κατασκευάσει.

Π.χ. $\mathcal{L}_{Θ.Α} = \{0, 1, \leq, +, \cdot\}$

Παραδείγματα όρων: $1+1$

x^2

$x+32 = (((x+1)+1)+1)+\ldots$

$x \cdot y + 2z = x \cdot y + (z+z)$

ΣΧΟΛΙΟ: Οποιοδήποτε πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές είναι ένας όρος της $\mathcal{L}_{Θ.Α}$.

Πχ $\mathcal{L}_{Θ.Σ.} = \{\phi, \epsilon\}$ Σε αυτή τη γλώσσα οι μοναδικοί όροι είναι το ϕ και οι μεταβλητές του.

Πχ $\mathcal{L}'_{Θ.Σ.} = \{\phi, \epsilon, \cup, \cap, \setminus, \Delta, P(\cdot)\}$

όροι: όλες οι μεταβλητές, ϕ, $x \cup \phi$, $x \cup y$, $x \Delta y$, ...

ΟΡΙΣΜΟΣ: Άτομο ή <u>ατομικός τύπος</u> για την γλώσσα $\mathcal{L}$ ονομάζουμε κάθε κατηγόρημα $p \in \mathcal{L}$ που τα μέλη του έχουν καταλάβει κάποιοι όροι της $\mathcal{L}$.

Πχ στην $\mathcal{L}_{Θ.Α}$: $0 \leq 1$, $x = 3$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $x \neq y$ δεν είναι ατομικός τύπος!

στην $\mathcal{L}_{Θ.Σ}$: $A \in B$, $A = B$, $\phi \in \phi$ | στην $\mathcal{L}'_{Θ.Σ}$: $P(\phi) = P(\phi)$, $x \in y$, $A \cap B = B \cap A$

έστω $Y=\{y\}$ $f^{-1}[Y]=\emptyset \Rightarrow f[f^{-1}[Y]]=\emptyset \neq Y$

<u>άτοπο</u>.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> (σπίτι):

Να δείξετε ότι:

(i) (α) $\Rightarrow$ η f "επί"

(ii) αν f "επί" του B, τότε ισχύει και το (α) και το (β)

(iii) f "1-1" $\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq A$ ισχύει $f^{-1}[f[X]]=X$

* (iv) f "1-1" και "επί" $\Leftrightarrow$ $\forall X \subseteq A$, $f[A \setminus X] = B \setminus f[X]$

30-04-15

Μαθηματική Λογική

Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα της Λ.Κ., τότε με $O(\mathcal{L})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των όρων της γλώσσας. Όμοια με $AT(\mathcal{L})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ατομικών τύπων της γλώσσας μας.

Υπενθύμιση: $AT(\mathcal{L}) = \{p(t_1, t_2, \dots, t_n)$: όπου p είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος της $\mathcal{L}$ και $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι όροι της γλώσσας $\mathcal{L}$ που έχουν καταλάβει τις n θέσεις του $p\}$.

Ορισμός τύπου: Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα της Λ.Κ. τότε:

(α) κάθε ατομικός τύπος της $\mathcal{L}$ είναι ένας τύπος

(β) Έστω σ_1, σ_2 τύποι της $\mathcal{L}$ τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε νέους τύπους είτε χρησιμοποιώντας συνδέσμους π.χ. $(\neg\sigma_1), (\sigma_1 \wedge \sigma_2), (\sigma_1 \vee \sigma_2), (\sigma_1 \to \sigma_2), (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ είτε χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες π.χ. $((\forall x)\sigma_1), ((\exists y)\sigma_2)$ κ.τ.λ.

(γ) τύποι είναι μόνο οι ακολουθίες συμβόλων που ικανοποιούν τους παραπάνω κανόνες (α), (β).

Παράδειγμα: $\mathcal{L} = \{<, f, p, q\}$ όπου η $<$ είναι ένα διμελές σύμβολο κατηγορήματος, το f είναι μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης και p, q είναι μονομελή σύμβολα κατηγορημάτων.

$$(\forall \underset{*}{x}, y)(f(y) \underset{*}{>} p(\underset{*}{z}) \to q(x)) \quad : \text{Λάθος στα } *$$

Σωστό:
$$\left[((\forall x)(\forall y)\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(z < f(y))}_{\text{ατομικός τύπος}} \wedge \underbrace{(p(z))}_{\text{ατομικός τύπος}})}_{\text{τύπος}} \to \underbrace{(q(x))}_{\text{ατομικός τύπος}})}_{\text{τύπος.}})\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\forall\ \underset{*}{\text{ανθρωπο}}(z))\ [\ (\text{ηλικια}(z)) > 120 \rightarrow (\text{νεκρος}(z))\ ]$

Σωστό: $(\forall z)\Big[\big((\text{ανθρωπος}(z)) \wedge (\text{ηλικια}(z) > 120)\big) \rightarrow (\text{νεκρός}(z))\Big]$

ΑΣΚΗΣΗ: Ο Γιάννης αγαπάει το φαγητό.
Το μήλο είναι φαγητό.
Το κοτόπουλο είναι φαγητό.
Οτιδήποτε τρώγεται χωρίς να προκαλεί θάνατο είναι φαγητό.
Η Μαρία τρώει, ότι τρώει και ο Χρήστος.
Φτιάξτε μια κατάλληλη γλώσσα L στην οποία να εκφράσετε τις παραπάνω εκφράσεις με κατάλληλους τύπους της.

$L = \{\ \text{γιάννης}, \text{μαρία}, \text{χρίστος}, \text{μήλο}, \text{κοτόπουλο}, \overbrace{\text{φαγητό}(\cdot)}^{\text{σύμβολο μονομελές κατηγορήματος}},$
$\underbrace{\text{αγαπάει}(\cdot,\cdot)}_{\text{διμελές σύμβολο κατηγορήματος}}, \underbrace{\text{τρώει}(\cdot,\cdot)}_{\text{διμελές σύμβολο κατηγορήματος}}, \underbrace{\text{νεκρός}(\cdot)}_{\text{μονομελές σύμβ. κατηγορημ.}}\ \}$

Λάθος: αγαπάει(γιάννης, φαγητο(x))
~~Σωστό: αγαπάει(γιάννης, X)~~
« Σωστό: φαγητό(X) → αγαπάει(γιάννης, X)
Σωστό: $(\forall X)(\text{φαγητο}(x) \rightarrow \text{αγαπάει}(\text{γιάννης}, X))$
Σωστό: φαγητό(μήλο)
-||-: φαγητό(κοτόπουλο)
« -||-: $(\forall Y)(\forall Z)[(\text{τρώει}(Z,Y) \wedge (\neg\text{νεκρός}(Z)) \rightarrow \text{φαγητό}(Y)]$
-||-: $(\forall Y)\ (\text{φαγητό}(Y) \longleftrightarrow (\exists Z)(\text{τρώει}(Z,Y)) \wedge (\neg(\text{νεκρός}(Z))))$
-||-: $\underbrace{(\forall Z)\ \underbrace{(\underbrace{\text{τρώει}(\text{χρίστος}, Z)}_{\text{ατομικός τύπος}} \rightarrow \underbrace{\text{τρώει}(\text{μαρία}, Z)}_{\text{ατομικός τύπος}})}_{\text{τύπος}}}_{\text{τύπος}}$

Ορισμός: Μια εμφάνιση της μεταβλητής Χ μέσα σε ένα οποιοδήποτε υποτύπο σ του τύπου τ με $\sigma = (\forall x)\phi$ είτε $\sigma = (\exists x)\phi$ λέγεται <u>δεσμευμένη εμφάνιση</u> της Χ μέσα στον τ.

Ορισμός: Μια εμφάνιση της μεταβλητής Χ μέσα σε έναν τύπο τ λέγεται <u>ελεύθερη εμφάνιση</u> εαν η συγκεκριμένη εμφάνιση δεν είναι δεσμευμένη στο τ.

Παράδειγμα: $\tau = [(\forall \overset{\delta.\varepsilon.}{x})\, p(\overset{\delta.\varepsilon.}{x}, \overset{\varepsilon.\varepsilon.}{y})] \rightarrow [(\forall \overset{\delta.\varepsilon.}{z})\, q(\overset{\delta.\varepsilon.}{z}, \overset{\varepsilon.\varepsilon.}{x})]$

όπου p, q : διμελή σύμβολα κατηγορημάτων

Ορισμός: Μια μεταβλητή Χ που εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά σε έναν τύπο τ καλείται <u>ελεύθερη</u> αν μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία ελεύθερη εμφάνιση της Χ μέσα στο τ. Διαφορετικά η μεταβλητή x λέγεται <u>δεσμευμένη</u> στον τύπο τ.

~~Π.χ. Από το προηγούμενο παράδειγμα~~
~~X: δεσμευμένη μεταβλητή~~
~~Y: ελεύθερη μεταβλητή~~
~~Z: δεσμευμένη μεταβλητή~~

Π.χ. Από το προηγούμενο παράδειγμα:
Η μεταβλητή Χ εμφανίζεται στον τ μία φορά ως ε.ε.
Άρα είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τ.
Η μεταβλητή Ζ εμφανίζεται δύο φορές ως δ.ε. Άρα είναι δεσμευμένη μέσα στον τ.
Η μεταβλητή Υ εμφανίζεται στον τ μία φορά ως ε.ε.
Άρα είναι ελεύθερη μέσα στον τ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές λέγεται <u>πρόταση.</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\exists x)(\exists y)[\underbrace{\text{Δάσκαλος}(x,y)}_{\text{διμελές σύμβολο κατηγ.}} \cap \underbrace{\text{διδάσκει}(x,y,\underset{\text{ε.ε.}}{z})}_{\text{τριμελές σύμβολο κατηγορ.}}]$

Δεν είναι πρόταση.

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[\text{Δάσκαλος}(x,y) \cap \text{διδάσκει}(x,y,z)]$

Είναι πρόταση.

ΣΧΟΛΙΟ: Όπως θα δούμε παρακάτω ένας τύπος μπορεί να έχει πολλές σημασίες σε έναν "κόσμο" (ερμηνεία) ενώ μια πρόταση έχει πάντοτε μια και μοναδική σημασία (ναι ή όχι) σε έναν οποιοδήποτε "κόσμο."

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω L μια γλώσσα της Λ.Κ. και θα "ερμηνεύσουμε" τους τύπους της L. Μια <u>ερμηνεία</u> ή δομή ή μοντέλο $\mathcal{A}$ της L αποτελείται από τα παρακάτω:

Ο πιο σημαντικός του μαθήματος!

Α καλλιγραφ.

1) Ένα μη κενό σύνολο A που λέγεται σύμπαν της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|\mathcal{A}|$
2) Για κάθε σύμβολο σταθεράς $c \in L$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο του A που συμβολίζεται με $E_{\mathcal{A}}(c)$ ή $E(c)$. Το $E(c)$ λέγεται η ερμηνεία του c μέσω της $\mathcal{A}$.
3) Για κάθε ν-θέσιο σύμβολο συνάρτησης $f \in L$ αντιστοιχεί μια μοναδική συνάρτηση $E_{\mathcal{A}}(f)$ ή $E(f): A^{\nu} \to A$
4) Για κάθε ν-μελές σύμβολο κατηγορήματος $p \in L$ αντιστοιχεί μια μοναδική σχέση $E_{\mathcal{A}}(p)$ ή $E(p) \subseteq A^{\nu}$

4-05-15

Μαθηματική Λογική

Ορισμός: Ερμηνεία (δομής ή μοντέλου)

Έστω $\mathcal{L}$ μια γλώσσα της Λ.Κ. (και θέλουμε να "ερμηνεύσουμε" κάθε τύπο της $\mathcal{L}$) τότε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ εννοούμε ένα σύνολο αντικειμένων που αποτελείται από τα παρακάτω:

1) Ένα μη κενό σύνολο A που λέγεται σύμπαν της $\mathcal{A}$.

2) Για κάθε σύμβολο σταθεράς $c \in \mathcal{L}$ υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_A(c)$ ή $\varepsilon(c)$

3) $\forall$ ν-μελές σύμβολο κατηγορήματος $p \in \mathcal{L}$ υπάρχει μια μοναδική σχέση στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_A(p)$ ή $\varepsilon(p)$ και ισχύει $\varepsilon(p) \subseteq A^{\nu}$

4) $\forall$ ν-θέσιο σύμβολο συνάρτησης $f \in \mathcal{L}$ υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση στο A που συμβολίζεται με $\varepsilon_A(f)$ ή $\varepsilon(f)$. Ισχύει $\varepsilon(f): A^{\nu} \to A$.

Η ερμηνεία $\mathcal{A}$ αποτελείται απ' όλα τα παραπάνω αντικείμενα. Δηλαδή το σύμπαν A και τις ερμηνείες $\varepsilon(c)$, $\varepsilon(p)$, $\varepsilon(f)$ για όλες τις σταθερές, σχέσεις, συναρτήσεις αντίστοιχα που εμφανίζονται μέσα στη γλώσσα $\mathcal{L}$.

Παράδειγμα: $\mathcal{L}_{\Theta.A.} = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$

$\mathcal{A}: A = \mathbb{N}$

$\varepsilon(+) =$ η γνωστή πρόσθεση στους φυσικούς αριθμούς.

$\varepsilon(\cdot) =$ ο γνωστός πολλ/σμός ——— || ———

$\varepsilon(0) =$ το 0 (μηδέν) $= 0_A$

$\varepsilon(1) =$ το 1 (ένα) $= 1_A$

$\varepsilon(\leq) =$ το γνωστό $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς.
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| \leq_A$

$\varepsilon(3) = \varepsilon(1+1+1) = \varepsilon(1)\,\varepsilon(+)\,\varepsilon(1)\,\varepsilon(+)\,\varepsilon(1) = 3_{\lambda}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\lambda' : A' = \{0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{N}$

$\varepsilon(0) =$ το $0 = 0_{\lambda'}$

$\varepsilon(1) =$ το $2 = 2_{\lambda'}$

$\varepsilon(\leq) =$ το γνωστό $\leq$ στους άρτιους φυσικούς.

$\varepsilon(+) =$ η γνωστή $+$ στους ——— || ———.

$\varepsilon(\cdot) =$ ο γνωστός $\cdot$ ——— || ———.

$$(\forall X)(\exists Y)(X = (1+1)Y \vee X = (1+1)Y + 1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\lambda'' : A'' = \mathbb{N}$, $\varepsilon(0) = 0 = 0_{\lambda''}$

$\varepsilon(1) = 0$ (μηδέν) $= 0_{\lambda''}$

$\varepsilon(+), \varepsilon(\cdot), \varepsilon(\leq)$ οι ερμηνείες των γνωστών...

$$(\forall x)(\exists Y)(X = (1+1)Y \vee X = (1+1)Y + 1)$$

Προφανώς σε αυτή την ερμηνεία δεν μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο των φυσικών σε άρτιους και περιττούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\lambda_{0\Sigma} = \{\phi, \in\}$, $\mathcal{B}$: $B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}$

$\varepsilon(\phi) = 0_{\mathcal{B}}$

$\varepsilon(\in) \subseteq B^2$ ορίζουμε ~~[illegible]~~ $\varepsilon(\in) =$ το $\leq$ στους ακεραίους.

$-1\ \varepsilon(\in)\ 2$: ισχύει.

Πρόταση: $(\forall X)(X \notin \phi)$

Η παραπάνω πρόταση δεν αληθεύει (τουλάχιστον διαισθητικά) στην παραπάνω ερμηνεία $\mathcal{B}$ διότι $\varepsilon(\phi)$ περιέχει όλα τα ~~[illegible]~~ $\leq 0_{\mathcal{B}}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{B}' : \mathcal{B}' = \{1_N\}$ με $\varepsilon(\phi) = 1_N$

$\varepsilon(\in) = \phi$

Σε αυτή την τετριμμένη ερμηνεία $\mathcal{B}'$ το $\varepsilon(\phi)$ είναι ένα αντικείμενο που δεν περιέχει τίποτα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{B}'' : \mathcal{B}'' = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$ $\quad \varepsilon(\phi) = 0$

$\varepsilon(\in) =$ το $<_{\mathcal{B}''} = <$ στους φυσικούς.

$3_{\mathcal{B}''} = \{\varepsilon(\phi), 1_{\mathcal{B}''}, 2_{\mathcal{B}''}\}$

Σχόλιο: Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται διαισθητικά ότι η αλήθεια ή το ψέμα ενός τ εξαρτάται από την συγκεκριμένη ερμηνεία με την οποία εργαζόμαστε

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ είναι μια ερμηνεία για την γλώσσα $\mathcal{L}$ και A το σύμπαν της. Τότε μια αποτίμηση υ στην $\mathcal{A}$ είναι μια συνάρτηση που δίνει μια μοναδική τιμή (από το A) σε κάθε μεταβλητή X της $\mathcal{L}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{A}$: με σύμπαν A τους φυσικούς αριθμούς. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια αποτίμηση υ:

$\upsilon(X) = 5$, $\upsilon(Y) = 7$, $\upsilon(Z) = 8$

Σχόλιο: Δεν είναι σωστό να λέμε ερμηνεύω μια μεταβλητή (X), το σωστό είναι να πούμε ότι αποτιμούμε την X δίνοντας σε αυτή μια συγκεκριμένη τιμή με την βοήθεια κάποιας αποτίμησης υ μέσα σε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$.

Σχόλιο: Με την χρήση μιας αποτίμησης υ μπορούμε να ερμηνεύσουμε μέσα σε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ τύπους που περιέχουν ελεύθερες μεταβλητές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δίνεται ο $\tau = X \leq 1$ και ερμηνεία $\mathcal{A}$: $A = \mathbb{N}$,
$\varepsilon(\leq)$ = το γνωστό $\leq_{\mathbb{N}}$ στους φυσικούς αριθμούς
$\varepsilon(1) = 1_{\mathbb{N}}$
Για να ερμηνεύσουμε το τ είμαστε αναγκασμένοι να δουλέψουμε με μία συγκεκριμένη αποτίμηση υ.
π.χ. $\upsilon(X) = 11$, $\upsilon(Z) = 0$ για οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή Z,
Τότε η τ είναι ψευδής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας την συγκεκριμένη αποτίμηση υ, διότι:
$\upsilon(X)\ \varepsilon(\leq)\ \varepsilon(1) \Rightarrow 11 \leq 1$ που δεν ισχύει!
π.χ. $\upsilon'(X) = 0$, $\upsilon'(Z) = 7$ για οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή Z.
Τότε η τ είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας την αποτίμηση υ', διότι:
$\upsilon'(X)\ \varepsilon(\leq)\ \varepsilon(1) \Rightarrow 0 \leq 1$ που ισχύει.

ΣΧΟΛΙΟ: Η ερμηνεία ενός τύπου τ εξαρτάται από δύο παράγοντες: α) την ερμηνεία $\mathcal{A}$ στην οποία ερμηνεύουμε όλα τα σύμβολα της $\mathcal{L}$. β) την αποτίμηση υ στην $\mathcal{A}$ με την οποία αποτιμούμε όλες τις μεταβλητές της γλώσσας $\mathcal{L}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Θα γράφουμε $\mathcal{A}, \upsilon \models \tau$ (ικανοποιεί) την τ και συμβολίζουμε το γεγονός ότι η τ αληθεύει στην $\mathcal{A}$ με χρήση της υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{A}, \upsilon \not\models X \leq 1$, $\mathcal{A}, \upsilon' \models X \leq 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο όρος c σε μια γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι
- κάθε σύμβολο σταθερό $c \in \mathcal{L}$
- κάθε μεταβλητή $x \in M(\mathcal{L})$ όπου $M(\mathcal{L})$ παριστάνουμε το σύνολο των μεταβλητών της $\mathcal{L}$.
- κάθε σύμβολο συνάρτησης $f \in \mathcal{L}$ όπου στις θέσεις της έχουμε τοποθετήσει ήδη κατασκευασμένους όρους από προηγούμενα βήματα.

Ερώτημα: Πως δίνουμε τιμές σε όρους στη γλώσσα μας;

Απάντηση: Αν $\mathcal{A}$ είναι μια ερμηνεία τότε μπορούμε να δώσουμε την τιμή $\varepsilon(c)$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c. Έστω επίσης v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε μπορούμε να δώσουμε την τιμή $v(x)$ σε κάθε μεταβλητή $x \in M(\mathcal{L})$. Όμως για να δώσουμε κάποια τιμή σε κάποιο πιο σύνθετο τ. Θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο σε μια συνάρτηση v^* που δίνει μια μοναδική τιμή μέσα από το σύμπαν A της ερμηνείας $\mathcal{A}$ και μάλιστα με τις παρακάτω ιδιότητες:
(1) Αν $\tau = c$, $c \in \mathcal{L}$ ένα σύμβολο σταθεράς τότε $v^*(\tau) = \varepsilon(c)$
(2) Αν $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$ και f ένα σύμβολο συνάρτησης της $\mathcal{L}$ και $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ όροι της $\mathcal{L}$ τότε $v^*(\tau) = \varepsilon(f)(v^*(\tau_1), v^*(\tau_2), \ldots, v^*(\tau_\nu))$

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $\mathcal{L}_{\Theta.A} = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$

$A: A \to \mathbb{N}$ $\quad \varepsilon(\leq) =$ συνήθης ερμηνεία του $\leq$

$\varepsilon(+) =$ —"— —"— πρόσθεση στους φυσικούς

$\varepsilon(\cdot) =$ —"— πολ/σμός —"—

$\varepsilon(0) =$ το $0_{\mathbb{N}}$, $\varepsilon(1) =$ το $1_{\mathbb{N}}$

Πχ $\tau = x^2+5 = x\cdot x + (1+1+1+1+1)$

έστω v τω. $v(x)=2$, $v(y)=4$, $v(z)=0$ για όλα τα $z\neq x,y$

$$v^*(\tau) = v(x)\cdot\varepsilon(\cdot)v(x)\varepsilon(+)(\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1))$$
$$= 2\varepsilon(\cdot)2\varepsilon(+)(1\varepsilon(+)1\varepsilon(+)1\varepsilon(+)1\varepsilon(+)1) = 4\varepsilon(+)5 = 9_N$$

$\mathcal{A}' = |\mathcal{A}'| = \{0,1,2,3,4\}$

$\varepsilon(+) = +(\mathrm{mod}5)$, $\varepsilon(0) =$ το $0_{\mathcal{A}'}$

$\varepsilon(\cdot) = \cdot(\mathrm{mod}5)$, $\varepsilon(1) =$ το $1_{\mathcal{A}'}$

v ορίζεται όπως στο προηγούμενο

$$v^*(\tau) = v(x)\cdot\varepsilon(\cdot)v(x)\varepsilon(+)(\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1)\varepsilon(+)\varepsilon(1))$$
$$= 2\cdot\varepsilon(\cdot)\cdot2\varepsilon(+)\cdot(0) = 4.$$

Σχόλιο: Η τιμή $v^*(\tau)$ που θα πάρει ο όρος τ εξαρτάται από την v αλλά και από την ερμηνεία $\mathcal{A}$ με την οποία δουλεύουμε. Ακόμα είναι φανερό ότι αν v_1 και v_2 είναι δύο διαφορετικές αποτιμήσεις οι οποίες όμως δίνουν την ίδια τιμή σ' όλες τις μεταβλητές x που εμφανίζονται μέσα στο τ τότε $v_1^*(\tau) = v_2^*(\tau)$

Πχ Αν $\tau = x_1x_2+5$ και $v_1(x_1)=v_2(x_2)=2N$ και $v_1(x_1)=v_2(x_1)=2N$ και $v_1(x_2)=v_2(x_2)=3N$ και $v_1(z)\neq v_2(z)$ για όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές z τότε αναγκαστικά $v_1^*(\tau)=v_1(x_1)\varepsilon(\cdot)v_1(x_2)\varepsilon(+)\varepsilon(5) = v_2(x_1)\varepsilon(\cdot)v_2(x_2)\varepsilon(+)\varepsilon(5) = v_2^*(\tau)$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα η v επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια συνάρτηση v^* που δίνει τιμή σε κάθε όρο τ της γλώσσας $\mathcal{L}$. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $v(\tau)$ αντί για $v^*(\tau)$ χάριν απλότητας.

Ορισμός: Τοπική αλλαγή μιας αποτίμησης v: Έστω $v\in(A)$ και v μια αποτίμηση τότε $v[x|a]$ θα ονομάζουμε την αποτίμηση w που δίνει την τιμή $v(z)$ σε κάθε μεταβλητή $z\neq x$ ενώ για $z=x$ έχουμε $w(x)=a$

$\boxed{\pi.\chi.}$ $v[x_2|3](x_1) = v(x_1)$
$v[x_2|3](x_2) = 3$
$v[x_2|3](z) = v(z)$

$\boxed{\pi.\chi.}$ $v[x_1|0][x_2|3][x_1|4](x_1) = 4$
$v[x_1|0][x_2|3][x_1|4](x_2) = 3$

κοιτάμε από δεξιά → αριστερά

* ΟΡΙΣΜΟΣ: (αλήθειας του Tarski)

Έστω $\mathcal{A}$ μια δομή στην $\mathcal{L}$ και v μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Έστω επίσης ϕ ένας τύπος της $\mathcal{L}$. Τότε λέμε ότι ο ϕ αληθεύει ή ικανοποιείται στη δομή $\mathcal{A}$ και για την αποτίμηση v (γράφουμε συμβολικά $\mathcal{A}, v \models \phi$) αν ισχύουν τα παρακάτω:

(1) ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $\tau_1 = \tau_2$ και τ_1, τ_2 όροι της γλώσσας $\mathcal{L}$ και ισχύει $v(\tau_1) = v(\tau_2)$

(2) ο ϕ είναι ατομικός τύπος της μορφής $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v)$ όπου p είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος με v-μέλη τους όρους $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v$ τότε θα πρέπει η v-άδα $(v(\tau_1), v(\tau_2), \dots, v(\tau_v))$ να ανήκει στην ερμηνεία $\varepsilon(p)$

$\boxed{\pi.\chi.}$ $\phi = x \leq y$ τότε για να αληθεύει ο ϕ δηλ. να ισχύει $\mathcal{A}, v \models \phi$ θα πρέπει
$(v(x), v(y)) \in \varepsilon(\leq)$ ή με άλλα λόγια
$v(x)\, \varepsilon(\leq)\, v(y)$

(3) έστω $\phi = (\neg\psi)$ με ψ ένας τύπος της $\mathcal{L}$. τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει ο ψ να μην αληθεύει. ή με άλλα λόγια $\mathcal{A}, v \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \not\models \psi$.

(4) έστω $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$ με ϕ_1, ϕ_2 τύποι της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει και οι ϕ_1, ϕ_2 να αληθεύουν δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff \mathcal{A}, v \models \phi_1$ και $\mathcal{A}, v \models \phi_2$

(5) έστω $\phi = (\phi_1 \vee \phi_2)$ με ϕ_1, ϕ_2 τύποι της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει ένα τουλάχιστον εκ των ϕ_1, ϕ_2 να αληθεύει δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff \mathcal{A}, v \models \phi_1$ ή $\mathcal{A}, v \models \phi_2$.

(6) έστω $\phi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ με ϕ_1, ϕ_2 τύποι της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει να αληθεύει ο ϕ_2 στην περίπτωση που ο ϕ_1 είναι αληθής δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff \mathcal{A}, v \models \phi_1 \Rightarrow \mathcal{A}, v \models \phi_2$.

(7) έστω $\phi = (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ με ϕ_1, ϕ_2 τύποι της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει ϕ_1, ϕ_2 να παίρνουν την ίδια τιμή, δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff (\mathcal{A}, v \models \phi_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \models \phi_2)$

(8) έστω $\phi = (\forall x)\psi$ όπου ψ τύπος της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει να αληθεύει ο ψ για την αποτίμηση $v[x|a]$ όπου a είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του σύμπαντος $|A|$ της $\mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff$ για κάθε $a \in |A|$ ισχύει $\mathcal{A}, v[x|a] \models \psi$.

(9) έστω $\phi = (\exists x)\psi$ όπου ψ τύπος της $\mathcal{L}$, τότε για να αληθεύει ο ϕ θα πρέπει να αληθεύει ο ψ για την αποτίμηση $v[x|a_0]$ όπου a_0 είναι ένα κατάλληλο στοιχείο του $|A|$, δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \iff \exists a_0 \in |A|$ τ.ω. $\mathcal{A}, v[x|a_0] \models \psi$.

7-05-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ορισμος: (Tarski)
Έστω τ ένας τύπος σε μία γλώσσα $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και u μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε με $\mathcal{A},u \models \tau$ ανν 1) 2) 3) κ.λ.π. 8) Εάν $\tau = (\forall x)\phi$ τότε $\mathcal{A},u \models \tau \Leftrightarrow$ για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A},u[x|a] \models \phi$. 9) Εάν $\tau = (\exists x)\phi$ τότε $\mathcal{A},u \models \tau \Leftrightarrow$ υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A},u[x|a] \models \phi$.

Παραδειγμα: Έστω p, q δύο μονοθέσια σύμβολα κατηγορημάτων σε κάποια γλώσσα $\mathcal{L}$ και $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και u μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Ο τύπος

$\tau = (\exists x)(\exists z)(\forall x_2)([p(z) \wedge \neg q(x)] \vee \neg p(z) \vee q(x_2))$

$\mathcal{A},u \models \tau \Leftrightarrow$ υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε:

$\mathcal{A},u[x|a_0] \models (\exists z)(\forall x_2)([p(z) \wedge \neg q(x)] \vee \neg p(z) \vee q(x_2))$

ανν υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$: υπάρχει $a_0' \in |\mathcal{A}|$:

$\mathcal{A},u[x|a_0][z|a_0'] \models (\forall x_2)([p(z) \wedge \neg q(x)] \vee \neg p(z) \vee q(x_2))$

ανν υπάρχει $a_0 \in |\mathcal{A}|$: υπάρχει $a_0' \in |\mathcal{A}|$:

για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει:

$\underbrace{\mathcal{A},u[x|a_0][z|a_0'][x_2|a]}_{\omega} \models ([p(z) \wedge \neg q(x)] \vee \neg p(z) \vee q(x_2))$

ένα τουλάχιστον εκ των παρακάτω ισχύει:

1) $\mathcal{A},\omega \models p(z) \wedge \neg q(x)$
2) $\mathcal{A},\omega \models \neg p(z)$
3) $\mathcal{A},\omega \models q(x_2)$

ανν

1) $\mathcal{A},\omega \models p(z)$ και συγχρόνως $\mathcal{A},\omega \models \neg q(x)$
2) Το ίδιο
3) Το ίδιο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{A}: |\mathcal{A}| = \{\mu, \nu\}$

$\varepsilon(p) = \{\mu, \nu\}$

$\varepsilon(q) = \{\mu\}$

Έχουμε $\mathcal{A},\omega \not\models q(x_2)$ για $a = \nu$.

Έχουμε $\mathcal{A},\omega \not\models p(z)$ διότι όλα τα a' του συνόλου $\{\mu, \nu\}$ επαληθεύουν το $p(z)$ ή με άλλα λόγια ανήκουν στην $\varepsilon(p)$.

Έχουμε $\mathcal{A},\omega \models P(z) \wedge \neg q(x)$ διότι για $a_0 = \nu$ και

$a' = \mu$ ~~α' τυχαίο~~ στοιχείο του συνόλου ισχύει $\mathcal{A},\omega \models P(z) \wedge \neg q(x)$ δηλαδή ισχύουν συγχρόνως ότι το a ανήκει στη $\varepsilon(p)$ και $a_0 = \nu$ δεν ανήκει στην $\varepsilon(q)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Άραγε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία κατάλληλη ερμηνεία $\mathcal{B}$ και αποτίμηση v' στη $\mathcal{B}$ έτσι ώστε να μην αληθεύει ο τύπος τ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα πρέπει για κάθε a_0 του συνόλου $|\mathcal{B}|$ για κάθε a_0' του συνόλου $|\mathcal{B}|$ υπάρχει $a \in |\mathcal{B}|$:

$$\mathcal{B}, \underbrace{v'[x|a_0][z|a_0']}_{\omega'}[x_2|a] \models \neg\big((P(z) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg P(z)) \vee (q(x_2))\big)$$

~~ανν~~

ανν $\mathcal{B}, \omega' \models \neg[P(z) \wedge \neg q(x)] \wedge P(z) \wedge \neg q(x_2)$

$\Leftrightarrow \mathcal{B}, \omega' \models [\neg P(z) \vee q(x)] \wedge P(z) \wedge \neg q(x_2)$

ανν $\varepsilon(P) = \{\mu, \nu\}$, $\varepsilon(q) = \{\mu, \nu\}$ (εάν θέλουμε να επαληθεύεται η πρώτη σύζευξη).

Όμως στην προσπάθειά μας να ικανοποιήσουμε την πρώτη και την δεύτερη σύζευξη αποτυγχάνουμε να ικανοποιήσουμε την τρίτη. Άρα τέτοια ερμηνεία $\mathcal{B}$ από δύο στοιχεία μ, ν δεν μπορεί να υπάρχει.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

1) Εαν ο τ είναι απλός ένας κατηγόρημα ($\pi.\chi.\ \tau = \rho(.,.,.)$)
τότε $\mathcal{A}, \upsilon \models \rho(t_1,t_2,t_3)$ ανν ~~τριάδα~~ $(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \varepsilon(t_3)) \in \varepsilon(\rho)$

2) Εαν ο τ είναι μία ισότητα ($\pi.\chi.\ \tau = t_1 = t_2$, όπου t_1, t_2 είναι όροι της $\mathcal{L}$) τότε $\mathcal{A}, \upsilon \models (t_1 = t_2)$ ανν $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2)$

3) Εαν $\tau = (\forall x)\phi$ τότε $\mathcal{A}, \upsilon \not\models \tau \iff$ δεν ισχύει
$\mathcal{A}, \upsilon \models (\forall x)\phi \iff$ δεν ισχύει
για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A}, \upsilon[x|a] \models \phi \iff$
υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ δεν ισχύει $\mathcal{A}, \upsilon[x|a] \models \phi \iff$
υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A}, \upsilon[x|a] \models \neg\phi \iff$
$\mathcal{A}, \upsilon \models (\exists x)\neg\phi$

4) Εαν $\tau = (\exists x)\phi$ τότε $\mathcal{A}, \upsilon \not\models \tau \iff \mathcal{A}, \upsilon \models (\forall x)\neg\phi$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{B}, \upsilon \not\models \underbrace{(\exists x)(\exists z)(\forall x_2)(\{P(z) \wedge \neg q(x)\} \vee \neg P(z) \vee q(x_2))}_{\tau}$

$\iff \mathcal{B}, \upsilon \models (\forall x)(\forall z)(\exists x_2)\neg(\{P(z) \wedge \neg q(x)\} \vee \neg P(z) \vee q(x_2))$

$\iff \mathcal{B}, \upsilon \models (\forall x)(\forall z)(\exists x_2)(\{\neg P(z) \vee q(x)\} \wedge P(z) \wedge \neg q(x_2))$

ανν για τυχαίο $a_0 \in |\mathcal{B}|$, για τυχαίο $a_0' \in |\mathcal{B}|$ να μπορώ να βρω ~~ένα~~ κάποιο κατάλληλο $a \in |\mathcal{B}|$ (πιθανότατα θα εξαρτάται το a, από τις δοθείσες τιμές των a_0, a_0') έτσι ώστε:
$\mathcal{B}, \upsilon[x|a_0][z|a_0'][x_2|a] \models (\{\neg P(z) \vee q(x)\}_{①} \wedge P(z)_{②} \wedge \neg q(x_2))$
$\iff a_0' \in \varepsilon(\rho)$ (από ②)
$\iff a \notin \varepsilon(q)$ (από ③)
$\iff a_0 \in \varepsilon(q)$ (από ①).

Αυτά δεν μπορούν να ισχύουν συγχρόνως και άρα δεν υπάρχει $\mathcal{B}$ που να διαψεύδει το τύπο τ.

Ορισμος:

Έστω τ ένας τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε αυτός θα λέγεται <u>ταυτολογία</u> ή <u>ταυτότητα</u> αν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και υ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ ισχύει ότι $\mathcal{A}, \upsilon \models \tau$.

Παραδειγματα Ταυτολογιων:

1) $x_1 = x_1$
2) $(\exists x)(x = x)$
3) $(\forall x)(x = x)$
4) $\neg(\forall x)\phi \longleftrightarrow (\exists x)\neg\phi$ (για τυχαίο τύπο ϕ)
5) $\neg(\exists x)\phi \longleftrightarrow (\forall x)\neg\phi$

Ορισμος:

Ένας τύπος τ μιας γλώσσας $\mathcal{L}$ θα λέγεται <u>αντίφαση</u> ή <u>αντιλογία</u> αν για κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$ και για κάθε υ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mathcal{A}, \upsilon \not\models \tau$.

Παραδειγματα Αντιλογιων:

1) $x_1 \neq x_1$
2) $(\forall x)(x \neq x)$
3) $(\exists x)(x \neq x)$
4) $(\forall x)\phi \wedge (\exists x)\neg\phi$
5) $(\exists x)\phi \wedge (\forall x)\neg\phi$.

11-05-15

Μαθηματική Λογική

Για ποιες περιπτώσεις η αληθοτιμή ενός τύπου $τ$ δεν εξαρτάται από τη δοθείσα αποτίμηση $υ$?

Π.Χ. $L_{Θ.Α.} = L$, $τ: X_1 + X_2 = X_3$, A = η δομή των φυσικών αριθμών με τις συνήθεις ερμηνείες για το $+, \cdot, \leq, 0, 1$.
Έστω $υ: υ(X_1)=7,\ υ(X_2)=5,\ υ(X_3)=12$ τότε είναι προφανές ότι $A, υ \models τ$
Έστω $υ': υ'(X_1)=7,\ υ'(X_2)=5,\ υ'(X_3)=11$ τότε είναι προφανές ότι $A, υ' \not\models τ$.

Θεωρούμε τώρα $τ' = (\exists X_3)(X_1+X_2=X_3)$. Έχουμε $A,υ \models τ'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός έστω a_3 έτσι ώστε $A, υ[X_3/a_3] \models X_1+X_2=X_3$ προφανώς ισχύει για $a_3=12$.

Έχουμε $A,υ' \models τ'$ ανν υπάρχει κάποιος φυσικός έστω a_3' έτσι ώστε $A,υ'[X_3/a_3'] \models X_1+X_2=X_3$ προφανώς ισχύει για $a_3'=12$.

Θεωρούμε τώρα $τ_2 = (\forall X_3)(X_1+X_2=X_3)$. Έχουμε $A,υ \models τ_2$ ανν για κάθε φυσικό έστω a_3 ισχύει $A,υ[X_3/a_3] \models X_1+X_2=X_3$ προφανώς δεν ισχύει. (όμοια δουλεύουμε για την $υ'$.)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Απ' τα παραπάνω παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι ένας τύπος $τ$ παίρνει κάποια αληθοτιμή (α ή ψ) ανεξάρτητα από τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές που εμφανίζονται δεσμευμένες μέσα στον τύπο $τ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στο $(\forall x_3)(x_1+x_2=x_3)$ το x_3 είναι δεσμευμένο και άρα το γεγονός $A,v \models (\forall x_3)(x_1+x_2=x_3)$ δεν εξαρτάται από την τιμή $v(x_3)$.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν v και v' είναι δύο διαφορετικές αποτιμήσεις οι οποίες όμως συμφωνούν (δηλαδή δίνουν τις ίδιες τιμές) σε μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες μέσα στον τύπο τ, τότε $A,v \models \tau$ ανν $A,v' \models \tau$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\tau = (\exists x_1)(x_1+x_2=x_3)$, ελεύθερες μεταβλητές στον τ είναι οι x_1, x_2. Έχουμε λοιπόν ότι εαν $v(x_1)=v'(x_1)$ και όμοια για το x_2 τότε $A,v \models \tau$ ανν $A,v' \models \tau$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Εαν ο τ δεν έχει καθόλου ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή ο τ είναι μια πρόταση) τότε ο τ είτε θα αληθεύει για όλες τις αποτιμήσεις v, είτε θα διαψεύδεται για όλες τις αποτιμήσεις v.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\tau' = (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(x_1+x_2=x_3)$

Έχουμε για τυχαίο v αποτίμηση στην A:

$A,v \models \tau'$ ανν $A,v[x_1/a_1][x_2/a_2][x_3/a_3] \models x_1+x_2=x_3$

ανν υπάρχει κατάλληλο a_1, για τυχαίο a_2, υπάρχει κατάλληλο a_3: $a_1 \,\varepsilon(+)\, a_2 = a_3$

$a_1 = 1$, $a_2 = j$, $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + a_2$

Άρα τ' αληθεύει στην A.

$\tau_2 = (\exists x_1)(\exists x_3)(\forall x_2)$. Για τυχαίο v στην A: $A,v \models \tau_2$ ανν $A,v[x_1/a_1][x_3/a_3][x_2/a_2] \models x_1+x_2=x_3$ ανν υπάρχουν

κατάλληλα a_1, a_3, για τυχαίο a_2 ισχύει $a_1\, \varepsilon(+)\, a_2 = a_3$.
Όμως αυτό δεν ισχύει για $a_2 = a_3$ δηλαδή $a_1\, \varepsilon(+)\, a_3 \neq a_3$.

ΣΧΟΛΙΟ: Όπως είδαμε από τα παραπάνω παραδείγματα η σειρά των ποσοδεικτών μέσα σ' ένα τύπο τ παίζει ρόλο στο αν ο τύπος αληθεύει ή όχι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(x_1 + x_2 = x_3)$ ανεξάρτητα από το ποιο είναι το v.
$A, v \not\models (\exists x_1)(\exists x_3)(\forall x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$ ανεξάρτητα από το ποιο είναι το v.
Αργότερα θα μάθουμε κάποιους νόμους για τη ~~κίνηση~~ μετακίνηση των ποσοδεικτών όπως:
- $A, v \models (\exists x_1)(\exists x_2)\tau$ ανν $A, v \models (\exists x_2)(\exists x_1)\tau$
- $A, v \models (\forall x_1)(\forall x_2)\tau$ ανν $A, v \models (\forall x_2)(\forall x_1)\tau$
- $A, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)\tau$ τότε $A, v \models (\forall x_2)(\exists x_1)\tau$ (το αντίστροφο δεν ισχύει).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: A η δομή των φυσικών αριθμών και $\tau = x_1 \neq x_2 \to x_1 < x_2$.
Έχουμε $A, v \models (\exists x_1)(\forall x_2)\tau$ ανν
$A, v[x_1/a_1][x_2/a_2] \models ((x_2 \neq x_1) \to x_1 < x_2)$ ανν
υπάρχει κατάλληλο a_1 που για τυχαίο φυσικό a_2 αν $a_2 \neq a_1$ τότε $a_1\, \varepsilon(<)\, a_2$.

για $a_1 = 1$: $A, v \models (\forall x_2)(\exists x_1)(x_2 \neq x_1 \to x_1 < x_2)$
~~$a_2 = 1$ τότε δεν μπορούμε να βρούμε κατάλληλο $a_1 \neq a_2$ τέτοιο ώστε $a_1 < a_2$.~~
~~$a_2 = 2$~~

και αυτός ο τύπος αληθεύει!

π.χ. $\tau: (\exists x_1)(\forall x_2)(x_1 + 1 \geq x_2)$ $\quad A, \upsilon \not\models \tau$

$\tau': (\forall x_2)(\exists x_1)(x_1 + 1 \geq x_2)$ $\quad A, \upsilon \models \tau'$. (για $\alpha_1 = \alpha_2$).

Άσκηση: Δίνεται ο τύπος $(\forall x_1)(\forall x_3)[x_1 < x_3 \rightarrow (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)]$ στη γλώσσα $L_{Θ.Α.} = \{<, +, \cdot, 0, 1\}$.

i) Γιατί η αληθοτιμή του παραπάνω τύπου δεν εξαρτάται από την αποτίμηση που δουλεύουμε?

ii) Αν η δομή A είχε μόνο 2 στοιχεία πως θα ερμηνεύαμε τα σύμβολα της $L_{Θ.Α.}$ έτσι ώστε ο παραπάνω τύπος να αληθεύει στην A?

iii) Αν η δομή A είχε μόνο ένα στοιχείο τότε θα μπορούσε να αληθεύει ο τ στην A?

Λύση: i) Ο τύπος τ δεν έχει ανεξάρτητες μεταβλητές άρα η αληθοτιμή του δεν εξαρτάται από την αποτίμηση με την οποία δουλεύουμε.

ii) Έστω $|A| = \{m, n\}$ όπου m, n δύο διαφορετικά αντικείμενα

$\varepsilon(0) = m$, $\varepsilon(1) = n$

$m \ \varepsilon(<) \ n$

$\varepsilon(+)$	m	n
m	m	n
n	n	m

$$A, \upsilon[x_1/m][x_3/n] \models (x_1 < x_3 \rightarrow (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3))$$

ισχύει αν για $[x_2/n]$

$$A, \upsilon[x_1/n][x_3/n] \models (\varphi \rightarrow ?)$$

$$A, \upsilon[x_1/n][x_3/m] \models (\varphi \rightarrow ?)$$

$$A, \upsilon[x_1/m][x_3/m] \models (\varphi \rightarrow ?)$$

12-05-15

Μαθηματική Λογική

Σχόλιο: Υπάρχουν περιπτώσεις που ένας τύπος αληθεύει ή διαψεύδεται ανεξάρτητα από ποια αποτίμηση χρησιμοποιούμε.

Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{A}$ η δομή των φυσικών με τις γνωστές ερμηνείες για τα σύμβολα $+, \cdot, \leq, 0, 1$ και
$\tau = (\forall X_1)(X_1 < X_3) \rightarrow (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$
τότε ανεξάρτητα από το ποια είναι η αποτίμηση u έχουμε ότι $\mathcal{A}, u \models \tau$, διότι απλούστατα η τ είναι της μορφής $a \rightarrow b$ με το a να είναι ο τύπος $(\forall X_1)(X_1 < X_3)$ που είναι ψευδής.
$\mathcal{A}, u \models (\forall X_1)(X_1 < X_3)$ ανν $\mathcal{A}, u[X_1/a_1] \models (X_1 < X_3)$ για τυχαίο $a_1 \iff a_1 \, \varepsilon(<) \, u(X_3)$ για τυχαίο a_1
Αυτό δεν ισχύει γιατί για $a_1 = u(X_3) + 1$.
Συνεπώς $\mathcal{A}, u \models \tau$ για οποιοδήποτε u.

Άσκηση: Δίνεται ο τύπος $\tau = (\forall X_1)(\forall X_3)[X_1 < X_3 \rightarrow (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)]$
Εάν έχουμε μια δομή $\mathcal{A}$ με ένα μόνο στοιχείο θα μπορούσε ο τύπος να αληθεύει; Θα μπορούσε να διαψεύδεται;

Λύση: $|\mathcal{A}| = \{m\}$ $\quad$ $\varepsilon(+) : m \, \varepsilon(+) \, m = m$
$\varepsilon(<) : m \, \varepsilon(<) \, m$

(Σχόλιο: Αφού ο τ είναι πρόταση θα πρέπει είτε να επαληθεύεται για όλες τις αποτιμήσεις u ή να διαψεύδεται για όλες τις u)

Έστω u τυχαία αποτίμηση $\mathcal{A}, u \models \tau$ ανν
$\mathcal{A}, u[X_1/m][X_3/m] \models (X_1 < X_3) \rightarrow (\exists X_2)(X_1 + X_2 = X_3)$ Ισχύει!

(Σχόλιο: Κατασκευάζουμε μια δομή $\mathcal{A}'$ που το σύμπαν περιέχει ένα μόνο στοιχείο $\{n\}$ και η $\varepsilon(<)=\phi$)

Σε αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι $\mathcal{A}', v[x_1/m][x_3/m] \not\models (x_1 < x_3)$. Άρα συνολικά ο τύπος αληθεύει.

Με ένα μόνο στοιχείο δεν γίνεται να διαψεύδεται η τ.

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθεί μία κατάλληλη ερμηνεία που να διαψεύδει το τ.

$|\mathcal{A}''| = \{m, n\}$ $\quad \varepsilon(<)$: $m\, \varepsilon(<)\, n$

$m\, \varepsilon(<)\, m$

$\varepsilon(+)$	m	n
m	m	m
n	n	m

$\mathcal{A}, v \not\models \tau$ διότι

$\mathcal{A}, v[x_1/m][x_3/n] \models (x_1 < x_3)$

το $\mathcal{A}, v[x_1/m][x_3/n] \not\models (\exists x_2)(x_1 + x_2 = x_3)$

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε δύο δομές έτσι ώστε η παρακάτω πρόταση να αληθεύει στη μία και να μην αληθεύει στην άλλη.

$(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = x)$ στην $\mathcal{L}_{\Theta.A.}$

ΛΥΣΗ: $\mathcal{A}$: η δομή των πραγματικών αριθμών όπου η ~~ερμηνεία~~ $\varepsilon(\cdot)$ είναι η συνήθης. Σε αυτή έχουμε για κάθε αποτίμηση v, $\mathcal{A}, v \models \tau$ ανν $\mathcal{A}, v[x/a][y/b] \models (x \cdot y = x)$ ανν $a\, \varepsilon(\cdot)\, b = a$, όπου a τυχαίο και b κατάλληλο δηλαδή $b = 1$.

$\mathcal{A}'$ η δομή με δύο στοιχεία $|\mathcal{A}'| = \{m, n\}$

$\varepsilon(\cdot)$	m	n
m	n	n
n	m	m

$\mathcal{A}', v[x/m] \not\models (\exists y)(x \cdot y = x)$

$\mathcal{A}_2'$ η δομή των $\mathbb{N}$ με $\varepsilon(\cdot)$ = η συνήθης πρόσθεση είναι προφανές ότι δεν αληθεύει ο τύπος στην $\mathcal{A}_2$.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ όπου $\cdot$ είναι ένα σύμβολο διθέσιας
"SOS" συνάρτησης.
?
i) Να γράψετε κατάλληλα αξιώματα στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έτσι ώστε η $\cdot$ να έχει τις ιδιότητες που θα είχε σε μία ομάδα (κλειστότητα, Προσεταιριστικότητα, ουδέτερο, αντίστροφο).

ii) Να κατασκευάσετε μία δομή $\mathcal{A}$ στην οποία να ισχύουν όλα τα παραπάνω αξιώματα της ομάδας και μία άλλη δομή $\mathcal{B}$ στην οποία ισχύουν όλα εκτός από το αξίωμα ύπαρξης του αντιστρόφου.

ΛΥΣΗ: Κλειστότητα: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \cdot y = z)$

Προσεταιριστικότητα: $(\forall x)(\forall y)(\forall k)[(x \cdot y) \cdot k = x \cdot (y \cdot k)]$

Ουδέτερο: $(\exists z)(\forall x)[(x \cdot z = x) \wedge (z \cdot x = x)]$

Αντίστροφο: $(\forall x)(\exists y)[(x \cdot y = \text{ουδέτερο}) \wedge (y \cdot x = \text{ουδέτερο})]$

Επειδή η λέξη ουδέτερο δεν υπάρχει στη γλώσσα μας θα πρέπει να την αντικαταστήσουμε με μία μεταβλητή που έχει κατάλληλες ιδιότητες.

$$(\exists z)(\forall x)(\exists y)[\underbrace{(x \cdot z = x) \wedge (z \cdot x = x)}_{\text{ουδέτερο}} \wedge (x \cdot y = z) \wedge (y \cdot x = z)]$$

Σχόλιο: Όλα τα παραπάνω αξιώματα είναι προτάσεις, μερικές προτάσεις από αυτές ξεκινάνε με καθολικούς ποσοδείκτες όπως για παράδειγμα το πρώτο αξίωμα.
Άρα για τυχαία $\mathcal{A}$ (δομή) ~~έχουμε~~ και τυχαία v (αποτίμηση), έχουμε: $\mathcal{A}, v \models (\forall x)(\forall y)(\exists z)(x \cdot y = z)$ ανν
$\mathcal{A}, v[x/a][y/b] \models (\exists z)(x \cdot y = z)$ για τυχαία a, b, v ανν
$\mathcal{A}, \omega \models (\exists z)(x \cdot y = z)$ για τυχαία αποτίμηση ω.
Με άλλα λόγια, μπορούμε σε κάθε ~~τύπο ή~~ πρόταση που ξεκινάει από τα αριστερά με καθολικούς ποσοδείκτες

$(\forall x), (\forall y)$ αυτούς να τους απαλείψουμε.

ii) Θεωρούμε $\mathcal{B}$ τη δομή των φυσικών αριθμών, όπου η $\cdot$ ερμηνεύεται με $\varepsilon(\cdot)$ = γνωστός πολ/σμός, τότε προφανώς όλα τα αξιώματα ισχύουν εκτός την ύπαρξη αντιστρόφου.

Θεωρούμε $\mathcal{A}$ τη δομή των ακεραίων όπου η $\cdot$ ερμηνεύεται με $\varepsilon(\cdot)$ = γνωστή πρόσθεση στους ακεραίους, οπότε κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο ως προς την πρόσθεση

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathcal{A}, u[Z/0][X/a][Y/-a] \models [(X \cdot Z = X) \wedge (Z \cdot X = X) \wedge (X \cdot Y = Z) \wedge (Y \cdot X = Z)]$ για τυχαίο $a \in \mathbb{Z}$ ανν $a\,\varepsilon(\cdot)\,0 = a$ και $0\,\varepsilon(\cdot)\,a = a$ και $a\,\varepsilon(\cdot)\,{-a} = 0$ και $-a\,\varepsilon(\cdot)\,a = 0$ για τυχαίο a προφανώς ισχύει.

Σχολιο: Το $\mathbb{Z}_6^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ όπου $\varepsilon(\cdot)$ = πολ/σμός mod 6 δεν ικανοποιεί το τελευταίο αξίωμα διότι για παράδειγμα το 4 δεν έχει αντίστροφο.

Σχολιο: Τα δύο τελευταία αξιώματα της άσκησης μπορούν να συμπτυχθούν στο τελευταίο αξίωμα του αντιστρόφου, διότι σε αυτό εμφανίζεται Z που παίζει το ρόλο του ~~αντιστρόφου~~ ουδέτερου.

Σχολιο: Το ουδέτερο στοιχείο Z απ' τα παραπάνω αξιώματα μπορεί να δείξει κανείς ότι είναι μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι για τυχαία $\mathcal{A}$ και u ισχύει

$$\mathcal{A}, u \models (\forall x)(Z_1 X = X Z_1 = X) \wedge (\forall x)(Z_2 X = X Z_2 = X) \rightarrow (Z_1 = Z_2)$$

19-05-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών

- Εαν ο ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά ο x δεν εμφανίζεται ελεύθερος στον ϕ τότε $(\forall x)(\phi \to \psi) \equiv \phi \to (\forall x)\psi$
- Όμοια $(\exists x)(\phi \to x) \equiv \phi \to (\exists x)\psi$
- Όμοια αντί $\to$ ισχύει και για $\wedge, \vee$

Σχόλιο: (στις σημειώσεις στο site)

$$[(\forall x)\psi] \to \phi \equiv (\forall x)(\psi \to \phi)$$ με ϕ να πληροί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε.

↑ Λάθος!

Σωστό: $$[(\forall x)\psi] \to \phi \equiv \neg[(\forall x)\psi] \vee \phi \equiv [(\exists x)\neg\psi] \vee \phi \overset{\text{Ν.Μ.Π}}{\equiv}$$

$$\equiv (\exists x)(\neg\psi \vee \phi) \equiv (\exists x)(\psi \to \phi).$$

Σχόλιο: Προσοχή όταν έχουμε $\to$ που βρίσκεται ο ϕ μέσα στην $(\forall x)(\phi \to \psi) \equiv \phi \to (\forall x)\psi$

Θεώρημα: (χωρίς απόδειξη) Των Αλφαβητικών παραλλαγών.
Για κάθε τύπο ϕ υπάρχει τύπος ψ ισοδύναμος με τον ϕ (δηλαδή $\phi \equiv \psi$) έτσι ώστε στον ψ δεν υπάρχει μεταβλητή x, που άλλοτε εμφανίζεται ελεύθερη και άλλοτε δεσμευμένη ή με άλλα λόγια κάθε δεσμευμένη εμφάνιση μιας μεταβλητής x που είναι ελεύθερη στον ϕ μπορεί να μετονομαστεί σε μία νέα μεταβλητή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\phi = [(\exists x)\, q(x)] \to q(x)$
όπου q είναι ~~ένα~~ ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος. Παρατηρούμε ότι στον ϕ η x είναι ελεύθερη. Η x όμως εμφανίζεται στον υποτύπο $(\exists x)\, q(x)$ δεσμευμένη. Από θεώρημα των Αλφαβητικών παραλλαγών μπορούμε να μετονομάσουμε τη δεσμευμένη εμφάνιση της x σε κάτι εντελώς νέο οπότε θα πάρουμε $\psi = (\exists x_1)\, q(x_1) \to q(x) \equiv \phi$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το παραπάνω θεώρημα στηρίζεται σε κάποιες προτάσεις της Λογικής:
1) Αν η y δεν εμφανίζεται καθόλου στον $(\forall x)\phi$ τότε ισχύει $(\forall x)\phi \equiv (\forall y)\phi[x|y]$
και όμοια $(\exists x)\phi \equiv (\exists y)\phi[x|y]$
2) Στην περίπτωση που ο ϕ δεν έχει ποσοδείκτες (π.χ. ο ϕ είναι ατομικός τύπος) τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες ή τουλάχιστον μερικές από τις εμφανίσεις της μεταβλητής x με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή y και να πάρουμε ένα ισοδύναμο τύπο ψ, δηλαδή $\phi \equiv \psi$.

ΑΣΚΗΣΗ: Για κάθε ϕ δείξτε ότι $(\forall x)\phi \to (\exists x)\phi$ είναι ταυτολογία.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $[(\forall x)\phi] \to [(\exists x)\phi] \equiv \neg[(\forall x)\phi] \vee [(\exists x)\phi] \equiv$
$\equiv [(\exists x)\neg\phi] \vee [(\exists x)\phi] \equiv (\exists x)(\neg\phi \vee \phi)$
$\equiv (\exists x)(\text{ταυτολογία}) \xrightarrow[\text{απορρόφησης}]{\text{νόμος}}$ ταυτολογία.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $p(\cdot), q(\cdot)$ είναι δύο μονομελή σύμβολα κατηγορήματος σε κάποια γλώσσα $\mathcal{L}$. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι μία ταυτολογία:
$$[(\forall x)(p(x) \to q(x))] \to ([(\forall x)p(x)] \to [(\forall x)\, q(x)])$$

ΛΥΣΗ: <u>1ος τρόπος</u>: Έστω $\mathcal{A}$ τυχαία ερμηνεία στην $\mathcal{L}$ και υ αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. $\mathcal{A},\upsilon \models \ldots$ Ορισμοί αλήθειας του Tarski

<u>2ος τρόπος</u>: [redacted]

$$\phi \equiv \neg[(\forall x)(p(x)\to q(x))] \vee ([(\forall x)p(x)] \to [(\forall x)q(x)])$$

$$\equiv \underbrace{[(\exists x)(p(x)\wedge \neg q(x))]}_{①} \vee \Big(\underbrace{[(\exists x)\neg p(x)]}_{②} \vee \underbrace{[(\forall x)q(x)]}_{③}\Big)$$

$$\stackrel{\text{Ν.Μ.Π}}{\equiv} (\forall x)\{(\exists x)(p(x)\wedge\neg q(x)) \vee [(\exists x)\neg p(x)] \vee q(x)\}$$

$$\equiv (\forall x)\{(\exists x)(p(x)\wedge\neg q(x)) \vee \neg p(x) \vee q(x)\} \stackrel{*}{\equiv}$$

εδώ ο x εμφανίζεται δεσμευμένος — εδώ ο x εμφανίζεται ελεύθερα

Σύμφωνα με το θεώρημα των Αλφαβητικών Παραλλαγών μπορούμε να μετονομάσουμε το δεσμευμένο x σε μία <u>νέα</u> εντελώς μεταβλητή π.χ. x_1

$$\stackrel{*}{\equiv} (\forall x)\{(\exists x_1)(p(x_1)\wedge\neg q(x_1)) \vee \neg p(x_1) \vee q(x)\} \equiv$$

$$\stackrel{\text{Ν.Μ.Π.}}{\equiv} (\forall x)(\exists x_1)\{(p(x_1)\wedge\neg q(x_1)) \vee \neg p(x_1) \vee q(x)\} \equiv$$

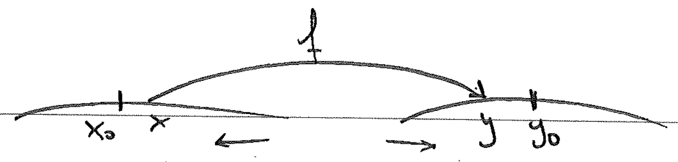
$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)\{[p(x_1)\vee\neg p(x_1)] \wedge [\neg q(x_1)\vee\neg p(x_1)] \vee q(x)$$

$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)\{\neg q(x_1) \vee \neg p(x_1) \vee q(x)\} \equiv \text{νόμος.}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η γλώσσα $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, 0, 1, f\}$ όπου το f είναι ένα μονοθέσιο σύμβολο κατηγορήματος

1) Να ορίσετε με κατάλληλο τύπο της $\mathcal{L}$ το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

2) Αν η παράσταση $|x-x_0|<\Delta$ είναι η συντομογραφία του τύπου $(x_0 < x+\Delta)\wedge(x < x_0+\Delta)$ τότε πως θα περιγράφατε την έκφραση $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq y_0$ στη γλώσσα $\mathcal{L}$;



Λυση:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x)(|x-x_0|<\delta \to |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

$$(\forall E)(\exists \Delta)(\forall x)[(0<E)\to(0<\Delta \wedge \{|x-x_0|<\Delta \to |f(x)-y_0|<E\})]$$

(Σχολιο: Τα απόλυτα πχ. $|f(x)-y_0|<E$ είναι συντομογραφία ενός κανονικού τύπου της $\mathcal{L}$: $(f(x)<E+y_0)\wedge(y_0<f(x)+E)$)

$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq y_0$ ανν $\neg(\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0)$ ανν

$$(\exists E)(\forall \Delta)(\exists x)[0<E \wedge (0\not<\Delta \vee \neg\{\cdots\})]$$

$$\equiv(\exists E)(\forall \Delta)(\exists x)[0<E \wedge (0<\Delta \to \neg\{\cdots\})]$$

$$\equiv(\exists E)(\forall \Delta)(\exists x)[0<E \wedge (0<\Delta \to \{|x-x_0|<\Delta \wedge |f(x)-y_0|\not<E\})]$$

Δηλαδή με άλλα "λόγια":

$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x)\{|x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-y_0|\not<\varepsilon\}$

δηλαδή $(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x\in(x_0-\delta, x_0+\delta))\ |f(x)-y_0|\not<\varepsilon$

Το "Παράδοξο" του ψεύτη

Ο Πέτρος ισχυρίζεται ότι είναι ψεύτης. Αν πράγματι είναι ψεύτης τότε ότι λέει είναι ψέματα άρα δεν μπορεί να είναι ψεύτης. Άρα αφού δεν είναι ψεύτης ότι ισχυρίζεται είναι προφανώς αλήθεια άρα θα πρέπει να δεχτούμε τον ισχυρισμό δηλαδή ότι μπορεί να είναι ψεύτης.

Εξήγηση του "Παραδόξου"

Φτιάχνουμε μία γλώσσα $\mathcal{L}$ στην οποία κάθε πρόταση της Ελληνικής αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά της $\mathcal{L}$

π.χ. "Εγώ είμαι ψεύτης" αντιπροσωπεύεται με μία σταθερά $c_0 \in \mathcal{L}$.

Έχουμε ένα μονομελές κατηγόρημα στην $\mathcal{L}$: ψευδεται-ο-πετρος $(\cdot)$.

Έστω ακόμα $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία στη παραπάνω γλώσσα $\mathcal{L}$ και v μία αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.

Περίπτωση 1η: $\mathcal{A}, v \models (\forall x)$ ψευδεται-ο-πετρος$(x) \Rightarrow$

$\mathcal{A}, v[x|c_0] \models$ ψευδεται-ο-πετρος(c_0)

Αυτό όμως δεν συνεπάγεται ότι ο Πέτρος λέει πάντα την αλήθεια δηλαδή

$\mathcal{A}, v \not\models (\forall x) \neg$ ψευδεται-ο-πετρος(x)

Το τελευταίο ισχύει διότι έχουμε ήδη υποθέσει ότι

$\mathcal{A}, v \models (\forall x)$ ψευδεται-ο-πετρος(x)

Περίπτωση 2η: $\mathcal{A}, v \models (\exists x) \neg$ ψευδεται-ο-πετρος$(x) \not\Rightarrow$

$\mathcal{A}, v \models (\forall x)(\neg$ ψευδεται-ο-πετρος$(x))$

(Σχολιο: $(\forall x)\phi \rightarrow (\exists x)\phi$

το αντίστροφο $(\exists x)\phi \rightarrow (\forall x)\phi$ είναι απλά ικανοποιήσιμος.)

Αντιπαράδειγμα για την περίπτωση 2η:

$\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}| = \{m, n\}$ και $\varepsilon($ψευδεται-ο-πετρος$) = \{m\}$

το $\mathcal{A}, v \models (\forall x)(\neg$ ψευδεται-ο-πετρος$(x))$ δεν ισχύει διότι $x|m$.

~~ΚΑΝΟΝΕΣ~~ Νομοι Γενικευσης

Το $\phi \rightarrow (\forall x)\phi$ δεν είναι νόμος.

ΑΣΚΗΣΗ: Να κατασκευάσετε κατάλληλα $\mathfrak{A}, v$ ώστε
$\mathfrak{A}, v \not\models \varphi(x) \to (\forall x)\, \varphi(x)$
όπου $\varphi(\cdot)$ μονομελής σύμβολο κατηγορήματος.

ΝΟΜΟΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ: $\phi \to (\forall x)\phi$ είναι νόμος (ταυτολογία) εάν υποθέσουμε ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ ή διαφορετικά εάν ο ϕ είναι νόμος.

Σχόλιο: Το ανάποδο $(\forall x)\phi \to \phi$. είναι νόμος και μάλιστα γενικεύεται στο $(\forall x)\phi \to \phi[x/t]$ είναι νόμος όπου t είναι ένας όρος που μπορεί να αντικαταστήσει τον x σε ϕ.

στην υπολ., προσ., πολ., αντίστροφο βγάζουμε τα ...

• Θεωρούμε $\mathcal{B}$ τη δομή των φυσικών αριθμών όπου ο πολ/σμός ερμηνεύεται με $\varepsilon(\cdot)=$ο γνωστός μας πολ/σμ. Τότε προφανώς όλα τα αξιώματα ισχύουν εκτός της ύπαρξης του αντιστρόφου. Θεωρούμε ως $\mathcal{A}$ τη δομή των ακέραιων όπου η $\circ$ ερμηνεύεται με $\varepsilon(\circ)=$ η πρόσθεση στους $\mathbb{Z}$, οπότε κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο ως προς την πρόσθεση.

π.χ. $\mathcal{A}, v[z_1|0][x|a][y|-a] \models [xz_1 = x \wedge (z_1 x = x) \wedge x y = z_1 \wedge y x = z_1]$ για τυχαίο $a \in \mathbb{Z}$ αφού $a\,\varepsilon(\circ)\,0 = a$ και $0\,\varepsilon(\circ)\,a = a$ και $a\,\varepsilon(\circ)(-a) = 0$ και $-a\,\varepsilon(\circ)\,a = 0$ για τυχαίο a ισχύει.

Σχόλιο:
Το $\mathbb{Z}_6^* = \{1,3,?,4,5\}$ όπου $\varepsilon(\circ) =$ πολ/σμός mod 6 δεν ικανοποιεί το αξίωμα του αντιστρόφου διότι το $\overset{4}{3}$ δεν έχει αντίστροφο!

Τα 2 τελευταία αξιώματα μπορούν να αντικατασταθούν στο τελευταίο αξίωμα του αντιστρόφου, διότι σε αυτό εμφανίζεται η έννοια του ουδετέρου. (το z_1 παίζει το ρόλο του ουδετέρου).

Σχόλιο: Το ουδέτερο ^{z_1} από τα παραπάνω αξιώματα είναι μοναδικό.

Άσκηση: Δείξτε ότι, για τυχαία $\mathcal{A}, v$ ισχύει $\mathcal{A}, v \models (\forall x)(z_1 \cdot x) = (x \cdot z_1) = (x) \wedge (\forall x)((z_2 \cdot x) = (x \cdot z_2) = (x)) \to z_1 = z_2$.

18/5/15

$(\forall x)(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi$ Ταυτολογία

$(\forall x)(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x)\phi \vee (\forall x)\psi$ απλά ικανοποιήσιμος

π.χ. Έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία που το $|\mathcal{A}|$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $|\mathcal{A}| = \{m\}$, τότε ο παραπάνω τύπος αληθεύει στην $\mathcal{A}$ και για οποιαδήποτε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}, v \models (\forall x)\phi \vee (\forall x)\psi \Leftrightarrow$ ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω ισχύει:
$\mathcal{A}, v \models (\forall x)\phi$, $\mathcal{A}, v \models (\forall x)\psi$ αλλά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

1η ώρα

① ②

$\Leftrightarrow \mathcal{A}, v[x'/m] \models \phi$ και $\mathcal{A}, v[x'/m] \models y$.

$\Leftrightarrow \mathcal{A}, v[x'/m] \not\models \phi \vee y \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \models (\forall x')(\phi \vee y)$.

π.χ. ϕ: ο x είναι οπαδός του Ολυμπιακού

y: ο x δεν είναι οπαδός του Ολυμπιακού $= \neg\phi$

και $\mathcal{A}$ έχει σύμπαν τους κατοίκους του Καρπενησίου.

Προφανώς για οποιαδήποτε αποτίμηση v ισχύει:

$\mathcal{A}, v \models (\forall x')(\phi \vee y)$, $\mathcal{A}, v \not\models (\forall x')\phi$ (δεν ισχύει!),

$\mathcal{A}, v \not\models (\forall x')y$. Άρα $\mathcal{A}, v \not\models (\forall x')\phi \vee (\forall x')y$

Άσκηση: Δίνεται ο τύπος $(\exists x')(\phi \wedge y) \rightarrow (\exists x')\phi \wedge (\exists x')y$

ο τύπος είναι αντιλογία, ταυτολογία ή απλά ικανοποιήσιμος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση: 1ος τρόπος: ο παραπάνω τύπος είναι απλά ικανοποιήσιμος, διότι αν πάρουμε για ϕ: ο x' δεν είναι οπαδός του Ολυμπιακού και y: $\neg\phi$, τότε

$(\phi \wedge y) = \neg(\underbrace{\text{ο } x' \text{ είναι οπαδός του Ολυμπιακού}}_{\phi'} \vee \underbrace{\text{ο } x' \text{ δεν είναι οπαδός του Ολυμπιακού}}_{y_1}) = \neg(\phi_1 \vee y_1)$ και άρα το:

$(\exists x')(\phi \wedge y) \rightarrow (\exists x')(\neg(\phi_1 \vee y_1)) \leftrightarrow \neg(\forall x')(\phi_1 \vee y_1) \leftrightarrow$

$\neg[(\forall x')\phi_1 \vee (\forall x')y_1] \leftrightarrow (\neg(\forall x')\phi_1 \wedge \neg(\forall x')y_1) \rightarrow$

$((\exists x')\phi \wedge (\exists x')y)]$

2ος τρόπος: Είναι εύκολο να δείξουμε ότι εάν το σύμπαν της ερμηνείας είναι μονοσύνολο, τότε ισχύει η παραπάνω σχέση. Όμως, εάν δεν είναι μονοσύνολο, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

π.χ. $|\mathcal{A}| = \{m, n\}$, ϕ: $x' = 0$, y: $x' \neq 0$. Έστω v τυχαία αποτίμηση. Τότε $\mathcal{A}, v \models (\exists x')\phi \wedge (\exists x')y$.

με $\mathcal{E}(0) = m$.

$\mathcal{A}, v[x'/m] \models \phi$ ✓, $\mathcal{A}, v[x'/n] \models y$ ✓

$\mathcal{A}, v \not\models (\exists x')(\phi \wedge y) \Rightarrow$ δεν ισχύει αυτό.

Άρα η παραπάνω σχέση δεν είναι νόμος!

είναι απλά ικανοποιήσιμη.

Σχόλιο: Αφού το $(\forall x')\phi \wedge y \rightarrow (\forall x')\phi \wedge (\forall x')y$ είναι ένας νόμος (Ταυτολογία), άρα και ο τύπος;

$\neg(\forall x)(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg((\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi)$ είναι ένας νόμος και άρα και ο $(\exists x)(\neg\phi \vee \neg\psi) \leftrightarrow (\exists x \neg\phi \vee \exists x \neg\psi)$ και ο $\exists x(\phi' \vee \psi') \leftrightarrow [(\exists x)\phi'] \vee [(\exists x)\psi']$ είναι ένας νόμος για οποιαδήποτε ϕ' και ψ'.

Σχόλιο: Έστω ϕ, ψ δύο τύποι για τους οποίους η ισοδυναμία $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Τότε εάν αληθεύει ο ϕ, αληθεύει και ο ψ και αντίστροφα. Δηλαδή $\mathcal{A}, v \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{A}, v \models \psi$ $\forall$ ερμηνεία $\mathcal{A}$ και αποτίμηση $v \in \mathcal{A}$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, θα γράφουμε $\phi \equiv \psi$ ή πιο απλά $\phi = \psi$ και μπορούμε να αντικαθιστούμε τον ϕ με τον ψ σε οποιονδήποτε τύπο τ, στον οποίο εμφανίζεται ο ϕ, χωρίς να αλλάξει η αληθοτιμή του τ.

νόμοι π.χ. (1) $\neg(\forall x)\phi \equiv (\exists x)\neg\phi$ (2) $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$,
(3) $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x)\phi \wedge (\forall x)\psi$.

18-05-15 2η ώρα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Νόμοι Απορρόφησης

Έστω ϕ ένας νόμος ή διαφορετικά στον ϕ δεν εμφανίζεται η ελεύθερη μεταβλητή X τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ϕ με το $(\exists X)\phi$ ή $(\forall X)\phi$ όποτε θέλουμε. Αυτό διότι αποδεικνύεται στα μαθηματικά ότι $\phi \equiv (\exists X)\phi \equiv (\forall x)\phi$ δηλαδή $\phi \leftrightarrow (\exists x)\phi \leftrightarrow (\forall x)\phi$ είναι ένας νόμος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\forall x)(\exists Y)\underbrace{(Z>2)}_{\phi} \equiv (Z>2)$

Στον ϕ δεν εμφανίζονται ελεύθερα τα X και Y.

Άρα το $(\forall x)(\exists Y)(Z>2) \equiv (\exists Y)(Z>2) \equiv (Z>2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\forall X)(\forall X)\phi \equiv (\forall X)\phi$

$(\exists x)(\exists x)\phi \equiv (\exists x)\phi$

Διότι αν ονομάσουμε $\phi' = (\forall x)\phi$, τότε στο ϕ' εμφανίζεται δεσμευμένο το X και άρα μπορούμε να ξεχάσουμε οποιοδήποτε $(\exists x)$ ή $(\forall X)$ μπροστά από το ϕ'.

$(\forall X)(\exists X)\phi \equiv (\exists X)\phi$

$(\exists x)(\forall x)\phi \equiv (\forall x)\phi$

Νόμοι Αντικατάστασης Μεταβλητών

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ϕ ένας οποιοσδήποτε τύπος της γλώσσας $\mathcal{L}$, τ είναι ένας όρος της $\mathcal{L}$ και X μία μεταβλητή. Τότε με $\phi[X|\tau]$ παριστάνουμε τον τύπο που προκύπτει από τον ϕ, όταν αντικαταστήσουμε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της X (μέσα στο ϕ) με τον όρο τ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\phi: (\exists x)(x+2=y) \to (\forall y)(x<y)$, $\tau = y^2+x$

$$\phi[x|\tau]: (\exists x)(x+2=y) \to (\forall y)(y^2+x<y)$$
$$\phi[y|\tau]: (\exists x)(x+2=y^2+x) \to (\forall y)(x<y)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ϕ, τ όπως παραπάνω, τότε θα λέμε ότι ο τ μπορεί να αντικαταστήσει την x στο ϕ αν και μόνο αν δεν υπάρχει υποτύπος ϕ_1 του ϕ στον οποίο εμφανίζεται ο x ελεύθερα και ο ϕ_1 είναι της μορφής $(\forall y)\phi_2$ είτε $(\exists y)\phi_2$ και η y βρίσκεται μέσα στον τ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\phi = (\exists y)(y \neq x)$, $\tau = y$

ΕΡΩΤΗΣΗ: Μπορεί ο τ να αντικαταστήσει την x μέσα στον τύπο ϕ;

$\phi = (\exists y)(y \neq x)$

$y \neq x$ $\qquad \underbrace{(\exists y)(y \neq x)}_{\phi_1}$

Δεν μπορεί να αντικαταστήσει στην περίπτωση αυτή ο τ τον x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\phi = (\exists y)(y \neq x)$, $\tau = z$ Μπορεί να αντικαταστήσει ο τύπος τ την x.

Νόμοι Αντικατάστασης

Το $(\forall x)\phi \to \phi[x|\tau]$ είναι νόμος για οποιονδήποτε όρο τ που μπορεί να αντικαταστήσει τον x μέσα στον ϕ.

Σχόλιο: Δεν ισχύει γενικά ότι είναι νόμος ο $(\forall x)\phi \to \phi[x|\tau]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\phi = (\exists y)(y \neq x)$ και $\tau = y$, τότε ο τύπος
$(\forall x)\underbrace{(\exists y)(y \neq x)}_{\phi} \rightarrow \phi[x|\tau]$ δηλαδή ο τύπος
$(\forall x)(\exists y)(y \neq x) \rightarrow (\exists y)(y \neq y)$ δεν μπορεί να είναι νόμος.

Αντιπαράδειγμα: $\mathfrak{A}: |\mathfrak{A}| = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
Έστω υ μία οποιαδήποτε αποτίμηση στην $\mathfrak{A}$. Τότε:
$\mathfrak{A}, \upsilon \models (\forall x)(\exists y)(y \neq x)$
Προφανώς $\mathfrak{A}, \upsilon \not\models (\exists y)(y \neq y)$.

Νόμοι Εναλλαγής ποσοδεικτών:

$(\forall x)(\forall y)\phi = (\forall y)(\forall x)\phi$ και όμοια για τους υπαρξιακούς.

Νόμοι Μετακίνησης ποσοδεικτών:

Έστω ϕ ένας νόμος ή διαφορετικά δεν εμφανίζεται ελεύθερη μεταβλητή x σε αυτόν και ψ ένας οποιοσδήποτε τύπος.
Τότε $(\forall x)(\phi \wedge \psi) \equiv \phi \wedge (\forall x)\psi$ και όμοια αν στη θέση της $\wedge$ βάλουμε ένα οποιοδήποτε σύμβολο από τα $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\vee$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι εάν ϕ είναι ένας νόμος ή διαφορετικά δεν εμφανίζεται ο x ελεύθερα στον ϕ τότε το
$(\exists x)\phi \equiv (\forall x)\phi$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από νόμο Απορρόφησης έχουμε $(\exists x)\phi \equiv \phi$, όμοια
$(\forall x)\phi = x \Rightarrow$ το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\exists x)(\phi \rightarrow \psi) \equiv \phi \rightarrow (\exists x)\psi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\forall x)(\psi \to \phi) \equiv (\forall x)(\neg\psi \vee \phi) \equiv (\forall x)(\phi \vee \neg\psi) \equiv$

$\equiv \phi \vee (\forall x)(\neg\psi) \equiv \phi \vee \neg(\exists x)\psi \equiv [(\exists x)\psi] \to \phi$

25-05-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Σχόλιο: Ο νόμος γενίκευσης: $\phi \to (\forall x)\phi$ ισχύει με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ, διαφορετικά δεν έπεται ότι είναι νόμος.

Αντιπαράδειγμα: Έστω q ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος και θεωρούμε τον τύπο $q(x) \to (\forall x)q(x)$.

Κατασκευάζουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}$ με $|\mathcal{A}| = \{m, n\}$ $\varepsilon(q) = \{m\}$. Έστω υ μια ~~τυχαία~~ αποτίμηση με $\upsilon(x) = m$, τότε προφανώς $\mathcal{A},\upsilon \models q(x)$ ενώ το $\mathcal{A},\upsilon \not\models (\forall x)q(x)$, διότι $\mathcal{A},\upsilon[x/n] \not\models q(x)$

Νόμος Αντικατάστασης Μεταβλητών.

$(\forall x)\phi \to \phi[x/\tau]$ όπου τ είναι ένας όρος της γλώσσας μας που μπορεί να αντικαταστήσει την x στο ϕ. (Δηλαδή εάν η y είναι μια οποιαδήποτε μεταβλητή του τ, τότε δεν υπάρχει υποτύπος ϕ_1 του ϕ στον οποίο η x εμφανίζεται ελεύθερη και ο ϕ_1 ξεκινάει με $(\forall y)$ ή $(\exists y)$).

Παράδειγμα: i) $\tau = c$, c: σύμβολο σταθεράς της γλώσσας

$(\forall x)\phi \to \phi[x/c]$

ii) $\tau = x$, $(\forall x)\phi \to \phi[x/x]$ δηλ. $(\forall x)\phi \to \phi$: Νόμος.

iii) $\tau = y$, ϕ: $(\exists y)(y \neq x)$

$(\forall x)\underbrace{(\exists y)(y \neq x)}_{\phi} \to (\exists y)(y \neq y)$: Όχι Νόμος

Άσκηση: Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι νόμοι και ποιοι όχι?

i) $(\forall y)[(\forall x)(\underbrace{p(x) \to p(x)}_{\phi}) \to (p(c) \to p(c))]$

όπου c σύμβολο σταθεράς

$[(\forall x)(p(x) \to p(x)) \to (p(c) \to p(c))]$: Νόμος αντικατάστασης με $\tau = c$

$(\forall y)[(\forall x)(p(x) \to p(x)) \to (p(c) \to p(c))]$: Νόμος

από νόμο απαλοιφής έχουμε $(\forall x)\phi \equiv \phi$ εάν ϕ είναι νόμος ή δεν εμφανίζεται πουθενά ελεύθερη στον ϕ η μεταβλητή y.

Β' τρόπος: Ως γνωστόν το $\phi \to \phi$ είναι ένας νόμος της λογικής, κατά συνέπεια το $p(c) \to p(c)$ είναι νόμος, άρα και $[(\forall x)(p(x) \to p(x)) \to (p(c) \to p(c))]$ είναι νόμος και άρα $(\forall y)[\ldots]$ είναι νόμος.

ii) $p(x) \to (\forall y)p(y)$ με p ένα μονομελές σύμβολο κατηγορήματος

Δεν είναι νόμος διότι το $(\forall y)p(y) \equiv (\forall x)p(x)$ και γνωρίζουμε ότι το $p(x) \to (\forall x)p(x)$ δεν είναι νόμος.

iii) $(\forall x)\underbrace{(\exists y)q(x,y)}_{\phi \quad \tau = y} \to (\exists y)q(y,y)$: Όχι Νόμος

iv) $(\forall x)[\underbrace{(\exists y)q(x,y)}_{\phi = \phi'} \to (\exists y)q(y,y)]$

Στο $(\exists y)q(x,y)$ δεν μπορεί να αντικαταστήσουμε το x/y διότι υπάρχει υποτύπος $\phi' = (\exists y)q(x,y)$ που ξεκινάει με $(\exists y)$ ή $(\forall y)$.

v) $\overbrace{(p(Y) \to (\forall X)p(X))}^{\phi} \to (\forall X)\overbrace{(p(Y) \to (\forall X)p(X))}^{\phi}$

Είναι νόμος διότι ισχύει $\phi \to (\forall X)\phi$ με X να είναι δεσμευμένο στο ϕ.

Σχόλιο: $\phi \to (\forall Y)\phi$ δεν είναι νόμος στην περίπτωση μας.

vi) $X_2 = X_0 \to [p(X_2, F(X_5, X_2)) \leftrightarrow p(X_2, F(X_5, X_0))]$

όπου F είναι διθέσιο σύμβολο συνάρτησης. (Είναι ΝΟΜΟΣ)

Σχόλιο: (Νόμος αντικατάστασης σε ατομικούς τύπους)
Εαν ϕ είναι ένας ατομικός τύπος τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε μέσα στο ϕ μια μεταβλητή X με κάποια άλλη Y σε μερικές ή σε όλες τις εμφανίσεις της X, με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε $X = Y$.

"SOS"

Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή (Δ.Ε.Κ.Μ.)

Ορισμος: Ένας τύπος ϕ είναι Δ.Ε.Κ.Μ. εάν είναι γραμμένος στη μορφή $(Q_1 X_1)(Q_2 X_2)\cdots(Q_n X_n)\sigma$ όπου $Q_1, Q_2, \ldots$ είναι κάποια από τα $\forall, \exists$ και σ είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες γραμμένος σε συζευκτική κανονική μορφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε τύπος τ των μαθηματικών γράφεται ισοδύναμα σε Δ.Ε.Κ.Μ. μορφή.

"SOS"

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Γράψτε τον παρακάτω τύπο ισοδύναμα σε Δ.Ε.Κ.Μ.:

$\underbrace{(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)[p(X,Z) \land p(Y,Z)]}_{A} \to \underbrace{(\forall X)(\forall Y)(\exists U)\, r(X,Y,U)}_{B}$

όπου p, r είναι 2 σύμβολα κατηγορήματος σε κάποια γλώσσα.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους απορρόφησης, αντικατάστασης και μετονομασίας μεταβλητών.

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B \equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg p(x,z) \vee (\neg p(y,z)) \vee \underbrace{(\forall x)(\forall y)(\exists u)\, r(x,y,u)}_{B}.$$

$$\equiv (\exists x)\big[(\exists y)(\forall z)[(\neg p(x,z)) \vee (\neg p(y,z))] \vee B\big]$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y)\big[(\forall z)[\cdots] \vee B\big]$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)\big[\overbrace{\neg p(x,z) \vee (\neg p(y,z))} \vee (\forall x)(\forall y)(\exists u)\, r(x,y,u)\big]$$

δεν μπορούμε να τα πάρουμε μπροστά γιατί στο ~~~ εμφανίζονται ελεύθερα

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)\big[\neg p(x,z) \vee (\neg p(y,z)) \vee (\forall x_1)(\forall y_1)(\exists u)\, r(x_1,y_1,u)\big]$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall x_1)(\forall y_1)\big[\neg(p(x,z)) \vee (\neg p(y,z)) \vee (\exists u)\, r(x_1,y_1,u)\big]$$

$$\equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall x_1)(\forall y_1)(\exists u)\big[\neg p(x,z) \vee (\neg p(y,z)) \vee (r(x_1,y_1,u))\big]$$

όλοι οι ποσοδείκτες είναι μπροστά και μέσα έχουμε συζευκτική κανονική μορφή. Άρα είναι Δ.Ε.Κ.Μ.

ΝΟΜΟΙ ΣΤΗΝ ΛΟΓΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ 26-05-15

α) Νόμοι άρνησης ποσοδεικτών

$\neg(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi$

$\neg(\exists x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi$

$\forall x\varphi \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\varphi$

$(\exists x)\varphi \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\varphi$

β) Νόμοι κατανομής ποσοδεικτών

$(\forall x)(\phi\wedge\psi) \leftrightarrow [(\forall x)\phi] \wedge [(\forall x)\psi]$

$(\exists x)(\phi\vee\psi) \leftrightarrow ([(\exists x)\phi] \vee [(\exists x)\psi])$

γ) Νόμοι εναλλαγής ποσοδεικτών

$(\forall x)(\forall y)\varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$,

$(\exists x)(\exists y)\varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi$,

δ) Αν ο φ είναι νόμος (ταυτολογία) ή διαφορετικά η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ τότε μπορούμε να αποδείξουμε τους παρακάτω νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών

i) $(\varphi \to (\forall x)\psi) \leftrightarrow [(\forall x)(\varphi\to\psi)]$

ii) $(\varphi \to (\exists x)\psi) \leftrightarrow [(\exists x)(\varphi\to\psi)]$

iii) $[(\forall x)\psi \to \varphi] \leftrightarrow (\exists x)(\psi\to\varphi)$

iv) $[(\exists x)\psi \to \varphi] \leftrightarrow (\forall x)(\psi\to\varphi)$

v) $(\varphi \vee (\forall x)\psi) \leftrightarrow [(\forall x)(\varphi\vee\psi)]$

vi) $(\varphi \wedge (\forall x)\psi)) \leftrightarrow [(\forall x)(\varphi\wedge\psi)]$

Συνέχεια πίσω

vii) $(\varphi \vee (\exists X)\psi) \leftrightarrow [(\exists X)(\varphi \vee \psi)]$

viii) $[\varphi \wedge (\exists X)\psi] \leftrightarrow [(\exists X)(\varphi \wedge \psi)]$

ε) Νόμος γενίκευσης: Αν η X δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ ή φ είναι ένας νόμος (ταυτολογία) τότε

$$\varphi \leftrightarrow (\forall X)\varphi \leftrightarrow (\exists X)\varphi$$

(Λέγεται κ' νόμος απορρόφησης ποσοδεικτών)

στ) Νόμοι μετονομασίας

Αν η Y δεν εμφανίζεται ελεύθερη σ' ένα τύπο $(\forall X)\eta$ τότε $(\forall X)\eta \equiv (\forall Y)\eta[X|Y]$ κ' όμοια $(\exists X)\eta \equiv (\exists Y)\eta[X|Y]$ με την προϋπόθεση ότι η Y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $(\exists X)\eta$.

ζ) Νόμος αντικατάστασης μεταβλητών με κάποιους όρους μέσα σε ατομικούς τύπους φ ή γενικότερα σε τύπους χωρίς ποσοδείκτες

Έστω ϕ^* είναι ο τύπος που προκύπτει απ' τον ϕ εάν αντικαταστήσουμε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής X με την Y τότε $\phi \equiv \phi^*$ με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε ότι $X = Y$ δηλ. ο παρακάτω τύπος είναι ένας νόμος

$$X = Y \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi^*)$$

26-05-15

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δ.Ε.Κ.Μ (δεσμευμένη ενπρός κανονική μορφή)

$\phi \equiv \phi'$ με ϕ' σε Δ.Ε.Κ.Μ.

π.χ. $\overbrace{(\forall x)(p(x) \to q(x))}^{A} \to \overbrace{[((\forall x)p(x)) \to ((\forall x)p(x))]}^{B}$

όπου $p(\cdot)$ και $q(\cdot)$ είναι μονομελή σύμβολα κατηγ.

$\equiv (\neg A) \vee B \equiv (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x)) \vee [(\exists x)\neg p(x) \vee (\forall x) q(x)]$

$\equiv (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \vee (\exists x)\neg p(x) \vee (\forall x) q(x)$

$\overset{\text{β)}}{\equiv} (\exists x)[\{p(x) \wedge \neg q(x)\} \vee \neg p(x)] \vee (\forall x) q(x)$

$\overset{\text{δ)}}{\equiv} (\forall x)((\exists x)[\{p(x) \wedge \neg q(x)\} \vee p(x)] \vee q(x))$

$\overset{\text{στ)}}{\equiv} (\forall x)((\exists x_1)[\{p(x_1) \wedge \neg q(x_1)\} \vee p(x_1)] \vee q(x))$

$\equiv (\forall x)(\exists x_1)[\underbrace{\{p(x_1) \wedge \neg q(x_1)\} \vee p(x_1) \vee q(x)}_{\text{E.K.M.?}}]$

$\equiv (\forall x)(\exists x_1)[\{p(x_1) \vee p(x_1) \vee q(x)\} \wedge \{\neg q(x_1) \vee p(x_1) \vee q(x)\}]$

ΑΣΚΗΣΗ: Να απλοποιηθεί ο παρακάτω τύπος:

$(\exists x)[\underbrace{(\forall x_2)(x \cdot x_2 = x_2 \wedge x_2 \cdot x = x_2)}_{\text{"το } x \text{ είναι το ουδέτερο"}} \wedge \overbrace{\underbrace{(\forall x_1)(\exists x_2)}_{\text{"κάθε } x_1 \text{ έχει αντίστροφο κάποιο } x_2\text{"}}(x_1 x_2 = x \wedge x_2 x_1 = x}^{\phi}$

ΛΥΣΗ: $\overset{\text{δ)}}{\equiv} (\exists x)(\forall x_2)[\underbrace{x x_2 = x_2 \wedge x_2 x = x_2}\ \wedge (\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 x_2 = x \wedge x_2 x_1 = x))]$

$$\equiv (\exists x)(\forall x_2)(\forall x_1)\left[x x_2 = x_2 \wedge x_2 \cancel{x} = \cancel{x}_2 \wedge (\exists x_2)(\cdots)\right]$$

$$\overset{\sigma\tau)}{\equiv} (\exists x)(\forall x_2)(\forall x_1)\left[x x_2 = x_2 \wedge x_2 x = x_2 \wedge (\exists x_3)(x_1 x_3 = x \wedge x_3 x_1 = x)\right]$$

$$\equiv (\exists x)(\forall x_2)(\forall x_1)(\exists x_3)\left[x x_2 = x_2 \wedge x_2 x = x_2 \wedge (x_1 x_3 = x \wedge x_3 x_1 = x)\right]$$

Σχόλιο: Μπορούμε να κάνουμε και καλύτερη απλοποίηση

$$(\forall x_2)(x x_2 = x_2 \wedge x_2 x = x_2) \underset{\sigma\tau)}{\equiv} (\forall x_1)(x x_1 = x_1 \wedge x_1 x = x_1)$$

Άρα: $(\exists x)\left[(\forall x_1)(x x_1 = x_1 \wedge x_1 x = x_1) \wedge (\forall x_1)(\exists x_2)(x_1 x_2 = x \wedge x_2 x_1 = x)\right]$

$$\overset{\beta)}{\equiv} (\exists x)(\forall x_1)\left[x x_1 = x_1 \wedge x_1 x = x_1 \wedge (\exists x_2)(x_1 x_2 = x \wedge x_2 x_1 = x)\right]$$

$$\overset{\delta)}{\equiv} (\exists x)(\forall x_1)(\exists x_2)\left[(x x_1 = x_1 \wedge x_1 x = x_1) \wedge (x_1 x_2 = x \wedge x_2 x_1 = x)\right]$$

Άσκηση: $\overbrace{\left[(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)\right]}^{A} \rightarrow \overbrace{(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))}^{B}$

με $p(\cdot)$ και $q(\cdot)$ να είναι μονομελή σύμβολα κατηγορ.
Δείξτε ότι είναι νόμος.

Λύση: Ιδέα: $\neg\sigma \equiv A \wedge \neg B \equiv \left(\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)\right) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x))$

$$\equiv \underbrace{\left[(\forall x)\neg p(x) \vee (\forall x)q(x)\right]}_{\phi} \wedge (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x))$$

$$\overset{\delta)}{\equiv} (\exists x)\left([\cdots] \wedge \underline{p(x) \wedge \neg q(x)}\right)$$

$$\overset{\sigma\tau)}{\equiv} (\exists x)\left(\left[(\forall x_1)\neg p(x_1) \vee (\forall x_2)q(x_2)\right] \wedge p(x) \wedge \neg q(x)\right)$$

$$\underbrace{\equiv (\exists x)(\forall x_1)(\forall x_2)\underbrace{\left[(\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge p(x) \wedge \neg q(x)\right]}_{\Sigma.K.M}}_{\Delta.E.K.M.}$$

$\mathcal{A}, v \not\models (\exists x)(\forall x_1)(\forall x_2)[\ldots]$

Εις άτοπο απαγωγή

$\mathcal{A}, v \models (\exists x)(\forall x_1)(\forall x_2)[\ldots]$

δηλαδή μπορούμε να βρούμε κάποιο $a_0 \in |\mathcal{A}|$ έτσι ώστε για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, για κάθε $b \in |\mathcal{A}|$

$$\mathcal{A}, v[x/a_0][x_1/a][x_2/b] \models (\neg p(x_1) \vee q(x_2)) \wedge p(x) \wedge \neg q(x)$$

δηλαδή $a \notin \varepsilon(p)$ ή $b \in \varepsilon(q)$ και $a_0 \in \varepsilon(p)$ και $a_0 \notin \varepsilon(q)$

Άτοπο!

Άσκηση: (παλιό θέμα!) ϕ, σ είναι τύποι στην Λ.Κ. να δείξετε ότι

$$\overbrace{[(\forall x)\phi \vee (\forall x)\sigma]}^{A} \to \overbrace{(\forall x)(\phi \vee \sigma)}^{B}$$

και δείξτε επίσης ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει πάντα.

Λύση: Α' τρόπος: $A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv$

$$\equiv [(\exists x)\neg\phi \wedge (\exists x)\neg\sigma] \vee (\forall x)(\phi \vee \sigma)$$

$$\equiv (\forall x)\left[((\exists x)\neg\phi \wedge (\exists x)\neg\sigma) \vee (\phi \vee \sigma)\right]$$

$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)(\exists x_2)[(\neg\phi \wedge \neg\sigma) \vee (\phi \vee \sigma)]$$ Λάθος

$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)(\exists x_2)[\neg(\phi \vee \sigma) \vee (\phi \vee \sigma)]$$ Νόμος.

Σωστό: $(\forall x)\left([(\exists x_1)\neg\phi[x/x_1] \wedge (\exists x_2)\neg\sigma[x/x_2]] \vee \phi \vee \sigma\right)$

$$\equiv (\forall x)(\exists x_1)(\exists x_2)\left([\neg\phi[x/x_1] \wedge \neg\sigma[x/x_2]] \vee \phi \vee \sigma\right) \; ?$$

B' τρόπος: Αντί να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της αλήθειας του Tarski.

Έστω $\mathcal{A}, u$ τυχαία τέτοια ώστε $\mathcal{A}, u \models (\forall x)\phi \vee (\forall x)\sigma$. Θα δείξουμε το $\mathcal{A}, u \models (\forall x)(\phi \vee \sigma)$.

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $\mathcal{A}, u \models (\forall x)\phi \Rightarrow \forall a \in |\mathcal{A}|$ έχουμε $\mathcal{A}, u[x|a] \models \phi$ $\Rightarrow \mathcal{A}, u[x|a] \models \phi \vee \sigma \Rightarrow \mathcal{A}, u \models (\forall x)(\phi \vee \sigma)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

π.χ. $\phi: x=0$, $\sigma: x=1$ τότε $(\forall x)(\phi \vee \sigma) \rightarrow [(\forall x)\phi \vee (\forall x)\sigma]$ δεν αληθεύει σε ένα μοντέλο $\mathcal{A}$ με 2 στοιχεία a, b έτσι ώστε $\varepsilon(0)=a$, $\varepsilon(1)=b$

ΑΣΚΗΣΗ: "5ος" Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας του Tarski να αποδείξετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) $[(\exists x)p(x) \vee (\exists y)q(y)] \rightarrow (\exists x)(p(x) \vee q(x))$

β) $(\exists y)(\forall x)\, p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$

γ) $\neg[(\forall x)p(x)] \rightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

Σχόλιο: Μπορούμε να δείξουμε και τις αντίστροφες συνεπαγωγές εκτός του β).
Μπορούμε να φτιάξουμε αντιπαράδειγμα για το β).

"SOS"

ΑΣΚΗΣΗ: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των σημαντικών πινάκων να αποδείξετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις

α) $[(A \vee B) \wedge (A \to \Gamma) \wedge (B \to \Delta)] \to (\Gamma \vee \Delta)$

β) $[((A \wedge B) \to \Gamma) \wedge A \wedge (\neg B \to \Gamma)] \to \Gamma$

ΛΥΣΗ: α) $\psi [\ldots] \to (\Gamma \vee \Delta)$

$\alpha [\ldots]$

$\psi (\Gamma \vee \Delta)$

X

"SOS"

ΑΣΚΗΣΗ: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο επίλυσης δείξτε ότι

$\Sigma \models \sigma$, όπου $\sigma = A \wedge B$ και $\Sigma = \{B \to A, \Gamma \to \Delta, \Delta \to B, B \vee \Gamma \vee \Delta\}$

ΛΥΣΗ: $\Sigma \models_R A$

φέρνουμε το Σ σε συνολοθεωρητική μορφή $\{\neg B, A\} \{\neg \Gamma, \Delta\} \{\neg \Delta, B\}, \{B, \Gamma, \Delta\}$

$\Sigma \models_R B$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $\phi = (A \leftrightarrow (B \to \Gamma)) \wedge (A \leftrightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow \neg \Gamma)$

είναι η ϕ ταυτολογία? Γράψτε την ϕ σε Δ.Κ.Μ. και Σ.Κ.Μ.