18-02-15

Σ. ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ.

ΣΥΝΟΛΟ: Μια συλλογή αντικειμένων τα οποία έχουν μια μαθηματική σχέση μεταξύ τους.

ΓΝΩΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ:
- $\emptyset$: κενό σύνολο $\{\cdot\}$
- $\{1,2,3,\ldots\}$
- $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών

Από ήδη κατασκευασμένα σύνολα μπορούμε να φτιάξουμε νέα σύνολα, παίρνοντας πεπερασμένο πλήθος από αυτά.

Π.χ. $\{\mathbb{N}, \underset{\text{πεπερασμένο}}{1}, 2\} \neq \underset{\text{άπειρο}}{\mathbb{N}}$

Π.χ. Σύνολο αναφοράς $\mathbb{N}$
μαθηματική σχέση $x \neq x$, $\{x \in \mathbb{N} : x \neq x\} = \emptyset$

Ένας άλλος τρόπος για να κατασκευάσουμε σύνολα είναι να χρησιμοποιούμε κάποιο σύνολο αναφοράς Ω. και κάποια μαθηματική σχέση $P(x)$, οπότε μπορούμε να φτιάξουμε το σύνολο $\{x \in \Omega : P(x)\}$

Π.χ. Κατασκευή των αρτίων αριθμών:
Είναι όλα τα $\{x \in \mathbb{N} : 2 \mid x\}$
Οπότε το σύνολο των περιττών αριθμών: $\{x \in \mathbb{N} : 2 \nmid x\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω Ω σύνολο αναφοράς και $A \subseteq \Omega$, τότε με $\Omega - A$ ή A^c εννοούμε το συμπλήρωμα του A, δηλαδή το σύνολο $\{x \in \Omega : x \notin A\}$.

Εκφράσεις που περιέχουν μια μεταβλητή και τ.ω. αν η μεταβλητή πάρει συγκεκριμένες τιμές από ένα σύνολο αναφοράς Ω τότε αυτές να γίνονται αληθείς ή ψευδείς, ονομάζονται <u>προτασιακοί τύποι</u>.

<u>Π.χ.</u> Ω : { κάτοικοι της Ελλάδος }, $P(x)$ ο x είναι κάτοικος Ιωαννίνων. Το $P(x)$ θεωρείται προτασιακός τύπος.

<u>Π.χ.</u> $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $P(x)$ στην επόμενη ζαριά το x να δείξει ένα. Το $P(x)$ <u>δεν</u> θεωρείται προτασιακός τύπος.

<u>Π.χ.</u>
$$\left.\begin{array}{ll} x \mid 10 & : P_1(x) \\ x \mid 3 & : P_2(x) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} P_1(x) \cap P_2(x) & P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x) \\ P_1(x) \cup P_2(x) & \\ P_1(x) \Rightarrow P_2(x) & \end{array}$$

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ποσοδείκτες $(\forall, \exists)$

<u>Π.χ.</u> $(\exists x)\, p(x,y)$

<u>Π.χ.</u> $P(x,y)$ $\begin{cases} x: \text{κάτοικος Καρλοβάσου} \\ y: \text{βιβλίο μαθηματικών που διαβάζει ο } x. \end{cases}$

~~Το y είναι ένα βιβλίο μαθηματικών που το διαβάζει κάποιος κάτοικος του Καρλοβάσου~~

Το x είναι κάτοικος του Καρλοβάσου που διαβάζει κάποιο μαθηματικό βιβλίο y : $(\exists y)\, p(x,y)$

Κανένας κάτοικος του Καρλοβάσου δεν διαβάζει μαθηματικά βιβλία: $(\forall x)(\forall y)\, \neg p(x,y)$

<u>ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΕΣ:</u>

~~$\neg(\exists x)\, p(x) \Leftrightarrow (\forall x)\, \neg p(x)$~~

~~$\neg(\forall x)\, p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\, \neg p(x)$~~

~~$(\exists y)(\exists x)\, p(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\, p(x,y)$ και όμοια $\forall$ αντί $\exists$~~

~~$(\forall x)(\exists y)\, p(x,y) \Leftarrow (\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$~~

ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΕΣ:
- $\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg p(x)$
- $\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg p(x)$
- $(\exists y)(\exists x)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)p(x,y)$
  και όμοια $\forall$ αντί $\exists$
- $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \not\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)p(x,y)$
- Ο προτασιακός τύπος $P(x) \Rightarrow q(x)$
  θεωρείται πάντοτε αληθής, εάν υποθέσουμε ότι η $p(x)$ είναι πάντοτε ψευδής προτασιακός τύπος για το σύνολο Ω.

Π.χ. $\{x\in N : \underbrace{x\neq x}_{P(x)} \Rightarrow \underbrace{x\leq 10}_{q(x)}\} = \{x \in N : \text{αληθής τύπος}\} = N$

Π.χ. $\{x\in N : \text{αν } x\in\emptyset \Rightarrow 2|x\} = N$.

Αληθοπίνακας συνεπαγωγής

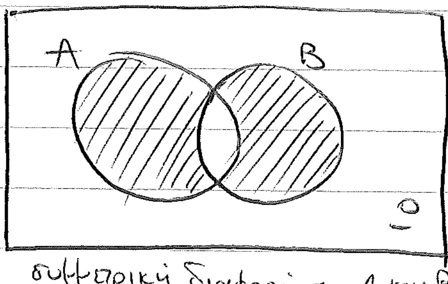
$P(x)$	$q(x)$	$p(x)\Rightarrow q(x)$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	ψ	α
ψ	α	α

Π.χ. $\Omega = \{1,\dots,10\}$, $P(x,y) : x\leq y$
$(\exists y)(\forall x)p(x,y)$ = μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο
$y\in\Omega : \forall x\in\Omega \ x\leq y$ αληθές
$(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ = για κάθε $x\in\Omega$ υπάρχει $x\in\Omega : x\leq y$ αληθές

Π.χ. $\Omega = N$ $p(x,y) : x\leq y$
$(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ αληθές
$(\exists y)(\forall x)p(x,y)$ ψευδής.

Τομή συνόλων

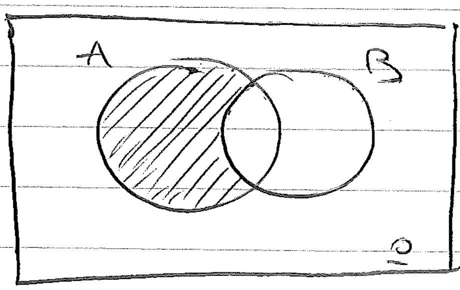
$$A = \{x \in \Omega : p(x)\}, \quad B = \{x \in \Omega : q(x)\} \quad \Big\} \quad A \cap B = \{x \in \Omega : p(x) \cap q(x)\}, \quad A \cup B = \{x \in \Omega : p(x) \cup q(x)\}$$



συμμετρική διαφορά του A και B.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A - B = \{x \in \Omega : p(x) \cap (\neg q(x))\}$$



<u>Σχόλιο:</u> Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων είναι ουσιαστικά η ένωση 2 διαφορών

<u>Π.χ.</u> $A \cap \emptyset = \{x \in \Omega : p(x) \cap (x \neq x)\} = \emptyset$

$A \cup \emptyset = \{x \in \Omega : p(x) \cup (x \neq x)\} = A$

$A - \emptyset = \{x \in \Omega : p(x) \cap (\neg (x \neq x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \cap (x = x)\} = A$

$\emptyset - A = \{x \in \Omega : (x \neq x) \cap (\neg p(x))\} = \emptyset.$

<u>Άπειρη Ένωση:</u>

Έστω C σύνολο από άπειρα αντικείμενα τότε:

$\cup C = \{x \in \Omega : (\exists y \in C)\ x \in y\}$

<u>Άπειρη Τομή</u>

$\cap C = \{x \in \Omega : (\forall y \in C)\ x \in y\}$

Π.χ. $C = \{(0,1), \ldots, (0,n)\}$

~~Π.χ. $C = \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,n)\}$ όπου με $(0,n)$ εννοούμε το ανοιχτό~~
διάστημα με σύνολο αναφοράς $\Omega \in \mathbb{R}$

ένωση $\cup$
τομή $\cap$

άπειρη ένωση $\bigcup C$ = το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία τα συνόλων $\sigma \in C$
άπειρη τομή $\bigcap C$ = ——— " ——— κοινά στοιχεία των συνόλων $\sigma \in C$

διαφορά $A \setminus B$
συμπλήρωμα $\Omega \setminus A$ ή A^c όπου Ω το σύνολο αναφοράς
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (συμμετρική διαφορά

διατεταγμένο ζεύγος $(A,B) := \{\{A\},\{A,B\}\}$

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $(1,1) = \{\{1\},\{1,1\}\} = \{\{1\},\{1\}\} = \{\{1\}\}$

$(A,1) = \{\{A\},\{A,1\}\}$

<u>Ασκήσεις</u>:

(1) Δείξτε ότι αν $A \neq B$ τότε $(A,B) \neq (B,A)$

Έστω $(A,B) = (B,A)$ τότε $\{\{A\},\{A,B\}\} = \{\{B\},\{B,A\}\}$
Περιπτώσεις:
(i) $\{A\} = \{B\}$ <u>άτοπο</u>! αφού $A \neq B$.
(ii) $\{A\} = \{B,A\}$ άτοπο! αφού $A \neq B$.

Άρα $(A,B) \neq (B,A)$

<u>Ορισμός</u> (καρτεσιανό γινόμενο): $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

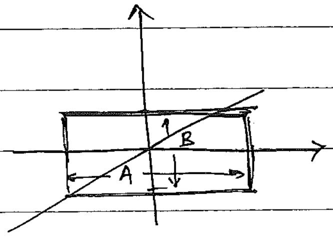
$\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4) \ldots$
$\ldots (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

//02/03/15//

$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A,\ \beta \in B\}$.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad A = \{1, 2, 5\}$, $\quad B = \{1, 3, 6\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,6), (2,1), (2,3), (2,6), (5,1), (5,3), (5,6)\}$.



$\left.\begin{array}{l} \emptyset \times B = \emptyset \\ A \times \emptyset = A. \end{array}\right\}$ τετριμμένες περιπτώσεις.

διαγώνιος: $\Delta = \{(x, x) : x \in \Omega\}$.

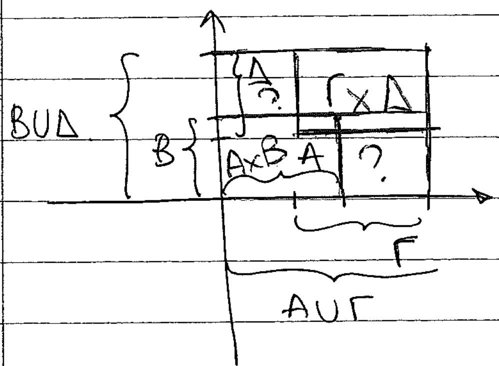
$A \times B \neq B \times A$.

→ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ←

(i) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

(ii) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

Σχόλιο: $(A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta) \overset{?}{=} (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta)$.



άρα δεν ισχύει η ισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι ισχύει

$(A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta) = (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta)$

__ΑΠΑΝΤΗΣΗ__: Έστω $(x,y) \in (A\cap\Gamma)\times(B\cap\Delta)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(A\cap\Gamma) \\ y\in(B\cap\Delta)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \text{ και } x\in\Gamma \\ y\in B \text{ και } y\in\Delta\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)$ και $(x,y)\in(\Gamma\times\Delta)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(\Gamma\times\Delta)$.

__ΑΣΚΗΣΗ__: Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια συνόλων τότε

(1) $A\times\bigcap\mathcal{C} = \bigcap_{C\in\mathcal{C}}(A\times C)$ και όμοια

(2) $A\times\bigcup\mathcal{C} = \bigcup_{C\in\mathcal{C}}(A\times C)$

__ΑΠΟΔΕΙΞΗ__: (__ΟΡΙΣΜΟΣ__: (άπειρη ένωση)

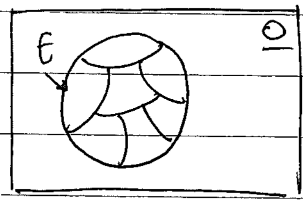
$\bigcup\mathcal{C}=\{x\in\underline{\Omega} : x\in C$ για κάποιο $C\in\mathcal{C}\}$

$\bigcap\mathcal{C}=\{x\in\underline{\Omega} : x\in C$ για κάποιο $C\in\mathcal{C}\}$.

(1) $(x,y)\in A\times\bigcap\mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in A\\ y\in\bigcap\mathcal{C}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in A\\ y\in C,\quad C\in\mathcal{C}\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times C,\quad C\in\mathcal{C} \Leftrightarrow (x,y)\in\bigcap_{C\in\mathcal{C}}(A\times C)$.

__ΟΡΙΣΜΟΣ__: Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια από μη κενά σύνολα που είναι υποσύνολα του $\underline{\Omega}$, και E ένα υποσύνολο του $\underline{\Omega}$. Η $\mathcal{C}$ θα λέγεται διαμέριση του E αν ισχύουν:



(i) $E=\bigcup\mathcal{C}$

(ii) $\forall c_1,c_2\in\mathcal{C},\quad c_1\cap c_2=\emptyset$

συμβολισμός: $E=\dot{\bigcup}\mathcal{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συλλογή από σύνολα του $\mathcal{C}$ λέγεται κάλυψη του E αν απλά ισχύει $E \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $E \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ δύο διαμερίσεις του E. Τότε εάν $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ τότε αναγκαστικά $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρκεί να πάρουμε ένα C που ανήκει στη $\mathcal{C}_2$ και να δείξουμε ότι ανήκει στην $\mathcal{C}_1$

Έστω $x \in C \in \mathcal{C}_2$ άρα $x \in E$.

Επειδή $\mathcal{C}_1$ διαμέριση του E, $x \in C'$, $C' \in \mathcal{C}_1$.

όμως $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ άρα $C' \in \mathcal{C}_2$

Άρα $x \in C' \cap C \Rightarrow C' = C \Rightarrow C \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

$$(A \times B) \setminus (\Gamma \times \Delta) = (A \times (B \setminus \Delta)) \cup ((A \setminus \Gamma) \times B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: έστω $(x,y) \in (A \times B) \setminus (\Gamma \times \Delta)$.

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B)$ και $(x,y) \notin (\Gamma \times \Delta)$.

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ και } y \in B \\ x \notin \Gamma \text{ ή } y \notin \Delta \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \text{ και } y \in B \text{ και } x \notin \Gamma \\ \text{ή } x \in A \text{ και } y \in B \text{ και } y \notin \Delta \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in (A \setminus \Gamma) \times B \\ (x,y) \in A \times (B \setminus \Delta) \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow (x,y) = ((A \setminus \Gamma) \times B) \cup (A \times (B \setminus \Delta))$.

Βασική ισοδυναμία στη λογική: Έστω $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ τρεις προτάσεις, τότε η πρόταση $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \vee \sigma_3)$ είναι ισοδύναμη με την $(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma_3)$.

$\boxed{\Pi\chi}$ $\left.\begin{array}{l} \sigma_1 : x \in A \text{ και } y \in B \\ \sigma_2 : x \notin \Gamma \\ \sigma_3 : y \notin \Delta \end{array}\right\}$ $x \in A$ και $y \in B$ και $(x \notin \Gamma$ ή $y \notin \Delta)$

$\Rightarrow$ $(x \in A$ και $y \in B$ και $x \notin \Gamma)$
ή $(x \in A$ και $y \in B$ και $y \notin \Delta)$.

$\neg \forall x \in \mathcal{C} = \exists x \notin \mathcal{C}$ = υπάρχει ένα τουλάχιστον x που δεν ανήκει στο $\mathcal{C}$.

$\neg \exists x \in \mathcal{C} = \forall x \notin \mathcal{C}$ = όλα τα x δεν ανήκουν στο $\mathcal{C}$

Εφαρμογή: Βρείτε τα i) $\Omega \setminus \bigcup \mathcal{C}$ και ii) $\Omega \setminus \bigcap \mathcal{C}$.

(i) $x \in \Omega \setminus \bigcup \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in \Omega$ και $x \notin \bigcup \mathcal{C}$
$\Leftrightarrow x \in \Omega$ και $\neg(\exists c \in \mathcal{C} : x \in c)$
$\Leftrightarrow x \in \Omega$ και $\forall c \in \mathcal{C} : x \notin c$
$\Leftrightarrow x \in \Omega$ και $\forall c \in \mathcal{C} : x \in c^c$
$\Leftrightarrow x \in \Omega$ και $x \in \bigcap_{c \in \mathcal{C}} c^c$
$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{c \in \mathcal{C}} c^c$

(ii) με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Omega \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} c^c$.

Απλές περιπτώσεις:
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

<u>Πράξη του δυναμοσυνόλου</u>: Για κάθε σύνολο A μπορούμε να ορίσουμε το δυναμοσύνολο του A $P(A)=\{B\in \Omega : B\subseteq A\}$

$\boxed{\text{Πχ}}$ $A=\emptyset$

$P(A)=\{\emptyset\}$

$P(P(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$P(P(P(A)))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\}\}\}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Αν $A\in\mathcal{C}$ τότε

i) $A\in P(\bigcup\mathcal{C})$

ii) $\bigcap\mathcal{C}\in P(A)$

<u>Πρόχειρο</u>: $\emptyset\subseteq\{\emptyset\}$

$\{\emptyset\}\subseteq\{\emptyset\}$

$\{\emptyset\}\subseteq\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

$\{\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

<u>Απ</u>: i) Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap\mathcal{C}\subseteq A$

Έστω $x\in\bigcap\mathcal{C}$ και $A\in\mathcal{C}$. ~~Άρα $\forall c\in\mathcal{C}$, $x\in c$~~

~~Άρα για $c=A$ έχουμε $x\in A$ και συνεπώς $\bigcap\mathcal{C}\in P(A)$~~.

Άρα $x\in\bigcup\mathcal{C}$ και συνεπώς $A\subseteq\bigcup\mathcal{C}$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap\mathcal{C}\subseteq A$.

Έστω $x\in\bigcap\mathcal{C}$ και $A\in\mathcal{C}$. Άρα $\forall c\in\mathcal{C}$, $x\in C$

Άρα για $c=A$ έχουμε $x\in A$ και συνεπώς $\bigcap\mathcal{C}\in P(A)$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: i) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

Ισχύει $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$?

ii) αν $P(A)=P(B)$ τότε τι συμπεραίνουμε για τα A και B

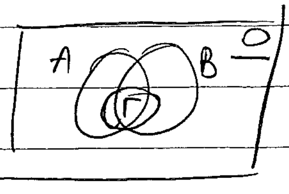
iii) $A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

<u>Απ</u>: i) έστω $\Gamma\subseteq A\cap B \Leftrightarrow \Gamma\subseteq A$ και $\Gamma\subseteq B$

$\Leftrightarrow \Gamma\in P(A)$ και $\Gamma\in P(B) \Leftrightarrow \Gamma\in P(A)\cap P(B)$

έστω $\Gamma\subseteq A\cup B \Leftrightarrow \Gamma\subseteq A$ ή $\Gamma\subseteq B$

δεν ισχύει!



ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια σχέση $\sigma \subseteq A \times B$ είναι μια σχέση από το A στο B και συμβολίζεται με $\sigma : A \to B$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πεδίο ορισμού της σ

$$D(\sigma) = \{x : \exists y \in B \text{ τ.ω. } (x,y) \in \sigma\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πεδίο τιμών της σ

$$R(\sigma) = \{y : \exists x \in A \text{ τ.ω. } (x,y) \in \sigma\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αντίστροφη σχέση: συμβολισμός $\sigma^{-1} : B \to A$

$$\sigma^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \text{ τ.ω. } (x,y) \in \sigma\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σύνθεση. Έστω $\sigma : A \to B$ και $\tau : \Gamma \to \Delta$

Ονομάζουμε $\tau \circ \sigma = \{(x,z) : \exists y \in B \cap \Gamma \text{ τ.ω. } (x,y) \in \sigma$ και $(y,z) \in \tau\}$.

$\boxed{\text{Πχ}}$ $\sigma = \{(\alpha,\kappa), (\alpha,\mu), (\beta,\lambda), (\beta,\mu), (\delta,\xi)\}$

$\tau = \{(\kappa,\pi), (\mu,\rho), (\mu,\upsilon), (\nu,\upsilon), (\xi,\tau)\}$

$D(\sigma) = \{\alpha,\beta,\delta\}$, $R(\sigma) = \{\kappa,\mu,\lambda,\xi\}$

$D(\tau) = \{\kappa,\mu,\nu,\xi\}$

$\tau^{-1} = \{(\pi,\kappa), (\rho,\mu), (\upsilon,\mu), (\upsilon,\nu), (\xi,\tau)\}$

$R(\tau^{-1}) = \{\kappa,\mu,\nu,\xi\} = D(\tau)$

όμοια $D(\tau^{-1}) = R(\tau)$

$$\boxed{\begin{array}{c} R(\tau^{-1}) = D(\tau) \\ D(\tau^{-1}) = R(\tau) \end{array}}$$

$\tau \circ \sigma = \{(\alpha,\pi), (\alpha,\rho), (\alpha,\upsilon), (\beta,\rho), (\beta,\upsilon), (\delta,\tau)\}$

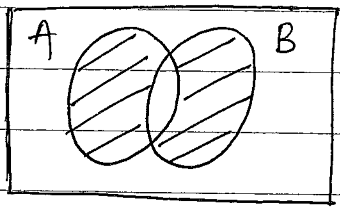
$\sigma \circ \tau = \emptyset$

Χρήσιμες προτάσεις :

$\sigma : A \to B$, $\tau : A \to B$, $\varepsilon : \Gamma \to \Delta$ } τυχαίες σχέσεις

1. $\sigma \subseteq \tau$ ανν $\sigma^{-1} \subseteq \tau^{-1}$
2. $D(\sigma) \setminus D(\tau) \subseteq D(\sigma \setminus \tau)$
3. $R(\sigma) \setminus R(\tau) \subseteq R(\sigma \setminus \tau)$
4. $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$
5. $(\sigma \cap \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \tau^{-1}$
6. $(\sigma \setminus \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \setminus \tau^{-1}$
7. $(\sigma \Delta \tau)^{-1} = \sigma^{-1} \Delta \tau^{-1}$
8. $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$ ανν $\sigma = \sigma^{-1}$
9. $(\sigma \circ \varepsilon)^{-1} = \varepsilon^{-1} \circ \sigma^{-1}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $A \Delta B$



<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: (7) Έστω $(x,z) \in (\sigma \Delta \tau)^{-1}$ ανν $(z,x) \in (\sigma \Delta \tau)$ ανν $(z,x) \in \sigma$ $(z,x) \in \tau$ (αποκλειστικά)
είτε είτε

ανν είτε $(x,z) \in \sigma^{-1}$ είτε $(x,z) \in \tau^{-1}$ (αποκλειστικά)
ανν $(x,z) \in \sigma^{-1} \Delta \tau^{-1}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Μια σχέση $\sigma : E \to E$ λέγεται διμελής σχέση

Μια $\sigma : E \to E$ λέγεται <u>ανακλαστική</u> αν $(x,x) \in \sigma$ $\forall x \in E$

(το πεδίο ορισμού είναι ολόκληρο το E)

Μια $\sigma: E \to E$ λέγεται <u>συμμετρική</u> αν $(x,y) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in \sigma$ $\forall x,y \in E$.

Μια $\sigma: E \to E$ λέγεται <u>αντισυμμετρική</u> ανν $(x,y) \in \sigma$ και $(y,x) \in \sigma \Rightarrow x = y$ $\forall x,y \in E$.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Μια σχέση μπορεί να είναι ταυτόχρονα συμμετρική και αντισυμμετρική.

$\boxed{\text{Πχ.}}$ $\Delta = \{(x,x) : x \in E\}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: $\sigma: E \to E$

(i) σ ανακλαστική αν $\Delta \subseteq \sigma$

(ii) σ συμμετρική αν $\sigma = \sigma^{-1}$

(iii) σ αντισυμμετρική αν $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta$

(iv) σ μεταβατική αν $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.

Μια $\sigma: E \to E$ λέγεται <u>μεταβατική</u> αν ισχύει $(x,y) \in \sigma$ και $(y,z) \in \sigma \Rightarrow (x,z) \in \sigma$.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: Για να είναι μια σχέση $\sigma: E \to E$ συγχρόνως συμμετρική και αντισυμμετρική θα πρέπει $\sigma = \sigma^{-1}$ και $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta \Rightarrow \sigma = \sigma^{-1} \subseteq \Delta \Leftrightarrow \boxed{\sigma \subseteq \Delta}$

<u>Ερώτημα</u>: Μια αντισυμμετρική σχέση είναι πάντοτε και ανακλαστική;

Όχι. Αντιπαράδειγμα: $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$

$\sigma = \{(\alpha,\beta), (\gamma,\delta), (\alpha,\varepsilon)\}$

είναι αντισυμμετρική αλλά όχι ανακλαστική.

$\sigma_1 = \{(\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\gamma,\delta), (\alpha,\varepsilon)\} \to$ όχι αντισυμμετρική.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν μια σχέση $\sigma: E \to E$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και αντισυμμετρική τότε ισχύει $\Delta \subseteq \sigma$ και $\sigma \subseteq \Delta$. Άρα $\boxed{\sigma = \Delta}$

(ισχύει και το αντίστροφο).

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 12\}$

η σ δεν είναι ανακλαστική
η σ είναι συμμετρική διότι αν $(x,y) \in \sigma$ τότε $(y,x) \in \sigma$
η σ δεν είναι αντισυμμετρική διότι για $(x,y) = (10,2)$ έχουμε $(x,y) \in \sigma$ και $(y,x) \in \sigma$ και $x \neq y$.
η σ δεν είναι μεταβατική $(x,y) = (3,9) \in \sigma$
$(y,z) = (9,3) \in \sigma$ αλλά $(x,z) = (3,3) \notin \sigma$.

$\sigma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{Z} : x+y = 12k\}$

η σ δεν είναι ανακλαστική.
η σ είναι συμμετρική
η σ δεν είναι αντισυμμετρική
η σ δεν είναι μεταβατική.

*** **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μια σχέση $\sigma: E \to E$ λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $\sigma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y = 12k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

- η σ_2 είναι ανακλαστική
- η σ_2 είναι συμμετρική διότι εάν $(x,y) \in \sigma_2 \Rightarrow x-y = 12k$ $\Rightarrow y-x = 12(-k) \Rightarrow (y,x) \in \sigma_2$
- η σ_2 είναι μεταβατική

έστω $(x,y)\in\sigma_2$ και $(y,z)\in\sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} x-y=12k \\ y-z=12m \end{cases}$ $\oplus$

$x-z=12(m+k) \Rightarrow (x,z)\in\sigma_2$

Άρα η σ_2 είναι σχέση ισοδυναμίας.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Η σ_2 δεν είναι αντισυμμετρική.

$5 \to (5,0)$ $\quad 5=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : (x,y)\sim(5,0)\}$

$5 \to (4,1)$ $\quad$ όπου $\sim$: εννοούμε την παρακάτω

$5 \to (8,3)$ $\quad$ σχ. ισοδυναμίας

$(x,y)\sim(x_1,y_1)$ αν $y+x_1=y_1+x$.

$-5=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : (x,y)\sim(0,5)\}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Δείξτε ότι η "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $E=\mathbb{N}^2$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: • <u>ανακλαστική</u>: $(x,y)\sim(x,y)$ αν $x+y=y+x$ ισχύει

• <u>συμμετρική</u>: ~~[illegible]~~ $(x,y)\sim(z,w) \Rightarrow y+z=x+w$
$\Rightarrow z+y=w+x \Rightarrow (z,w)\sim(x,y)$

• <u>μεταβατική</u>: $\left.\begin{array}{l}(x,y)\sim(z,w)\\(z,w)\sim(a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+w=y+z\\z+b=w+a\end{array}\right\}$

$\Rightarrow x+\cancel{w}+\cancel{z}+b=y+\cancel{z}+\cancel{w}+a \Rightarrow x+b=y+a$
$\Rightarrow (x,y)\sim(a,b)$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Είναι συνηθισμένο στα μαθηματικά να γράφουμε $\gamma\sigma\delta$ αντί του σωστού $(\gamma,\delta)\in\sigma$.

$\gamma \xrightarrow[\sigma]{} \delta$

Σχολιο: συμμετρική $\gamma \underset{}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} \delta$

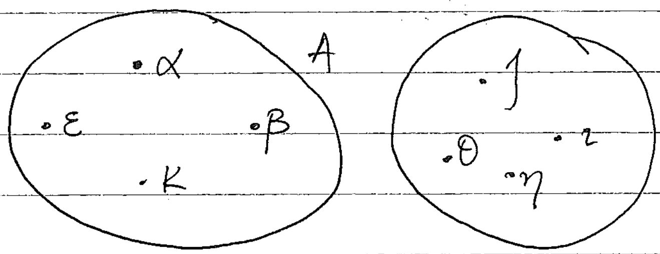
μεταβατική $\gamma \rightarrow \delta \rightarrow \varepsilon$, $\gamma \xrightarrow{\sigma} \varepsilon$

αντισυμμετρική $\gamma \overset{\sigma}{\rightleftarrows} \delta$

| 10/03/15 |

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $\sigma: A \to B$ είναι μια σχέση και $X \subseteq A$, τότε με $\sigma_X : X \to B$, θα συμβολίζουμε τον περιορισμό της σ στο X, δηλαδή $\sigma_X = \sigma \cap (X \times B)$.

$\boxed{\text{Πχ}}$.



$X = \{a, \varepsilon\}$

$\sigma = \{(\alpha,\zeta), (\kappa,\theta), (\varepsilon,\eta), (\varepsilon,\zeta), (\beta,\theta)\}$

$\sigma_X = \{(\alpha,\zeta), (\varepsilon,\eta), (\varepsilon,\zeta)\}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω E ένα σύνολο, τότε κάθε σχέση $\sigma: E \to E$ λέγεται διμελής σχέση.

$\boxed{\text{Πχ}}$ $E = P(\Omega)$ (το δυναμοσύνολο του Ω)

$\subseteq = \{(X,Y) \in E^2 : X \subseteq Y\}$

- ανακλαστική: πρέπει $(X,X) \in \subseteq \ \forall X \in E$ ισχύει
- συμμετρική: δεν είναι συμμετρική για $\Omega \neq \emptyset$, πράγματι $(\emptyset, \Omega) \in \subseteq$, όμως $(\Omega, \emptyset) \notin \subseteq$ άρα δεν είναι συμμετρική.
- αντισυμμετρική: το $(X,Y) \in \subseteq$ και $(Y,X) \in \subseteq$, τότε $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq X$ άρα $X = Y$.
- μεταβατική: το $(X,Y) \in \subseteq$ και $(Y,Z) \in \subseteq$, τότε για να είναι μεταβατική θα πρέπει: $(X,Y) \in \subseteq$.
Έχω $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z \Rightarrow (X,Z) \in \subseteq$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Μια διμελής σχέση $\sigma: E \to E$ θα τη λέμε σχέση διάταξης εαν είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια διμελής σχέση $\sigma: E \to E$ θα τη λέμε σχέση ισοδυναμίας, εαν είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ Η σχέση ισότητας $\Delta = \{(x,x) : x \in E\}$ είναι γνωστή σχέση ισοδυναμίας.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ E το σύνολο των ευθειών του $\mathbb{R}^2$ (ευκλείδιο επίπεδο) $\kappa = \{(x,y) \in E^2 : x \perp y\}$

Η κ δεν είναι ανακλαστική άρα δεν είναι σχέση ισοδυναμίας ούτε σχέση διάταξης.

$\boxed{\text{Π.χ}}$ $\Pi = \{(x,y) \in E^2 : x /\!/ y\}$

Η Π είναι ανακλαστική, είναι συμμετρική διότι αν $x \Pi y \Rightarrow y \Pi x$

Η Π δεν είναι αντισυμμετρική

Η Π είναι μεταβατική διότι αν $x \Pi y$ και $y \Pi z$ τότε $x \Pi z$.

Άρα η Π δεν είναι σχέση διάταξης αλλά είναι σχέση ισοδυναμίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\sim : E \to E$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, με $\sim \neq \phi$. Τότε το σύνολο $\{x \in E : (x,\alpha) \in \sim\}$ ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του $\alpha \in E$ και συμβολίζεται $[\alpha]_\sim$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ διαμερίζει το σύνολο E σε ξένες μεταξύ τους μη κενές κλάσεις και μάλιστα $\forall (\alpha,\beta) \in E^2$ ισχύει
$$\alpha \sim \beta \iff [\alpha]_\sim = [\beta]_\sim$$
$$\alpha \not\sim \beta \iff [\alpha]_\sim \cap [\beta]_\sim = \phi$$

Έστω $\sim : E \to E$ μια σχέση ισοδυναμίας και έστω $[\alpha]_\sim$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του $\alpha \in E$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $\forall x \in E,\ x \in [x]$
(2) Εαν $x \sim y$ τότε και αντίστροφα $[x]_\sim = [y]_\sim$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $x \sim y$ και $z \in [x]_\sim$ άρα $z \sim x$
Όμως $x \sim y$ και άρα $z \sim y$. Άρα $z \in [y]_\sim$
Άρα $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Εύκολα αποδεικνύεται και το αντίστροφο
Δηλαδή $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ και άρα $[x]_\sim = [y]_\sim$.
Αντίστροφα αν $[x]_\sim = [y]_\sim$ τότε $x \in [x]_\sim = [y]_\sim$
δηλ. $x \in [y]_\sim$ και άρα $x \sim y$.

(3) Κάθε 2 κλάσεις είναι είτε ίσες μεταξύ τους είτε ξένες μεταξύ τους.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω ότι $[x]_\sim \neq [y]_\sim$. Έστω $z \in [x]_\sim$ και $z \notin [y]_\sim$. Άρα $z \sim x$ και $z \nsim y$.
Ως άτοπο απαγωγή: Έστω ότι $\exists z' \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$. Άρα $z' \sim x$ και $z' \sim y$. Άρα $z \sim x$, $x \sim z'$, $z' \sim y$ και άρα λόγω μεταβατικής ιδιότητας $z \sim y$. <u>Άτοπο</u>!

(4) Έστω $E/_\sim$ είναι το σύνολο απ' όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας τότε $\dot{\bigcup} E/_\sim = E$.

σύνολο πηλίκο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $x \in \dot{\bigcup} E/_\sim$ άρα $\exists [a]_\sim : x \in [a]$. Άρα $x \in E$

Αντίστροφα, έστω $x \in E \Rightarrow x \in [x]_\sim$ άρα $x \in \dot{\bigcup} E/_\sim$.

$\dot{\bigcup}$ τα στοιχεία του $E/_\sim$ είναι ανά δύο ξένα.

$[\alpha]_\sim$	$[\beta]_\sim$	$[\gamma]_\sim$
$[\delta]_\sim$	...	.

E

π.χ. $E=\mathbb{N}$

$x\sim y$ αν $x-y=9k$, $k\in\mathbb{Z}$.

$E/_\sim=\{[0]_\sim,[1]_\sim,[2]_\sim,\ldots,[8]_\sim\}$

0, 9, ..	1, 10	2, 11
3, 12	4, 13	5, 14
6, 15	7, 16	8, 17

(5) Έστω $\mathcal{C}$ ένα σύνολο από μη κενά υποσύνολα του E (οικογένεια) έτσι ώστε $\bigcup\mathcal{C}=E$ και ανά δύο στοιχεία του $\mathcal{C}$ είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $\dot{\bigcup}\mathcal{C}=E$

$\mathcal{C}=\{C_1,C_2,C_3,C_4,\ldots\}$ τότε $\mathcal{C}$ δεν είναι τυχαίο αλλά κρύβει μια σχέση ισοδυναμίας έστω $\sim$: $E/_\sim=\mathcal{C}$.

C_1	C_2	C_3	C_4

E

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Πράγματι, ορίζουμε $x\sim y$ αν $x,y\in c\in\mathcal{C}$

$x\sim x$ άρα ανακλαστική
αν $x\sim y$ τότε $y\sim x$ άρα συμμετρική
$x\sim y$, $y\sim z$ τότε $x\sim z$ άρα μεταβατική.
(Πράγματι έστω $c\in\mathcal{C}$: $x,y\in c$
έστω $c'\in\mathcal{C}$: $y,z\in c'$
άρα $y\in c$ και $y\in c'$. Άρα $c=c'$ και άρα $x,z\in c$).

Άρα η $x\sim y$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έστω $c\in\mathcal{C}$ και $x\in c$ τότε $[x]_\sim=c$. Άρα, $\mathcal{C}=E/_\sim$.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Έστω $E=\mathbb{N}$ να κατασκευάσετε μια σχέση ισοδυναμίας έτσι ώστε κάθε κλάση ισοδυναμίας να περιέχει 10 ακριβώς στοιχεία.

ΛΥΣΗ: Ορίζουμε $\mathcal{C}=\{c_1, c_2, \dots\}$

$c_1=\{0,\dots,9\}$, $c_2=\{10,\dots,19\}$, ...
οπότε ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x\sim y$ αν $\exists \mu\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x,y\in c_\mu$.
Πχ $1\sim 3$ διότι $1,3\in c_1$.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΗΣ:

Έστω $\leq : E\to E$ μια διμελής σχέση στο E. Τότε αυτή λέγεται σχέση διάταξης στο E αν είναι ταυτόχρονα ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

$\boxed{\text{Πχ}}$ $E=P(\Omega)$ και ορίζουμε $\leq\ =\ \subseteq$ τότε ισχύει
$A\leq A$ $\forall A\in P(\Omega)$. άρα ανακλαστική
$A\leq B$ και $B\leq A$ $\Rightarrow$ $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$ $\Rightarrow$ $B=A$.
άρα αντισυμμετρική
$A\leq B$ και $B\leq \Gamma$ $\Rightarrow$ $A\leq\Gamma$ ισχύει άρα μεταβατική
Άρα είναι σχέση διάταξης.

Παράδειγμα: E = ευθείες του $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$ αν η ε_2 έχει μεγαλύτερη γωνία ως προς τον Ox απ' την ε_1 ή διαφορετικά αν έχουν ίδιες γωνίες τότε η ε_2 τέμνει τον άξονα Ox δεξιότερα της ε_1 ή διαφορετικά αν $\varepsilon_2 // Ox$ η ε_2 τέμνει τον Oy άξονα "πιο πάνω" απ' την ε_1.
Ν.δ.ο. είναι σχέση διάταξης.

1) είναι ανακλαστική
2) είναι αντισυμμετρική
$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$
Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν ίδιες γωνίες.
Υποπερίπτωση 1η : Η γωνία να είναι 0°
Άρα η ε_2 "ψηλότερα" της ε_1 και ε_1 "ψηλότερα" της ε_2. Άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

Υποπερίπτωση 2η : Η γωνία να είναι 90°
Άρα η ε_2 "δεξιότερα" της ε_1 και ε_1 "δεξιότερα" της ε_2. Άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

Υποπερίπτωση 3η : Εάν η ~~κλίση~~ γωνία $\neq 90°, 0°$ τότε $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$
$\Rightarrow \varepsilon_2$ "δεξιότερα" της ε_1 και ε_1 "δεξιότερα" της ε_2
Άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

3) μεταβατική: Έστω $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$ τότε $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$
Περίπτωση 1η : $\varepsilon_1 \not\parallel \varepsilon_2$ οπότε η γωνία της ε_1 είναι $\leq$ της ε_2. οπότε εάν $\varepsilon_2 \not\parallel \varepsilon_3$ τότε η γωνία της $\varepsilon_2 \leq$ της ε_1 άρα $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$.
Στην περίπτωση που $\varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε προφανώς $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$
Περίπτωση 2η : $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ δουλεύουμε παρόμοια

Άρα, σχέση διάταξης.

ΑΣΚΗΣΗ: Ορίζουμε $E = \mathbb{R}^+$, ορίζουμε τη σχέση $\lesssim$ με τον παρακάτω τρόπο $x \lesssim y \Leftrightarrow 3x \leq y$ ή $x = y$.

ΛΥΣΗ: $x \lesssim x$ άρα ανακλαστική
$x \lesssim y$, $y \lesssim x$ άρα $y = x$?

$3x \leq y$ ~~και~~ είτε $x = y$.
$3y \leq x$ είτε $x = y$.

<u>Περίπτωση 1η</u> : $3x \leq y$ και $3y \leq x$
$\Rightarrow x \leq y/3$ και $y \leq x/3$
$\Rightarrow y/3 \leq x/9$ Άρα $x \leq x/9$ ~~άτοπο~~ <u>άτοπ</u>

<u>Περίπτωση 2η</u> : $3x \leq y$ και $x = y \Rightarrow x \leq \frac{y}{3}$ και $y =$
$\Rightarrow y \leq y/3$ <u>άτοπ</u>

Τελικά μένει μόνο $x = y$ αντισυμμετρική.

$x \lesssim y,\ y \lesssim z$ άρα $x \lesssim z$
$(3x \leq y$ ή $x = y)$ και $(3y \leq z$ ή $y = z)$.
$(A \vee B) \wedge (\Gamma \vee \Delta)$
$(A \wedge \Gamma) \vee (A \wedge \Delta) \vee (B \wedge \Gamma) \vee (B \wedge \Delta)$
$3x \leq y$ και $3y \leq z \Rightarrow x \leq y/3$ και $y \leq z/3$
$\Rightarrow x \leq z/9$ Άρα $x \leq z/3 \Rightarrow \boxed{x \lesssim z}$

$x = y$ και $3y \leq z$
$x = y$ και $y \leq z/3 \Rightarrow x \leq z/3$ Άρα $\boxed{x \lesssim z}$

όμοια τα υπόλοιπα.

$E = \mathbb{R}^2$

Ορίζουμε $A \leq B$ αν η ~~τετ~~ τετμημένη $A \leq$ τετμημένη ή αν έχουν τις ίδιες τετμημένες τότε τεταγμένη $A \leq$ τεταγμένη B.

* ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\leq$ μια σχέση διάταξης στο E και $A \subseteq E$. Ορίζουμε $A\Phi_{\leq}(A)$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A δηλαδή $A\Phi_{\leq}(A) = \{x \in E \text{ τ.ω. } \alpha \leq x \ \forall \alpha \in A\}$.

Ορίζουμε $K\Phi_{\leq}(A)$ το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A δηλαδή $K\Phi_{\leq}(A) = \{x \in E \text{ τ.ω. } x \leq \alpha \ \forall \alpha \in A\}$.

$\text{maximal}_{\leq}(A) = \{x \in A : \forall y \in A \ \ y \not> x\}$
(δηλαδή όλα τα στοιχεία του A για τα οποία δεν υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του A αυστηρά μεγαλύτερο από αυτά)

$\text{minimal}_{\leq}(A) = \{x \in A : \forall y \in A \ \ y \not< x\}$
(δηλαδή όλα τα στοιχεία του A για τα οποία δεν υπάρχει κάποιο άλλο στοιχείο του A αυστηρά μικρότερο από αυτά).

17-03-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

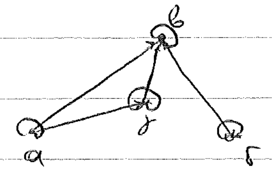
Έστω $\leq : E \to E$ μία διάταξη και $A \subseteq E$ τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση $\leq_A : A \to A$ με ορισμό $\leq_A = \leq \cap (A \times A)$ είναι μία διάταξη στο A και λέγεται ***περιορισμός*** της $\leq$ στο A.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\leq : E \to E$ μία διάταξη του E τότε με $A\phi_{\leq}(A)$ εννοούμε το σύνολο όλο των άνω φραγμένων του A δηλαδή $A\phi_{\leq}(A) = \{x \in E \text{ τ.ω. } x \geq \alpha\} \ \forall \alpha \in A$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\leq = \{(\alpha,\alpha), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta), (\alpha,\gamma), (\delta,\beta), (\alpha,\beta), (\gamma,\beta)\}$

$A = \{\alpha, \gamma, \delta\}$

$A\phi_{\leq}(A) = \{\beta\}$



(*)

$K\phi_{\leq}(A) = \{x \in E \text{ τ.ω. } x \leq \alpha, \forall \alpha \in A\}$

$K\phi_{\leq}(A) = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x \in E$ τότε με Συγκρίσιμα(x) είναι το σύνολο όλων των $y \in E$ έτσι ώστε $y \leq x$ ή $y \geq x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Συγκρ.$(\gamma) = \{\gamma, \alpha, \beta\}$ (*)

ΟΡΙΣΜΟΣ: $Maximal(A) = \{y \in A : \nexists \ x \in A \ x > y\}$ (ψευδομέγιστα)

$Minimal(A) = \{y \in A : \nexists \ x \in A \ x < y\}$ (ψευδοελάχιστα)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $Maximal(A) = \{\delta, \gamma\}$ (*)

$Minimal(A) = \{\delta, \alpha\}$

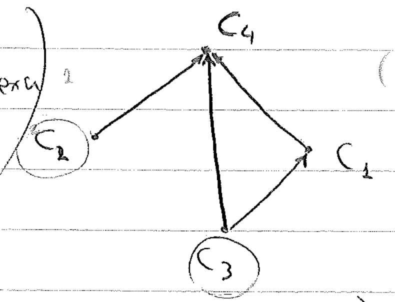
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $E = \{\overset{c_1}{\{\alpha,\beta\}}, \overset{c_2}{\{\gamma,\delta\}}, \overset{c_3}{\{\beta\}}, \overset{c_4}{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}}\}$ Θεωρούμε τη διάταξη

$\leq =$ σχέση $\subseteq$ $A = \{\{\gamma,\delta\}, \{\beta\}\}$

$A\phi_{\leq}(A) = \{c_4\}$

$K\phi_{\leq}(A) = \emptyset$

$\left(\begin{array}{l} Min(E) = \text{δεν υπάρχει} \\ Max(E) = c_4 \end{array}\right)$



$Maximal(A) = \{c_2, c_3\}$

$Minimal(A) = \{c_2, c_3\}$

$\left(\begin{array}{l} Min(A) = \text{δεν υπάρχει} \\ Max(A) = \text{δεν υπάρχει} \end{array}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ ~~ΟΡΙΣΜΟΣ~~: Δείξτε ότι αν $A \cap A\phi_{\leq}(A)$ είναι μη κενό τότε είναι μονοσύνολο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $x, y \in A \cap A\phi_{\leq}(A)$. Άρα $x \in A \cap A\phi_{\leq}(A) \Rightarrow x \in A$ και $x \in A\phi_{\leq}(A)$ $(**)$

$y \in A \cap A\phi_{\leq}(A) \Rightarrow y \in A$ και $y \in A\phi_{\leq}(A)$ $(*)$

$$\left.\begin{array}{ll} (*) \text{ Άρα} & x \leq y \\ (**) & y \leq x \end{array}\right\} x = y.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το μοναδικό στοιχείο της $A \cap A\phi_{\leq}(A)$ ονομάζεται $Max(A)$. Δηλαδή $Max(A) \in A$, $A \leq Max(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το μοναδικό στοιχείο της $A \cap K\phi_{\leq}(A)$ ονομάζεται $Min(A)$. Δηλαδή $Min(A) \in A$, $A \geq Min(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ότι $A\phi_{\leq}(A) \neq \emptyset$ και $\exists\, Min(A\phi_{\leq}(A))$ τότε αυτό ονομάζεται $sup_{\leq}(A)$ (άνω πέρας του A).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ότι $K\phi_{\leq}(A) \neq \emptyset$ και $\exists\, max(K\phi_{\leq}(A))$ τότε αυτό ονομάζεται $inf_{\leq}(A)$ (κάτω πέρας του A).

Στο παράδειγμα: $A\phi_{\leq}(A) = \{c_4\} \Rightarrow sup_{\leq}(A) = c_4$

$K\phi_{\leq}(A) = \emptyset \Rightarrow inf_{\leq}(A)$ δεν υπάρχει.

ΣΧΟΛΙΟ: Εάν έχουμε ότι $A\phi_{\leq}(A) \neq \emptyset$ και $\beta \in E$ έτσι ώστε $A \leq \beta \leq A\phi_{\leq}(A)$ τότε προφανώς $\beta = sup_{\leq}(A)$.

ΣΧΟΛΙΟ: . . . . . . $K\phi_{\leq}(A) \neq \emptyset$ και $\beta \in E$ . . . . $A \geq \beta \geq K\phi_{\leq}(A)$ τότε . . . . $\beta = inf_{\leq}(A)$

20-03-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Υπενθύμιση: "SOS"
Έστω E ένα διατεταγμένο σύνολο με διάταξη $\leqslant$ και $A\subseteq E$ το $\exists\, a\leqslant A,\ a\in A$ ανν $a=\min_{\leqslant}A$.
Όμοια $\exists\, A\leqslant b,\ b\in A$ ανν $b=\max_{\leqslant}A$

Υπενθύμιση: $\exists b:\ A\leqslant b\leqslant A\phi_{\leqslant}(A)\iff b=\sup_{\leqslant}A$
Όμοια. $\exists b:\ K\phi_{\leqslant}(A)\leqslant b\leqslant A\iff b=\inf_{\leqslant}A$

Προφάσεις. Σχέσεις.

Τα $K\phi_{\leqslant}(A)\leqslant A\leqslant A\phi_{\leqslant}(A)$ (Αν $\exists$ τα $K\phi_{\leqslant}(A),A\phi_{\leqslant}(A)$)
Όμοια τα $A\phi_{\leqslant}(K\phi_{\leqslant}(A))\supseteq A\phi_{\leqslant}(A)\supseteq A$
και τα $K\phi_{\leqslant}(A\phi_{\leqslant}(A))\supseteq A$

Παράδειγμα: Έστω $x\in A$ Θα αποδείξουμε ότι $x\in K\phi_{\leqslant}(A\phi_{\leqslant}(A))$
Αφού $x\in A\implies x\leqslant A\phi_{\leqslant}(A)\implies x\in K\phi_{\leqslant}(A\phi_{\leqslant}(A))$

Χρήσιμες Προτάσεις Για Τα: $\sup_{\leqslant}A,\max_{\leqslant}A,\inf_{\leqslant}A,\min_{\leqslant}A$.

Πρόταση 1: Αν $\exists$ τα $\sup_{\leqslant}A,\max_{\leqslant}A$ συγχρόνως τότε είναι ίσα.
Όμοια τα $\inf_{\leqslant}A,\min_{\leqslant}A$ είναι ίσα.

Πρόταση 2: Αν $\exists\max_{\leqslant}A$ τότε αναγκαστικά υπάρχει $\sup_{\leqslant}A$ και μάλιστα $\max_{\leqslant}A=\sup_{\leqslant}A$
Όμοια: Αν $\exists\min_{\leqslant}A$ τότε αναγκαστικά υπάρχει $\inf_{\leqslant}A$ και μάλιστα $\min_{\leqslant}A=\inf_{\leqslant}A$.

Πρόταση 3. Αν $\exists\sup_{\leqslant}A$ και $\sup_{\leqslant}A\in A$ τότε αναγκαστικά υπάρχει $\max_{\leqslant}A$ και από πρόταση 1 $\sup_{\leqslant}A=\max_{\leqslant}A$.
Όμοια Αν $\exists\inf_{\leqslant}A$ και $\inf_{\leqslant}A\in A$ τότε αναγκαστικά υπάρχει $\min_{\leqslant}A$ και από πρόταση 1 $\inf_{\leqslant}A=\min_{\leqslant}A$.

Άσκηση: Βρείτε κάποια E, A και μία διάταξη $\preccurlyeq$ στο E τέτοια ώστε το $\sup_\preccurlyeq A$ να υπάρχει και να μην υπάρχει το $\max_\preccurlyeq A$.

Λύση: Θα βρούμε κάποιο A έτσι ώστε $\sup_\preccurlyeq A \notin A$.
$E = \mathbb{R}$ έστω $A = (0,1)$ $\preccurlyeq$ = η συνήθης διάταξη $\leq$ στους πραγματικούς.

Το $A \preccurlyeq 3$

$A \preccurlyeq 1 \overset{?}{\preccurlyeq} A\phi_\preccurlyeq(A)$

Έστω $d \leq 1$ και $d \neq 1$ και $d \in A\phi_\preccurlyeq(A)$.
Έστω $d' = \frac{d+1}{2}$, $d' > d$
Έχουμε $d' < 1$ διότι $\frac{d+1}{2} < 1 \iff d < 1$ που ισχύει
Άρα το $d' \in A \Rightarrow d' \leq d$
Άρα $d' = d$. Άτοπο!
Άρα ισχύει $A \leq 1 \leq A\phi_\preccurlyeq(A)$. Άρα $\sup A = 1$
και $1 \notin A$ άρα $\nexists \max A$.

Απόδειξη Πρότασης 2: Έστω $\alpha = \max_\preccurlyeq A \Rightarrow A \preccurlyeq \alpha$, $\alpha \in A$.
Θα δείξουμε ότι $A \preccurlyeq \underbrace{\alpha \preccurlyeq A\phi_\preccurlyeq(A)}$
Έστω $x \in A\phi_\preccurlyeq(A) \Rightarrow \forall \beta \in A$ ισχύει $\beta \preccurlyeq x \Rightarrow \max_\preccurlyeq A \preccurlyeq x$
όπου x τυχαίο του $A\phi_\preccurlyeq(A)$.
Άρα δείξαμε ότι $\max_\preccurlyeq A \preccurlyeq A\phi_\preccurlyeq(A)$ και άρα δείξαμε
ότι: $A \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq A\phi_\preccurlyeq(A) \Rightarrow \alpha = \sup_\preccurlyeq A \Rightarrow \max_\preccurlyeq A = \sup_\preccurlyeq A$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $\alpha \in E$ είναι ψευδομέγιστο στοιχείο του E (δηλαδή $\alpha \in maximal(E)$) αν και μόνο αν $\alpha = \max$ Συγκρίσιμα(α).

Υπενθύμιση: Συγκρίσιμα$(\alpha) = \{x \in E : x \preccurlyeq \alpha$ ή $\alpha \preccurlyeq x\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\alpha \in maximal(E) \Rightarrow \alpha \in E$, δεν υπάρχει διαφορετικό στοιχείο $x \in E$ μεγαλύτερο από αυτό.
Θα δείξουμε ότι Συγκρίσιμα$(\alpha) \leqslant \alpha$ και $\alpha \in$ Συγκρίσιμα(α)
προφανές.

Έστω ότι δεν ισχύει Συγκρίσιμα$(\alpha) \leqslant \alpha$ άρα υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in$ Συγκρίσιμα(α) με $x \not\leqslant \alpha$ άρα αναγκαστικά $\alpha \leqslant x$ άρα $\alpha < x$ Άτοπο!
Άρα τελικά $\alpha = max$ Συγκρίσιμα(α).
Όμοια αποδεικνύουμε και την αντίστροφη συνεπαγωγή.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια διάταξη $\leqslant$ του E λέγεται ολική ή γραμμική διάταξη ανν κάθε δύο στοιχεία του E είναι συγκρίσιμα

Π.χ. $E = \mathbb{N}$ $\leqslant$ = η συνήθης διάταξη $\leqslant$
$E = \mathbb{N}$ και $\leqslant$ ορίζεται ως: $x \leqslant y$ ανν $x | y$
για $x = 2$ και $y = 3$ τα x, y δεν είναι συγκρίσιμα
άρα $\leqslant$: όχι ολική.

Π.χ. Έστω $\underline{\Omega}$ περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία και $E = P(\underline{\Omega})$ και $\leqslant$ = η σχέση $\subseteq$.
Έστω $\alpha \in \underline{\Omega}$, $\beta \in \underline{\Omega}$ έχουμε $\{\alpha\} \in E$ και $\{\beta\} \in E$.
αυτά δεν είναι συγκρίσιμα άρα η $\leqslant$ δεν είναι ολική.

ΑΣΚΗΣΗ:

$maximal(E)$ — $x \in E$ τέτοιο ώστε $\nexists y > x$. Έχουμε ότι το $\underline{\Omega} \in maximal(E)$. $maximal(E) = \{\underline{\Omega}\}$

$maximal(\{\emptyset\})$ — $maximal\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

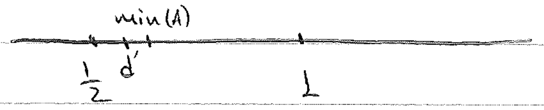
$minimal(E)$ — Ψάχνουμε $x \in E$ έτσι ώστε $\nexists y < x$.
Δηλαδή ψάχνουμε $x \subseteq \underline{\Omega}$ έτσι ώστε $\nexists y \subset x$. $\{\emptyset\} \in minimal(E)$.
$\{\emptyset\} = minimal(\{\emptyset\})$

Σχολιο: Εαν $A=\{a\}$ τότε $maximal(A) = minimal(A) = \{a\}$.

Ορισμος: Έστω E ένα διατεταγμένο σύνολο με διάταξη $\preccurlyeq$, τότε το E θα λέγεται καλά διατεταγμένο, εαν κάθε μη κενό υποσύνολο του E έχει $min(A)$.

π.χ. $E = [0,1]$ και $\preccurlyeq$ = η συνήθης διάταξη στους πραγματικούς.
$A = (\frac{1}{2}, 1]$ τότε το A δεν έχει $min(A)$ άρα το E δεν είναι καλά διατεταγμένο.

Σχολιο: Εαν είχε $min(A)$ τότε $min(A) \in A$. Άρα θα πρέπει $min(A) > \frac{1}{2}$



Έστω $d' = \frac{\frac{1}{2} + min(A)}{2}$ έχουμε $d' > \frac{1}{2}$ και $d' < min(A)$.

Άρα $d' \in A$ και $d' < min(A)$ Άτοπο!

π.χ. $E = \mathbb{N}$ και $\preccurlyeq$ = η συνήθης διάταξη $\leq$.
η E είναι καλά διατεταγμένο.

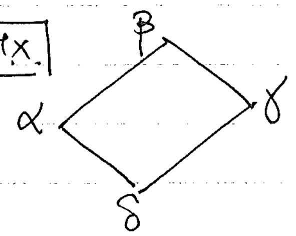
$E = \mathbb{N}$ και $\preccurlyeq$ η διάταξη: $x \leq y \Leftrightarrow x \mid y$
$A = \{2,3\}$ δεν υπάρχει $min(A)$ άρα δεν είναι καλά διατεταγμένο.

Προταση: Αν E καλά διατεταγμένο τότε το E είναι αναγκαστικά ολικά διατεταγμένο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

24/03/15 20.3

Γραμμική διάταξη
Καλή διάταξη έπεται ότι
Εάν κορεσμένη τότε δεν είναι καλή ή γραμμική.

Πχ.



$\delta \le \alpha \le \beta$
$\delta \le \gamma \le \beta$

είναι κορεσμένο διότι κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο A του $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ έχει supA

για $A = \{\alpha, \gamma\}$, $\sup A = \beta$.
Δεν είναι καλά διατεταγμένο, μέσω της "$\le$", διότι αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δεν έχει minA.
Επίσης δεν είναι ολικά διατεταγμένο.
αν $A = \{\alpha, \gamma\}$ το α με το γ δεν συγκρίνονται.

// Εάν είναι καλή έπεται ότι είναι κορεσμένη.

ΑΠΟΔ. Έστω $A \subseteq E$ άνω φραγμένο. Θα δείξουμε ότι $\exists \sup A = \min A\Phi(A)$.
από την υπόθεση $A\Phi(A) \neq \emptyset$ άρα αφού καλή
$\exists \min A\Phi(A) = \sup A$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πχ. Έστω $E = \mathbb{R}$, $\le$: η συνήθης διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς.
$A = (0,1)$ τότε
• $\inf A = 0 \notin A$ και A δεν έχει min, άρα E όχι καλά διατεταγμένο.

// Εάν η διάταξη είναι ολική δεν έπεται ότι είναι κορεσμένη.

Πχ. $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\le$: η συνήθης διάταξη.
τότε E όχι κορεσμένο διότι
$A = (-1, 0)$ το A είναι άνω φραγμένο. Όμως δεν έχει supremum στο E.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $A \subseteq E$ και E καλά διατεταγμένο μέσω $\leq$ τότε και το A είναι καλά διατεταγμένο μέσω του περιορισμού $\leq_A$: ~~[illegible]~~ $= \leq \cap (A \times A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $B \subseteq A$, $B \neq \phi$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists \min_{\leq_A}(B)$

Έχουμε $B \subseteq E$ άρα υπάρχει $\min_{\leq} B = \gamma$ άρα $\gamma \leq B$ δηλαδή $\gamma \leq$ από κάθε στοιχείο του B.
Και $\gamma \in B$, έχουμε προφανώς $\gamma \leq_A B$ και $\gamma \in B$ άρα $\gamma = \min_{\leq_A} B$

ΣΧΟΛΙΟ: Η προηγούμενη ~~[illegible]~~ πρόταση δεν ισχύει αν αντί για καλή διάταξη έχουμε κορεσμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Υπερπεπερασμένη Επαγωγή): Έστω $E \neq \phi$ καλά διατεταγμένο μέσω της $\leq$ τότε εαν P είναι ένας προτασιακός τύπος και μας ζητάνε να δείξουμε ότι αληθεύει το $p(x)$ $\forall x \in E$ τότε μπορούμε να το αποδείξουμε με τη μέθοδο της υπερπεπερασμένης επαγωγής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Υποθέτουμε ότι $\boxed{\forall y < x \text{ ισχύει } p(y)}$. Θα δείξουμε ότι με χρήση την υπόθεση αληθεύει το $p(x)$.
(δεν προλαβαίνουμε!).

$\boxed{\text{π.χ}}$ $E = \mathbb{N}$, $\leq$: η συνήθης διάταξη. Το E είναι καλά διατεταγμένο. Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $2n \geq n + 1$.
Έστω $x \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\forall y < x$ ισχύει $2y \geq y + 1$
Θα δείξουμε ότι $p(x)$: $2x \geq x + 1$ αληθεύει.

για $y = x-1$ έστω $p(y)$: $2(x-1) \geq (x-1)+1$

$$\Leftrightarrow 2x-2 \geq x - \cancel{1} + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq x+2 \geq x+1.$$

Άρα από το σχήμα της υπερπεπερασμένης επαγωγής έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$. ισχύει $2n \geq n+1$.

Θα δείξουμε ότι $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \leq 1$ χρησιμοποιώντας την υπερπεπερασμένη επαγωγή.

ΛΥΣΗ: Υποθέτουμε ότι $\forall y < x$, $y \leq 1$ και θα δείξουμε ότι $x \leq 1$.

Έστω $x > 1$ και $y = \frac{1+x}{2}$

Άρα απο επαγωγική υπόθεση έχουμε $y \leq 1$

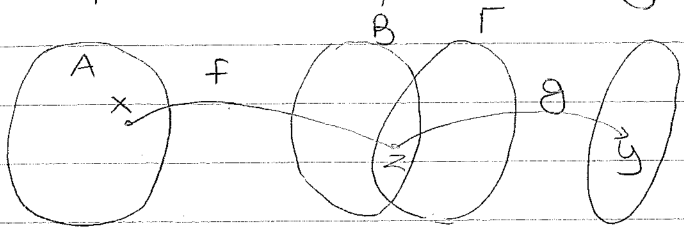
$\Leftrightarrow \frac{1+x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 1+x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$ άτοπο.

Άρα $x \leq 1$.

Λάθος $\rightarrow$ το $\mathbb{R}$ δεν είναι καλά διατεταγμένο.

27/4/15
ΣΘΣ

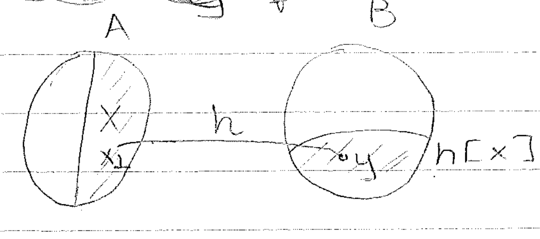
Έστω $f \in B^A$ και $g \in \Delta^\Gamma$ τότε με $g \circ f$ συμβολίζουμε τη σύνθεση των συναρτήσεων g, f



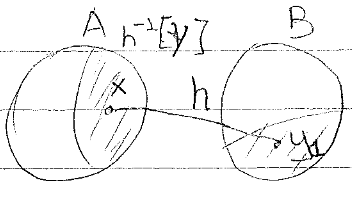
Ορίζουμε $g \circ f(x) = y \iff \exists z \in (B \cap \Gamma)$ $f(x) = z$ και $g(z) = y$

Σχόλιο: Με $h: A \to B$ εννοούμε γενικά μια οποιαδήποτε σχέση $h \subseteq A \times B$
Όμως με $h \in B^A$ εννοούμε πάντα μια συνάρτηση $A \to B$ με $D(h) = A$

Ορισμός: Έστω $h: A \to B$ και $X \subseteq A$ τότε η εικόνα του X μέσω της h είναι το σύνολο $h[X] = \{y \in B : \exists x_1 \in X \ x_1 h y\}$



Έστω $Y \subseteq B$ τότε η αντίστροφη εικόνα του Y μέσω της h είναι το σύνολο $h^{-1}[Y] = \{x \in A : \exists y_1 \in Y \ x h y_1\}$



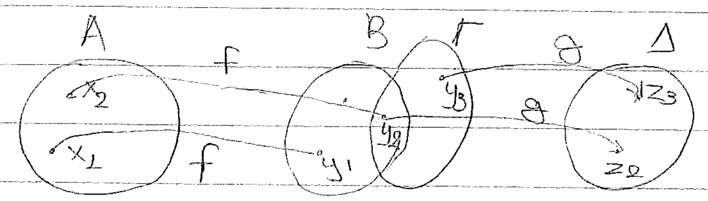
Το $D(g \circ f) = f^{-1}[\Gamma] = f^{-1}[D(g)]$
Σχόλιο: Εάν f, g είναι συναρτήσεις τότε και η σύνθεση

gof είναι συνάρτηση.

Σχόλιο: Αν f, g είναι "1-1" συναρτήσεις τότε και η σύνθεση gof είναι "1-1" συνάρτηση.

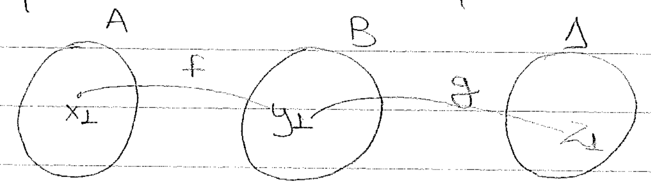
Σχόλιο: Αν η f, g είναι δύο "επί" συναρτήσεις επί του B και του Δ αντίστοιχα τότε δεν έπεται ότι η σύνθεση gof είναι επί του Δ.

π.χ.



$D(g\circ f)=\{x_2\}$ οπότε $R(g\circ f)=\{g\circ f(x_2)\}=\{z_2\}\neq \Delta$

Σχόλιο: Έστω $f\in B^A$ και $g\in \Delta^B$ δύο "επί" συναρτήσεις επί του B και Δ αντίστοιχα. Τότε είναι σχεδόν προφανές ότι και η σύνθεση gof είναι "επί" συνάρτηση.

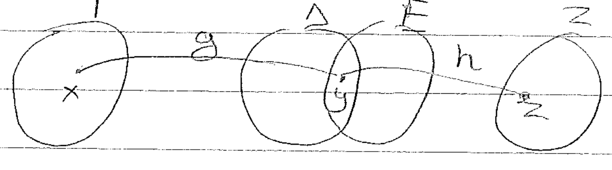


Σχόλιο: Τα παρακάτω ισχύουν για οποιεσδήποτε σχέσεις $f: A\to B$, $g: \Gamma\to\Delta$ και $h: E\to Z$ τότε

a) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

β) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Ορισμός σύνθεσης σχέσεων $h\circ g$



$x\, h\circ g\, z \iff \exists\, y,\ y\in(\Delta\cap E)$ και xgy και yhz

Παρατήρηση: Εάν g, f είναι συναρτήσεις τότε βέβαια

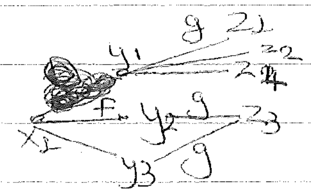
(2)

η gof είναι συνάρτηση. Όμως δεν αποκλείεται η f^{-1}, g^{-1}, $(gof)^{-1}$ να μην είναι συναρτήσεις.

Πρόταση: Έστω $f \in B^A$ τότε η $f^{-1} \in A^B \Leftrightarrow$ η f είναι "1-1" και "επί" του B) Έστω $f \in B^A$ και $g \in \Gamma^B$ τότε $(gof)^{-1}$ είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow$ gof είναι "1-1" και "επί" του Γ.

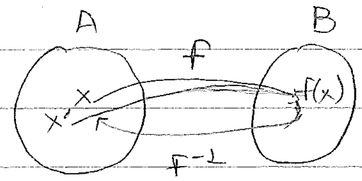
Σχόλιο: Για να κατορθώσουμε η gof να είναι "1-1" θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε ότι η f είναι "1-1" και η g είναι "1-1". Για να κατορθώσουμε η gof να είναι "επί" του Γ θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε ότι η f είναι "επί" του B και η g "επί" του Γ.

Σχόλιο: Η σύνθεση δύο σχέσεων που δεν είναι συναρτήσεις μπορεί να είναι συνάρτηση.
π.χ. $A=\{x_1\}$, $B=\{y_1, y_2, y_3\}$, $\Gamma=\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

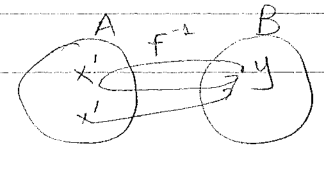


Η f δεν είναι συνάρτηση
Η g δεν είναι συνάρτηση
Η gof είναι συνάρτηση

Άσκηση: Έστω $f \in B^A$ και id_A ονομάζουμε την ταυτοτική στο A και με id_B ονομάζουμε την ταυτοτική στο B. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;
i) $f o f^{-1} = Id_B$, ii) $f^{-1} o f = Id_A$
Εάν νομίζετε ότι κάποια από αυτές δεν ισχύει τι θα μπορούσατε επιπλέον να υποθέσετε έτσι ώστε να ισχύει;



$x \to f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$, $x' \to$, x' άρα δεν ισχύει το ii)



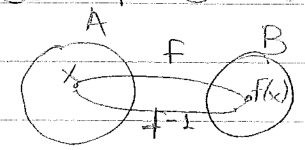
$y \, f^{-1} \, x$ άρα $f(x) = y$
$y \, f^{-1} \, x'$ άρα $f(x') = y$
δεν ισχύει η i)

Αποδ ~~......~~ Ισχύει $f \circ f^{-1} = Id_B$ όταν η f είναι επί του B.

Έστω $y \in B$ τότε αφού η f είναι "επί" του B έχουμε ότι $f^{-1}[\{y\}] \subseteq A$ και αποτελείται από όλα τα στοιχεία $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ τότε προφανώς ισχύει $y \, f \circ f^{-1} y$ δηλ. $f \circ f^{-1} = Id_B$

Για να ισχύει $f^{-1} \circ f = Id_A$ θα πρέπει να υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι "1-1".

Αποδ: Έστω $x \in A$ το $f(x) \in B$ το $f^{-1}[\{f(x)\}] = x$ και άρα $f^{-1} \circ f = Id_A$



Άσκηση: Έστω $f \in A^B$ να βρεθούν τα $f[\emptyset]$ και $f^{-1}[\emptyset]$

$f[\emptyset] = \{ y \in A : \underbrace{\exists x_1 \in \emptyset : f(x_1) = y}_{\psi} \} = \emptyset$

$f^{-1}[\emptyset] = \{ x \in B : \underbrace{\exists y_1 \in \emptyset}_{\psi} : f(x_1) = y_1 \} = \emptyset$

$f^{-1}(A) = B$

Ιδιότητες των εικόνων και των αντίστροφων εικόνων

(Έστω $f \in B^A$)

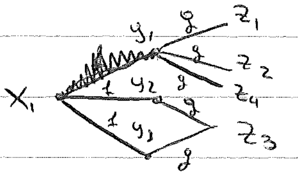
1) Αν $X \subseteq Y \subseteq A$ τότε $f[X] \subseteq f[Y]$ διότι είναι σύνολα
2) $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$
(3) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$
(4) $f[X - Y] \supseteq f[X] - f[Y]$
(5) $Z \subseteq E \subseteq B$ τότε $f^{-1}[Z] \subseteq f^{-1}[E]$
(6) $f^{-1}[Z \cap E] = f^{-1}[Z] \cap f^{-1}[E]$
(7) $f^{-1}[Z \cup E] = f^{-1}[Z] \cup f^{-1}[E]$
(8) $f^{-1}[Z - E] = f^{-1}[Z] - f^{-1}[E]$

27-04-15
2η ώρα

Στοιχειώδης θεωρία Συνόλων

Σχόλιο: Η σύνθεση δύο σχέσεων που δεν είναι συναρτήσεις μπορεί να είναι συνάρτηση.

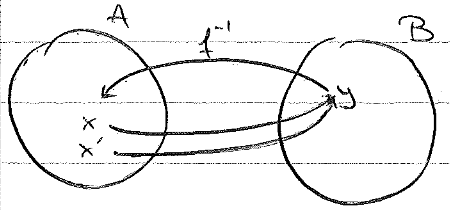
Π.χ. $A = \{x_1\}$
$B = \{y_1, y_2, y_3\}$
$\Gamma = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

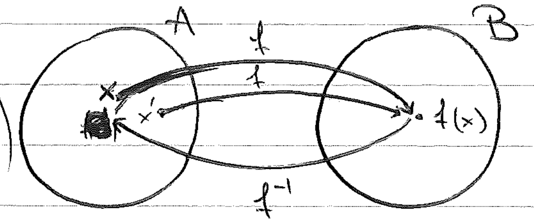


$g \circ f$ είναι συνάρτηση!

Η f δεν είναι συνάρτηση
Η g δεν είναι συνάρτηση
Η $g \circ f$ είναι συνάρτηση

Άσκηση: Έστω $f \in B^A$ και Id_A ονομάζουμε την ταυτοτική στο A και με Id_B ονομάζουμε την ταυτοτική στο B. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές?
i) $f \circ f^{-1} = Id_B$, ii) $f^{-1} \circ f = Id_A$
Εάν νομίζετε ότι κάποια από αυτές δεν ισχύει τι θα μπορούσατε επιπλέον να υποθέσετε έτσι ώστε να ισχύει;

i) 

ii) 

$y f^{-1} x$ άρα $f(x) = y$
$y f^{-1} x'$ άρα $f(x') = y$
⋮

$x \to f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$
$x' \nearrow \qquad \searrow x'$

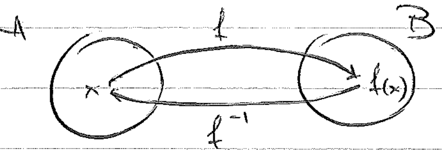
ισχύει ότι $f \circ f^{-1} = Id_B$ όταν η f είναι επί του B.

Απ. i) Έστω $y \in B$ οπότε αφού η f είναι επί του B έχουμε ότι $f^{-1}[\{y\}] \subseteq A$ και αποτελείται απ' όλα τα στοιχεία $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Τότε

Προφανώς ισχύει $y f\circ f^{-1} y$ ~~δηλ~~ δηλαδή $f\circ f^{-1} = Id_B$

ii) Ισχύει ότι $f^{-1}\circ f = Id_A$ εαν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι "1-1".

Απ.: Έστω $x\in A$ το $f(x)\in B$ $f^{-1}\boxed{[\{f(x)\}]} = x$ και άρα $f^{-1}\circ f = Id_A$



Άσκηση: Έστω $f\in A^B$ να βρεθούν τα $f[\emptyset]$ και $f^{-1}[\emptyset]$

$$f[\emptyset] = \{y\in A : \underbrace{\exists x_1\in\emptyset ,\ f(x_1)=y}_{\psi}\} = \emptyset$$

$$f^{-1}[\emptyset] = \{x\in B : \underbrace{\exists y_1\in\emptyset : f(x)=y_1}_{\psi}\} = \emptyset$$

$$f^{-1}[A] = B$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΙΚΟΝΩΝ.
(έστω $f\in B^A$).

(1) Αν $X\subseteq Y\subseteq A$ τότε $f[X]\subseteq f[Y]$

(2) $f[X\cap Y]\subseteq f[X]\cap f[Y]$

(3) $f[X\cup Y] = f[X]\cup f[Y]$

(4) $f[X - Y]\supseteq f[X] - f[Y]$

(5) $Z\subseteq E\subseteq B$ τότε $f^{-1}[Z]\subseteq f^{-1}[E]$

(6) $f^{-1}[Z\cap E] = f^{-1}[Z]\cap f^{-1}[E]$

(7) $f^{-1}[Z\cup E] = f^{-1}[Z]\cup f^{-1}[E]$

(8) $f^{-1}[Z - E] = f^{-1}[Z] - f^{-1}[E]$

Οι (6),(7),(8) ισχύουν για οποιαδήποτε Z, E υποσυν. του B

Οι (2),(3),(4) ισχύουν για οποιαδήποτε υποσύνολα X, Y του A.

Σχολιο: Εαν απαιτήσουμε να ισχύει η ισότητα $\forall x, y \in A$ $f[x-y] = f[x] - f[y]$ θα πρέπει να απαιτήσουμε η f να είναι "1-1" και αντίστροφα.

28-04-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων.

Τυπολόγιο για εικόνες και αντίστροφες

Έστω $f \in B^A$ τότε ισχύουν:

1) $X \subseteq Y \subseteq A$ τότε $f[X] \subseteq f[Y]$
2) $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$
3) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$
4) $f[X \setminus Y] \supseteq f[X] \setminus f[Y]$

Απόδειξη 2) $z \in f[X \cap Y]$ $\exists x \in X \cap Y$:
$f(x) = z \Rightarrow \exists x \in X$ $f(x) = z$, $\exists x \in Y$ $f(x) = z$
δηλαδή $z \in f[X]$, $z \in f[Y] \Rightarrow$
$\Rightarrow z \in f[X] \cap f[Y]$

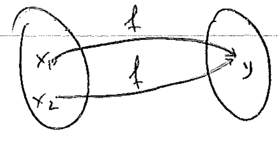
Ερώτημα: Για ποια f ισχύει:
$f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$, $\forall X, Y \subseteq A$?

Απ: Η f πρέπει να είναι "1-1" συνάρτηση.

Αποδ: Έστω f "1-1" αρκεί $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$
Έστω $z \in f[X] \cap f[Y] \Rightarrow z \in f[X]$ και $z \in f[Y]$
$\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = z$ και $\exists x' \in Y : f(x'') = z$
$\Rightarrow f(x) = f(x') \xRightarrow{\text{"1-1"}} x = x' \Rightarrow x \in X \cap Y$.
$\Rightarrow z \in f[X \cap Y]$.

Αντίστροφος
Έστω ότι $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$ $\forall X, Y \subseteq A$
να δείξω ότι f "1-1".

εις άτοπο $\rightarrow$: Έστω ότι δεν είναι "1-1", άρα $\exists x_1 \neq x_2$:
$f(x_1) = f(x_2)$



Έστω $\left.\begin{array}{l} X=\{x_1\} \\ Y=\{x_2\} \end{array}\right\} \to X\cap Y=\phi$ άρα $f[X\cap Y]=0$

$f[X]=\{y\}=f[Y]$ άρα
$f[X]\cap f[Y]=\{y\}$ Άτοπο διότι $\{y\}\neq\phi$.

Για να ισχύει στη 4) η ισότητα θα πρέπει η f να είναι "1-1".

<u>Τυπολόγιο για τις αντίστροφες εικόνες</u>

Έστω $f\in B^A$ τότε ισχύουν:

I) $Z\subseteq E\subseteq B \Rightarrow f^{-1}[Z]\subseteq f^{-1}[E]$

II) $f^{-1}[Z\cap E]=f^{-1}[Z]\cap f^{-1}[E]$

III) $f^{-1}[Z\cup E]=f^{-1}[Z]\cup f^{-1}[E]$

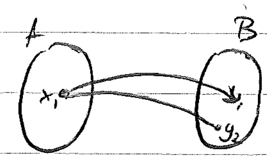
IV) $f^{-1}[Z\setminus E]=f^{-1}[Z]\setminus f^{-1}[E]$

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ:</u> Έστω η f δεν ήταν συνάρτηση, αλλά απλά μια σχέση $f:A\to B$ με $D(f)=A$ θα ήταν σωστές οι παραπάνω ισότητες?

<u>Απ:</u> Η II ισχύει $\Longleftrightarrow$ f συνάρτηση
Όμοια για την IV.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ II)</u> Έστω ότι ισχύει η II και θα δείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση

$\xrightarrow{\text{ας άτοπο}}$ Έστω f όχι συνάρτηση



Έστω $Z=\{y_1\}$ $\quad Z\cap E=\phi$
$E=\{y_2\}$ $\quad$ άρα $f[Z\cap E]=0$
και $f^{-1}[Z]=\{x_1\}=f^{-1}[E] \Rightarrow f^{-1}[Z]\cap f^{-1}[E]=\{x_1\}\neq\phi$ Άτοπο.

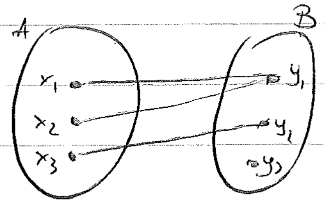
<u>ΕΡΩΤΗΜΑ:</u> Υπάρχουν συνθήκες που να αναγκάζουν την $f\in B^A$

να είναι επί του B

Απ: Ναι. Όπως οι παρακάτω συνθήκες:

α) είτε $\forall X \subseteq A \quad f[A \setminus X] \supseteq B \setminus f[X]$
β) είτε $\forall Y \subseteq B \quad f[f^{-1}[Y]] = Y$

Απόδ. β) Εις άτοπο: Έστω f όχι επί του B



Έστω $Y = \{y_3\}$
$f^{-1}[Y] = \phi \Rightarrow f[f^{-1}[Y]] = \phi \neq Y$ Άτοπο!

Ασκηση: i) Από το α) ν.δ.ο. η f είναι επί

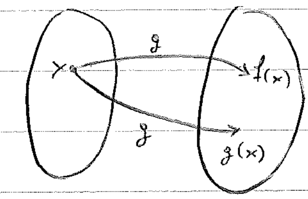
ii) Αν f "επί" του B, τότε ισχύει και το α) και το β)
iii) f "1-1" $\Leftrightarrow \forall X \subseteq A \quad f[A \setminus X] = B \setminus f[X]$
iv) f "1-1" και "επί" $\Leftrightarrow \forall X \subseteq A$,
$f[A \setminus X] = B \setminus f[X]$.

04-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων.

Άσκηση 1: Δείξτε ότι αν f,g είναι δύο μη κενές συναρτήσεις με $f \subseteq g$ τότε αναγκαστικά είναι ίσες.

Λύση: Έστω $f \neq g$ άρα $\exists x$ τ.ω. $f(x) \neq g(x)$
$(x, f(x)) \neq (x, g(x))$ έχουμε $(x, f(x)) \in f$ άρα
$(x, f(x)) \in g$ αφού $f \subseteq g$ Άτοπο!
Διότι $(x, f(x)) \in g$ και $(x, g(x)) \in g$
και άρα η g δεν είναι συνάρτηση
(ενώ είναι).

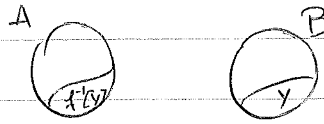


Άσκηση 2: Έστω $f \in B^A$ και $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$ ποιες από τις παρακάτω σχέσεις ισχύουν?

i) $f[X \cap f^{-1}[Y]] = f[X] \cap Y$ ✓
ii) $f[f^{-1}[Y]] = Y$ ✗ (ισχύει μόνο αν η f είναι "επί" του B)
iii) $f^{-1}[f[X] \cap Y] = X \cap f^{-1}[Y]$
iv) $f^{-1}[f[Y]] = A \cap f^{-1}[Y]$

Λύση: i) $f[X \cap Z] \subseteq f[X] \cap f[Y]$ για οποιαδήποτε X, Z.
$f[X \cap f^{-1}[Y]] \subseteq f[X] \cap f[f^{-1}[Y]]$
από γνωστή πρόταση $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq B$
$f[X] \cap f[f^{-1}[Y]] \subseteq f[X] \cap Y$
Μένει να δείξουμε: $f[X] \cap Y \subseteq f[X] \cap f[f^{-1}[Y]]$.
Έστω $z \in f[X] \cap Y \Rightarrow \exists x_1 \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = z$, $z \in Y$.
Άρα το $x_1 \in f^{-1}[Y] \cap X$ συνεπώς $f(x_1) = z \in f[X \cap f^{-1}[Y]]$
Άρα (i) ισχύει!

ii) Δεν ισχύει!
Εφαρμόζουμε το i) για $X = A$ άρα $X \cap f^{-1}[Y] = A \cap f^{-1}[Y]$
$= f^{-1}[Y]$



$f[A \cap f^{-1}[Y]] = f[A] \cap Y$

$f[f^{-1}[Y]] = f[A] \cap Y$

Άρα το ii) δεν μπορεί να ισχύει γενικά εκτός αν $f[A] = B$ οπότε σε αυτή την περίπτωση $f[A] \cap Y = B \cap Y = Y$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $f \in B^A$ τότε το πεδίο τιμών της f $R(f)$ θα ονομάζεται μια <u>οικογένεια</u> στο B. Θα γράφουμε αντί $R(f)$ το $\{f_i : i \in A\}$ όπου με f_i συμβολίζουμε το $f(i)$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u> $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ $\quad f(1) = \{1, 2, 3\}$

$f(2) = \{2, 3, 4\}$

$f(n) = \{n, n+1, n+2\}$

$\{f(i) ; i \in \mathbb{N}\} = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> (Ένωσης μιας οικογένειας από σύνολα)
$\bigcup_{i \in A} f_i$ συμβολίζουμε την ένωση $\bigcup R(f) = \{y : \exists z \in f$ έτσι ώστε $y \in z\}$. Άρα $\bigcup_{i \in A} f_i = \{y : \exists i \in A$ τ.ω. $y \in f_i\}$.

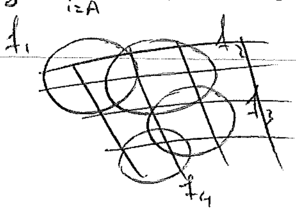
(Τομή μιας οικογένειας από σύνολα)
$\bigcap_{i \in A} f_i = \{y : \forall i \in A$ τ.ω. $y \in f_i\}$.

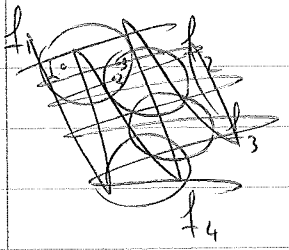
<u>π.χ.</u> (από το προηγούμ.) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i = \{y : \exists i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y \in f_i\} = \{y : \exists i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y = i$ ή $y = i+1$ ή $y = i+2\}$
$= \mathbb{N}$

$\bigcap_{i \in A} f_i = \{y : \forall i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y \in f_i\} = \{y : \forall i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $y = i$ ή $y = i+1$ ή $y = i+2\}$
$= \emptyset$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> (Καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας $\{f_i : i \in A\}$)
Συμβολισμός $\times_{i \in A} f_i = \prod_{i \in A} f_i = \{g :$ το $g \in (\bigcup_{i \in A} f_i)^A$ και τ.ω. $g(i) \in f_i, \forall i \in A\}$

$\times_{i \in A} f_i = \{g : g = (g_i)_{i \in A}\}$



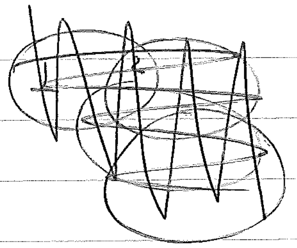


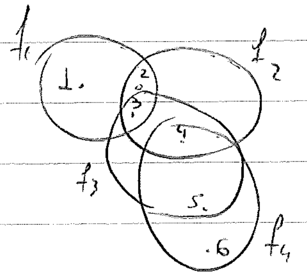
$A=\{1,2,3,4\}$

$f_1\times f_2\times f_3\times f_4=\{g:$ το $g\in(f_1\cup f_2\cup f_3\cup f_4)^A$

τ.ω. το $g(1)\in f_1$, $g(2)\in f_2$,

$g(3)\in f_3$, $g(4)\in f_4\}$





$g(1)=1 \qquad g'(1)=2$

$g(2)=2 \qquad g'(2)=3$

$g(3)=3 \qquad g'(3)=5$

$g(4)=4 \qquad g'(4)=6$

<u>Σχόλιο:</u> Στα μαθηματικά οι συναρτήσεις $g\in \underset{i\in A}{\times} f_i$ συμβολίζονται με τη μορφή μιας <u>ακολουθίας</u> δηλαδή ως

$g=(g_i)_{i\in A}$

<u>π.χ.</u> $g=(1,2,3,4) \qquad g'=(2,3,5,6)$

$$\underset{i\in A}{\times} f_i=\{g: g=(g_i)_{i\in A}\}$$

05-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Άσκηση: Θεωρούμε τις οικογένειες $A=\{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) : n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] : n\in\mathbb{N}\}$. Να βρεθούν οι τομές:
$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$

Λύση: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i=\{x : \forall i\in\mathbb{N}\ x\in A_i\}=\{x : \forall i\in\mathbb{N},\ x\in(-\frac{1}{i},\frac{1}{i})\}=\{0\}$

$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i=\{x : \forall i\in\mathbb{N}\ x\in B_i\}=\{x : \forall i\in\mathbb{N},\ x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\}=\{0\}$

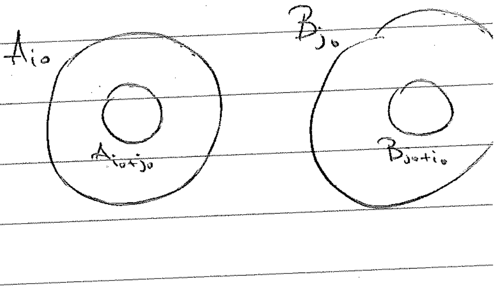
$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i=\{x : \exists i\in\mathbb{N},\ x\in A_i\}=\{x : \exists i\in\mathbb{N},\ x\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\}=(-1,1)$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i=\{x : \exists i\in\mathbb{N},\ x\in B_i\}=\{x : \exists i\in\mathbb{N},\ x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\}=$

Άσκηση: Έστω οι οικογένειες $A=\{A_i\ ;\ i\in\mathbb{N}\}$ και $B=\{B_i\ ;\ i\in\mathbb{N}\}$ οι οποίες είναι φθίνουσες τότε δείξτε ότι:
$(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)\cup(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i\cup B_i)$

Απόδειξη: Έστω $x\in((\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)\cup(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i))$ τότε $x\in(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Άρα προφανώς $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i\cup B_i)$

Έστω $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i\cup B_i)$. Άρα $\forall i\in\mathbb{N}$ τότε $x\in(A_i\cup B_i)$.
Έστω ότι $x\notin((\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)\cup(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i))$ (Θα καταλήξουμε σε άτοπο)
Άρα $x\notin(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ και όμοια $x\notin(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i)$.
Άρα $\exists i_0$ τ.ω. $x\notin A_{i_0}$ και $\exists j_0$ τ.ω. $x\notin B_{j_0}$
Άρα $x\notin A_{i_0+j_0}$ και όμοια $x\notin B_{i_0+j_0}$
Άρα $x\notin(A_{i_0+j_0}\cup B_{i_0+j_0})$ Άτοπο!

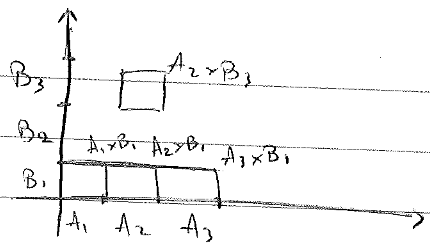


Πρόταση: $(\bigcap_{i\in I} A_i)\cup(\bigcap_{j\in J} B_j)=\bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i\cup B_j)$

Πρόταση: $(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap(\bigcup_{j\in J} B_j)=\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i\cap B_j)$

Πρόταση: $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\times\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\times B_j)$

Πρόταση: $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\times\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i\times B_j)$



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έστω B ένα διατεταγμένο σύνολο με διάταξη $\leq$ και $f\in B^A$ τότε η f λέγεται άνω φραγμένη αν $R(f)$ είναι άνω φραγμένο, η f λέγεται κάτω φραγμένη αν $R(f)$ είναι κάτω φραγμένο, η f λέγεται φραγμένη ανν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f = \sup(R(f))$ (αν υπάρχει)

$\inf_{x\in A} (f(x)) = \inf f = \inf(R(f))$ (αν υπάρχει)

Π.χ.: $f\in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ με ορισμό $f(i) = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ ← γνησίως φθίνουσα.

$\sup_{i\in\mathbb{N}} f(i) = (-1, 1)$

$\inf_{i\in\mathbb{N}} f(i) = \{0\}$

Ορισμός: Έστω επιπλέον ότι A είναι διατεταγμένο σύνολο με διάταξη $\leq_A$ τότε η f λέγεται αύξουσα αν $x_1\leq_A x_2$ τότε $f(x_1)\leq f(x_2)$ και η f λέγεται φθίνουσα αν $x_1\leq_A x_2$ τότε $f(x_1)\geq f(x_2)$.

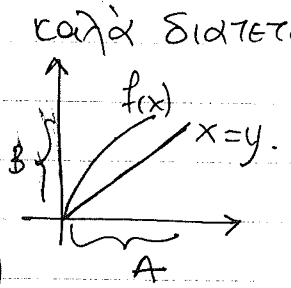
Η f λέγεται γνησίως αύξουσα αν $x_1 <_A x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$

Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα αν $x_1 <_A x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f \in B^A$ όπου A, B διατεταγμένα σύνολα με διατάξεις $\leq_A$ και $\leq_B$ αντίστοιχα. Τότε η f λέγεται αύξουσα αν για κάθε $x, y \in A$ $x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_A f(y)$.

Η f λέγεται γνησίως αύξουσα αν $x <_A y \Rightarrow f(x) <_A f(y)$
Η f λέγεται φθίνουσα αν $x \leq_A y \Rightarrow f(x) \geq_A f(y)$
Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα αν $x <_A y \Rightarrow f(x) >_A f(y)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: (1) Εαν $B \subseteq A$ και $f \uparrow$ του A στο B τότε $\forall x \in A$ ισχύει ότι $x \leq f(x)$ (το A είναι καλά διατεταγμένο σύνολο μέσω της $\leq$.)



ΑΠ. $\exists x \in A$ τ.ω. $x > f(x)$ άρα το σύνολο $\Gamma = \{x \in A : x > f(x)\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο (επειδή είναι μη κενό) έστω γ. Αφού $\gamma \in \Gamma$ έχουμε $\gamma > f(\gamma)$ άρα $f(\gamma) \notin \Gamma$. Ακόμα $f(\gamma) > f(f(\gamma))$, οπότε $f(\gamma) \in \Gamma$ άτοπο.

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 \geq n$.

$\{[e^n] : n \in \mathbb{N}\}$ Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$ $[e^n] \geq n$.

ΑΣΚΗΣΗ: Ν.δ.ο $[e^n] \uparrow$ (σπίτι).

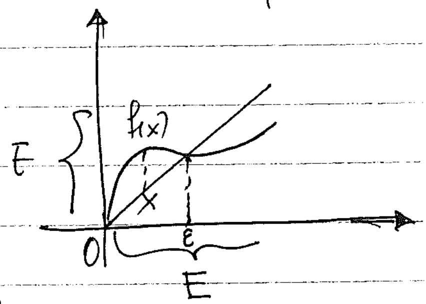
ΘΕΩΡΗΜΑ (Knaster): Έστω E ένα κεκορεσμένο διατεταγμένο σύνολο με μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. και $f \in E^E$ τότε να δειχθεί ότι η f έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο.

(Υπενθύμιση) **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω E ένα διατεταγμένο σύνολο έτσι ώστε κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του E να έχει infimum. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του E έχει supremum, και αντίστροφα. Τέτοια E λέγονται κεκορεσμένα διατεταγμένα σύνολα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζουμε $A = \{x \in E : x \leq f(x)\}$ και έστω
~~$\varepsilon = \min E \Rightarrow \varepsilon \leq f(\varepsilon)$ άρα $\varepsilon \in A$ (άρα A μη κενό)~~
~~Έχουμε ότι ε είναι ένα κάτω φράγμα του A. άρα~~
~~υπάρχει το $\inf A = \varepsilon = \min A$.~~
~~Από $\varepsilon \leq f(\varepsilon)$ έχουμε $f(\varepsilon) \leq f(f(\varepsilon))$~~

Έστω $\varepsilon = \sup A$. Έστω $x \in A$ τυχαία άρα $x \leq \varepsilon \Rightarrow$
$x \leq f(x) \leq f(\varepsilon)$. Άρα $f(\varepsilon)$ είναι άνω φράγμα του A.
Άρα $\varepsilon \leq f(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon \in A$. και συνεπώς $\varepsilon = \max A$.
Ακόμα από $\boxed{\varepsilon \leq f(\varepsilon)}$ έχουμε $f(\varepsilon) \leq f(f(\varepsilon))$
$\Rightarrow f(\varepsilon) \in A \Rightarrow \boxed{f(\varepsilon) \leq \varepsilon}$

Άρα $f(\varepsilon) = \varepsilon$ δηλαδή το ε είναι ένα σταθερό σημείο της f.



ΑΣΚΗΣΗ: Έστω f και E όπως προηγουμένως και μ είναι το infimum $\{x \in E : x \leq f(x)\}$. Δείξτε ότι μ είναι σταθερό σημείο της f.

Απ. $\forall x \leq f(x)$ ισχύει $\mu \leq x \leq f(x)$ Άρα $\mu \leq f(x)$

$f(\mu) \leq f(x)$

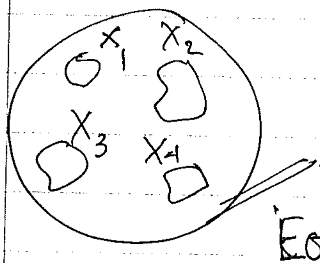
⋮

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: (2) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f \in P(X)^{P(X)}$ μια αύξουσα συνάρτηση ως προς τη διάταξη του υποσυνόλου. $\subseteq$.
Να αποδειχθεί ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Απ. Έχουμε αν $A, B \subseteq X$ τότε $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$
$E = P(X)$ τότε $\emptyset = \min E$.
$X = \max(E)$

Ερώτημα: Είναι το E κεκορεσμένο διατεταγμένο σύνολο;

Απάντηση: Ναι. Έστω $C \subseteq E$
$C \Rightarrow \cup C = \sup C$. Άρα το E είναι κεκορεσμένο



Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Knaster υπάρχει κάποιο $D \subseteq X : f(D) = D$.

Έστω $f \in B^A$ και B διατεταγμένο σύνολο με διάταξη την $\leq_B$, τότε με $\sup f = \sup_{\leq_B} R(f)$ και $\inf(f) = \inf_{\leq_B} R(f)$ αν βέβαια υπάρχουν.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f \in \mathbb{R}^A$ και $g \in \mathbb{R}^A$ δύο πραγματικές συναρτήσεις, τότε ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(i) Εάν c είναι μια πραγματική σταθερά τότε $\sup(f + c) = (\sup f) + c$ όμοια για το $\inf(f)$.

(ii) $\sup(|c| \cdot f) = |c| \cdot \sup(f)$ ——"——

(iii) $\inf(-f) = -\sup f$ και όμοια $\sup(-f) = -\inf(f)$

(iv) $\forall x \in A$ η σχέση $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \sup(f) \leq \sup(g)$ και όμοια $\inf(f) \leq \inf(g)$.

(v) $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ και $\sup(f+g) \geq \sup(f) + \inf(g)$

(vi) $\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$ και $\inf(f+g) \leq \inf(f) + \sup(g)$.

(vii) $\sup|f| = \max\{\sup(f), -\inf(f)\}$ και όμοια

$\inf|f| = \min\{\inf(f), -\sup(f)\}$.

Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι $\sup|f| = |\sup f|$

π.χ. $f(x) = -x$ για $x \in (1,2)$

$\sup(f) = -1$ $\quad |f|(x) = x, \ x \in (1,2)$ $\quad \sup|f| = 2$

$\inf(f) = -2$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \inf|f| = 1$

Σχόλιο: Έχουμε από (vii) $\sup|f| \geq \sup(f)$

άσκηση $\inf(f) \geq -\sup f$

$\sup|f| \geq \sup(f), \ -\sup(f)$

Άρα $\sup|f| \geq |\sup(f)|$

Απ. (iii) $\inf(-f) = \inf(R(-f)) \leq -f(x)$

$\Rightarrow -\inf(R(-f)) \geq f(x)$

$\Rightarrow \sup(f) \leq -\inf(R(-f))$

$\Rightarrow \boxed{\inf(R(-f)) \leq -\sup(f)}$

Μένει να δείξουμε ότι $\inf(R(-f)) \geq -\sup(f)$

$\Rightarrow -\inf(R(-f)) \leq \sup(f)$

Έχουμε $f(x) \leq \sup(f) \Rightarrow -f(x) \geq -\sup(f)$.

Όμως $\sup(f)$ είναι κάτω φράγμα της $-f$

Άρα $\inf(R(-f)) \geq -\sup(f)$

Θα δείξουμε ότι $-\inf(f) = \sup(-f)$
Θέτουμε $g = -f$ και έχουμε

$$\inf(-g) = -\sup(g) \Rightarrow \inf(f) = -\sup(-f) \Rightarrow -\inf(f) = \sup(-f)$$ ✓

11-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Άσκηση 18 (σελ. 107)

Έστω $f: A\times B \to \mathbb{R}$: φραγμένη. Να δείξετε ότι

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} f(x,y) = \sup_{x\in A}\left(\sup_{y\in B} f(x,y)\right) \text{ και } \inf_{(x,y)\in(A\times B)} f(x,y) = \inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right)$$

Απόδειξη: $g(x) = \sup_{y\in B} f(x,y) = \sup_{y\in B}\{f(x,y) : y\in B\}$

Η $g(x)$ ορίζεται για κάθε $x\in B$ διότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα εκπληρωμένο διατεταγμένο σύνολο.

Έστω $S_g = \sup_{x\in A} g(x)$ και $S_f = \sup_{(x,y)\in(A\times B)} f(x,y)$

Θα δείξουμε $S_f = S_g$.

$f(x,y) \leq S_f \quad \forall x\in A, y\in B$

Έστω για x_0: $f(x_0,y) \leq S_f \quad \forall y\in B$

Άρα S_f είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x_0,y) : y\in B\}$

$\sup\{f(x_0,y) : y\in B\} = g(x_0) \leq S_f \quad \forall x_0\in A$ Άρα $\boxed{S_g \leq S_f}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)\leq g(x) \\ f(x,y)\leq S_f \end{array}\right\} \Rightarrow S_f \leq g(x) \quad \forall x\in A \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_f \leq \sup_{x\in A} g(x) \Rightarrow \boxed{S_f \leq S_g}$ Άρα $S_f = S_g$!

Ομοίως βλέπουμε για inf.

Εφαρμογή: Έστω $f_1\in\mathbb{R}^A$ και $f_2\in\mathbb{R}^B$ δύο φραγμένες συναρτήσεις και $f(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$

i) Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη

ii) $\sup_{(x,y)\in(A\times B)} f(x,y) = \sup_{x\in A} f_1 + \sup_{y\in B} f_2(y)$

iii) $\inf_{(x,y)\in(A\times B)} f(x,y) = \inf_{x\in A} f_1 + \inf_{y\in B} f_2(y)$

Απόδειξη: i) Άθροισμα φραγμένων συναρτήσεων είναι φραγμένη συνάρτηση

ii) $\sup\limits_{(x,y)\in(A\times B)} f(x,y) = \sup\limits_{x\in A}\left(\sup\limits_{y\in B} f(x,y)\right) = \sup\limits_{x\in A}\left(\sup\limits_{y\in B}\left(f_1(x)+f_2(y)\right)\right) =$

$= \sup\limits_{x\in A}\left(f_1(x) + \sup\limits_{y\in B} f_2(y)\right) = \sup\limits_{x\in A} f_1(x) + \sup\limits_{y\in B} f_2(y).$

iii) Όμοια

Άσκηση: $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$

i) $\sup\limits_{(x,y)\in(A\times B)} |f(x,y)| = \sup\limits_{x\in A}|f_1(x)|\cdot \sup\limits_{y\in B}|f_2(y)|$

ii) $\inf\limits_{(x,y)\in(A\times B)} |f(x,y)| = \inf\limits_{x\in A}|f_1(x)|\cdot \inf\limits_{y\in B}|f_2(y)|$

Ιδιότητες. Αν $f\in\mathbb{R}^A \Rightarrow \sup|f| = \max\{\sup f, -\inf f\}$

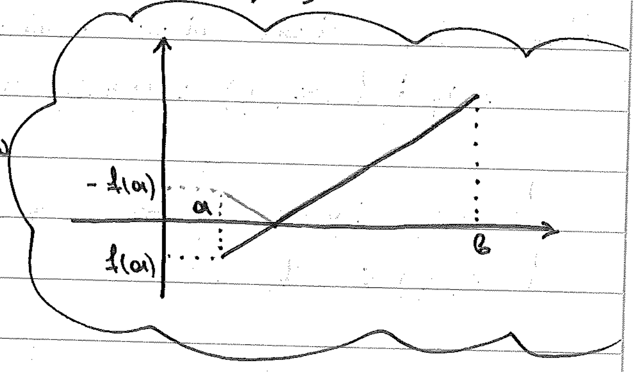
$\inf|f| = \min\{\inf f, -\sup f\}$

"SOS"

Άσκηση: Δείξτε ότι αν $f\in B^A$ και A,B διατεταγμένα σύνολα και f ~~...~~ αύξουσα και έστω $\sup A\in A$ τότε:

$\sup f[A] = f(\sup A)$ και

$\inf f[A] = f(\inf A)$.



Απόδειξη: $S = \sup f[A]$, άρα $f(x)\leq S \Rightarrow f(\sup A)\leq S$

$\forall x\in A \quad x\leq \sup A \xRightarrow{f\nearrow} f(x)\leq f(\sup A)$ είναι φράγμα του $f[A]$

Άρα $S\leq f(\sup A)$

Οπότε $S = f(\sup A)$!

Άσκηση (34): Αν $\nu\in\mathbb{N}$ ακολουθία υποσυνόλων του Ω και ορίζουμε:

$\liminf A_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcap\limits_{\nu\geq k} A_\nu\right)$ και $\limsup A_\nu = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcup\limits_{\nu\geq k} A_\nu\right)$

Να δειχθούν : α) $\liminf A_\nu = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{\nu+k}$ και

$$\limsup A_\nu = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{\nu+k}$$

β) $\liminf (A_\nu \cap B_\nu) = (\liminf A_\nu) \cap (\liminf B_\nu)$

γ) $\limsup (A_\nu \cup B_\nu) = (\liminf A_\nu) \cup (\limsup B_\nu)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $A_\nu \subseteq \Omega$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ τότε εάν τα $\liminf(A_\nu)$ και $\limsup(A_\nu)$ υπάρχουν και είναι ίσα τότε καθε ένα απ' αυτά λέγεται $\underline{\lim A_\nu}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A_\nu = \{\frac{1}{k} : k \geq \nu\} \cup \{0\}$

$$\lim(\inf(A_\nu)) = \bigcup_{\tau\in\mathbb{N}} \bigcap_{\nu\geq\tau} A_\nu = \bigcup_{\tau\in\mathbb{N}} (A_\tau \cap A_{\tau+1} \cap \dots) =$$

$$= \bigcup_{\tau\in\mathbb{N}} \{0\} = \{0\}.$$

$$\lim(\sup(A_\nu)) = \bigcap_{\tau\in\mathbb{N}} \bigcup_{\nu\geq\tau} A_\nu = \bigcap_{\tau\in\mathbb{N}} (A_\tau \cup A_{\tau+1} \cup \dots) =$$

$$= \bigcap_{\tau\in\mathbb{N}} A_\tau = \{0\}.$$

Άρα $\lim A_\nu = \{0\}$.

ΑΣΚΗΣΗ: Εάν η A_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα τότε το $\lim A_\nu = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

Εάν η A_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ είναι φθίνουσα τότε $\lim A_\nu = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A_\nu = \{k^2 : k \leq \nu\}$, A_ν αύξουσα

Άρα $\lim A_\nu = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \{k^2 : k\in\mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$

Ορισμος (Χαρακτηριστικής Συνάρτησης)

Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και $A \subseteq \Omega$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η $X_A \in \{0,1\}^{P(\Omega)}$ που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$X_A(v) = \begin{cases} 1 & , v \in A \\ 0 & , v \notin A \end{cases}$$

Δείξτε τις παρακάτω σχέσεις:

i) $A = B \iff X_A = X_B$

ii) $X_{A\cap B} = X_A \cdot X_B$

iii) $X_{A\cup B} = X_A + X_B - X_{A\cap B}$

iv) $X_{A\setminus B} = X_A - X_A \cdot X_B$

Αποδειξη: iii) $\tau \in A\cup B \Rightarrow X_{A\cup B}(\tau) = 1$

Έχουμε $\tau \in A$ ή $\tau \in B$

Άρα $X_A(\tau) + X_B(\tau) \geq 1$

Περίπτωση 1η: $\tau \in A\cap B$ άρα $X_A(\tau) = 1$ και $X_B(\tau) = 1$

Άρα $X_A(\tau) + X_B(\tau) = 2$

Οπότε $X_A(\tau) + X_B(\tau) - X_A(\tau)X_B(\tau) = 1 + 1 - 1\cdot 1 = 1$

Περίπτωση 2η: $\tau \notin A\cap B$ τότε $X_A(\tau) + X_B(\tau) = 1$

Οπότε $X_A(\tau) + X_B(\tau) - X_A(\tau)X_B(\tau) = 1$

Άρα $X_{A\cup B} = X_A + X_B - X_A \cdot X_B$

12-05-15 Σ.Θ.Σ

Πρόταση: Αν f, g δύο πραγματικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού έστω A τότε:

$$\sup|f| = \max\{\sup f, -\inf f\}$$

Ορίζουμε $f^{+}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in A \text{ τ.ώ. } f(x) \geq 0 \\ \alpha, & \text{για τα υπόλοιπα } x \text{ στο } A. \end{cases}$

όπου α ένα τυχαία επιλεγμένο του $R(|f|)$.

$$f^{-}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in A \text{ τ.ώ. } f(x) < 0 \\ \alpha, & \text{για όλα τα υπόλοιπα } x \text{ στο } A. \end{cases}$$

Τότε:

$$\inf|f| = \min\{\inf f^{+}, -\sup f^{-}\}.$$

Απόδειξη: $\inf|f| = \inf R(|f|)$

$\inf f^{+} = \inf R(f^{+})$

$R(f^{+}) \subseteq R(|f|)$

$\inf R(f^{+}) \geq \inf R(|f|)$.

$$-\sup f^{-} = -\sup R(f^{-})$$
$$= \inf R(-f)$$

Έχουμε: $R(-f^{-}) \subseteq R(|f|)$

$-\sup(f^{-}) = \inf R(-f^{-}) \geq \inf R(|f|)$.

Άρα $\min\{\inf(f^{+}), -\sup(f^{-})\} \geq \inf|f|$. $\square$

Συνεχίζουμε για την αντίστροφη ανισότητα.

Ισοδύναμα σύνολα.

Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα και συμβολίζουμε $A \simeq B$ ανν υπάρχει μία συνάρτηση f, "1-1" και επί από το A στο B

Σχόλια: Εάν $A \underset{f}{\simeq} B$ τότε $B \underset{f^{-1}}{\simeq} A$

Εάν $A \underset{f}{\simeq} B$ και $B \underset{g}{\simeq} \Gamma$ τότε $A \underset{g \circ f}{\simeq} \Gamma$.

Εάν $A \Rightarrow A \simeq A$ μέσω της ταυτοτικής.

π.χ. $A=\mathbb{N}$

$B=2\mathbb{N}=\{0,2,4,\dots\}$

$f(x)=2x$. Η f είναι επί του B διότι για $y\in B \Rightarrow y=2k$ για $k\in\mathbb{N}$. Άρα $f(k)=2k=y$.

$\Gamma=\{1,3,5,7,\dots\}$

Ορίζουμε $h(x)=2x+1$. Η h είναι "1-1" και επί. Άρα $A\simeq\Gamma$.

$\Delta=\mathbb{Z}$

$0\to 0$

$1\to -1$

$2\to 1$

$3\to -2$

$4\to 2$

$5\to -3$

$g(2k+1)=-(k+1)$

$g(2k)=k$

Να δείξουμε ότι η g είναι "1-1" συνάρτηση από τους φυσικούς στους ακέραιους.

Αν $x_1\neq x_2 \Rightarrow g(x_1)\neq g(x_2)$

1η περίπτωση: x_1,x_2 άρτιοι, δηλαδή $x_1=2k_1$ και $x_2=2k_2$ με $k_1\neq k_2$. Έχουμε $g(x_1)=k_1$, $g(x_2)=k_2$, $k_1\neq k_2$. Ok.

2η περίπτωση: x_1 - άρτιος, $x_1=2k_1$, $g(x_1)=k_1$

x_2 - περιττός, $x_2=2k_2+1$, $g(x_2)=-(k_2+1)$ $\Rightarrow k_1\neq-(k_2+1)$ Ok.

3η περίπτωση: x_1,x_2 περιττοί, δηλαδή $x_1=2k_1+1$ και $x_2=2k_2+1$ με $k_1\neq k_2$. Έχουμε $g(x_1)=2k_1+1$, $g(x_2)=2k_2+1$ $\Rightarrow g(x_1)\neq g(x_2)$. Ok.

Μένει να δείξουμε ότι είναι επί.

□

15-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Δύο σύνολα A,B λέγονται ισοδύναμα ή διαφορετικά έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό αν υπάρχει μία συνάρτηση $f: A \to B$ "1-1" και επί.

Παράδειγμα: Οι $\mathbb{R} \simeq (-1,1)$

Απόδειξη: Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

$$-|x| \leq x \leq |x| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < |x|+1 \Rightarrow \dfrac{x}{|x|+1} < 1 \\ x > -|x|-1 \Rightarrow \dfrac{x}{|x|+1} > -1 \end{array}\right\} f: \mathbb{R} \to (-1,1)$$

f επί του $(-1,1)$:
Έστω $y \in (-1,1)$, θα βρούμε κάποιο x τ.ω. $f(x) = y$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = y$$

Περίπτωση 1η $y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x} = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = y + xy \Rightarrow x - xy = y \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{1-y}}$$

Περίπτωση 2η $y < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = y - xy \Rightarrow x + xy = y \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{1+y}}$$

Θ.δ.ο. f "1-1"
Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$

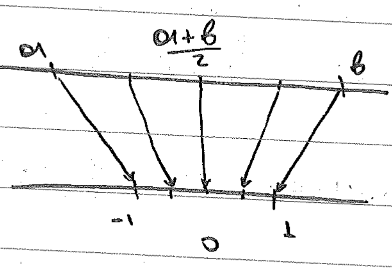
Περίπτωση $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x_1}{1+x_1} = \dfrac{x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1(1+x_2) = x_2(1$

$$\Rightarrow x_1 + \cancel{x_1 x_2} = x_2 + \cancel{x_1 x_2}$$

Όμοια εργαζόμαστε για την περίπτωση $x_1, x_2 < 0$

Άσκηση: $\forall\, \alpha < \beta$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το διάστημα $(\alpha, \beta) \simeq (-1, 1)$

$f(x) = \lambda x + \mu \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$



$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha) = -1 \Rightarrow \lambda\alpha + \mu = -1 \\ f(\beta) = 1 \Rightarrow \lambda\beta + \mu = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2}{\alpha-\beta}, \quad \mu = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

Η f είναι "1-1" επειδή $\lambda \neq 0$

Θ.δ.ο f: επί

Έστω $y \in (-1, 1)$. Θα βρούμε x: $\lambda x + \mu = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{y-\mu}{\lambda}$$

για $x \in (\alpha, \beta) \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \in (-1, 1)$

$\alpha < x < \beta \qquad \lambda > 0$

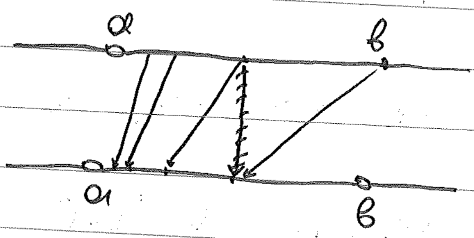
$\lambda\alpha < \lambda x < \lambda\beta$

$\lambda\alpha + \mu < \lambda x + \mu < \lambda\beta + \mu$

$\lambda\alpha + \mu < f(x) < \lambda\beta + \mu \Rightarrow -1 < f(x) < 1$

Σχόλιο: $[\alpha, \beta] \simeq [-1, 1]$ ίδια απόδειξη

Ερώτημα: $(\alpha, \beta] \overset{?}{\simeq} (\alpha, \beta)$



$f(\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{3\alpha+\beta}{4}$

$f\left(\frac{3\alpha+\beta}{4}\right) = \frac{7\alpha+\beta}{8}$

$$\frac{\frac{3\alpha+\beta}{4} + \alpha}{2} = \frac{7\alpha+\beta}{8}$$

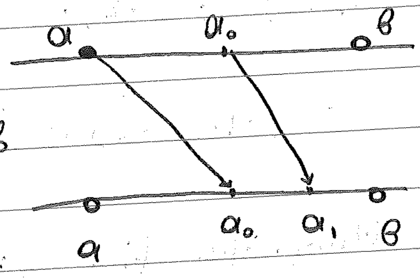
$f\left(\frac{7\alpha+\beta}{8}\right) = \frac{15\alpha+\beta}{16}$ γενικά $f\left(\frac{(2^n-1)\alpha+\beta}{2^n}\right) = \frac{(2^{n+1}-1)\alpha+\beta}{2^{n+1}}$

$\forall x \in (\alpha, \beta) \neq \frac{(2^n-1)\alpha+\beta}{2^n}$ για $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $f(x) = x$

18-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Έχουμε $(\alpha,\beta] \simeq (\alpha,\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha<\beta$.
Θα αποδείξουμε όμοια ότι $[\alpha,\beta) \simeq (\alpha,\beta)$



$\alpha \xrightarrow{h} \alpha_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και γενικά
ορίζουμε μια ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, <\beta$

$\alpha_0 \xrightarrow{h} \alpha_1 = \frac{\alpha_0+\beta}{2}$ έτσι ώστε
$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i+\beta}{2}$ για $i=0,1,2,\dots$

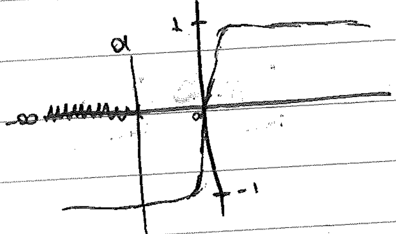
Για $x \neq \alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ $x \xrightarrow{h} x$ δηλ. $h(x)=x$.

Σχόλιο: Το $\alpha_{i+1} > \alpha_i > \alpha_{i-1} > \dots > \alpha_0$. Άρα μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η h είναι "1-1" δηλαδή
$x \neq y$ $x,y \in [\alpha,\beta) \Rightarrow h(x) \neq h(y)$
Περίπτωση: Το $x=\alpha \vee x=\alpha_0 \vee \dots \Rightarrow h(x) =$ κάποιο απ' τα $\alpha_0, \alpha_1, \dots$
$y \neq \alpha, \alpha_0, \alpha_1, \dots \Rightarrow h(y)=y$
όμοια στις άλλες περιπτώσεις

Πόρισμα: κάθε πεπερασμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών είναι $\simeq (-1,1) \simeq \mathbb{R}$.

Ερώτημα: $(-\infty,\alpha] \overset{?}{\simeq} (-1,1)$

Παλιά $h: \mathbb{R} \to (-1,1)$ $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$: γνησίως αύξουσα



$h((-\infty,\alpha]) = \left(-1, \frac{\alpha}{1+|\alpha|}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Η $h: (-\infty,\alpha] \to \left(-1, \frac{\alpha}{1+|\alpha|}\right]$
h: "1-1" και επί
$\Rightarrow$ Άρα $(-\infty,\alpha] \simeq \left(1, \frac{\alpha}{1+|\alpha|}\right] \simeq (-1,1)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Να βρείτε ένα κλειστό και με πεπερασμένα άκρα διάστημα των $\mathbb{R}$ αριθμών $\simeq$ με το $(-10,-2)\cup(2,+10)$

ΙΔΕΑ: $(2,10) \overset{g}{\simeq} [-2,0) \Rightarrow (-10,-2)\cup(2,10) \simeq$

$$\simeq (-10,-2]\cup[2,0) = (-10,0)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε μια $g:(2,10) \xrightarrow[\text{επι}]{\text{"1-1"}} [-2,0)$. Ορίζουμε τώρα

$h:(-10,-2)\cup(2,10) \to (-10,0)$ έτσι ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=x \text{ για } x\in(-10,-2) \\ h(x)=g(x) \text{ για } x\in(2,10) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h(x) \in (-10,0)$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Η h είναι επί του $(-10,0)$? Ναι!

Για $y\in[-2,0)$, $x=g^{-1}(y)$ με $x\in(2,10)$

Η h είναι "1-1".

Δηλαδή $x_1\neq x_2 \Rightarrow h(x_1)\neq h(x_2)$.

Ακόμα από τα παραπάνω έχουμε $(-10,0)\simeq[-10,0]$.
Και έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\left.\begin{array}{l}\{A_i,\ i\in I\} \text{ είναι μια οικ. από ξένα ανά δύο σύνολα} \\ \{B_i,\ i\in I\} \text{ —— '' ——}\end{array}\right\}$

Εάν υποθέτουμε ότι $(\forall i\in I)(A_i \overset{h_i}{\simeq} B_i)$ τότε $\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i \overset{h}{\simeq} \dot{\bigcup}_{i\in I} B_i$ για κάποια h.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $h(x)=h_i(x)$ για $x\in A_i \Rightarrow$ Η h είναι η ζητούμενη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\{(2^n, 2^{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{A_n}{(2^n, 2^{n+1})} = (2,4)\cup(4,8)\cup\dots$

$[(2^n, 2^{n+1}) \simeq (n, n+1]]$ κατασκευάζουμε την οικογένεια

$B_n : \{(n, n+1] : n \in \mathbb{N}\}$

$(2,4)\cup(4,8)\cup\dots \simeq (1,2]\cup(2,3]\cup(3,4]\cup\dots = (1,+\infty) \simeq \mathbb{R} \simeq$
$\simeq (-1,1)$

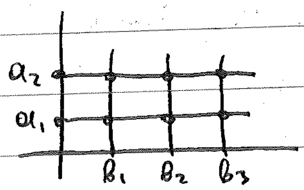
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\{A_i : i \in I\}$ και $\{B_i : i \in I\}$ δύο οικογένειες μη κενών συνόλων τέτοιο ώστε $A_i \overset{h_i}{\simeq} B_i$ τότε $\times_{i\in I} A_i \simeq \times_{i\in I} B_i$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $a = (a_i)_{i\in I} \in \times_{i\in I} A_i$
$h(a) = (\underbrace{h_i(a_i)}_{\in B_i})_{i\in I} \in \times_{i\in I} B_i$ $\quad$ h: "1-1" και επί.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $B = \emptyset \Rightarrow$ τότε το B είναι πεπερασμένο σύνολο και ορίζουμε card B = 0.
Έστω, τώρα, $B \neq \emptyset$ και υπάρχει $h : \{1,2,3,\dots,n\} \xrightarrow[\text{επί}]{\text{"1-1"}} B$ τότε το B είναι πεπερασμένο με card B = n.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $B \neq \emptyset$. Το B λέγεται απέραντο (άπειρο) αν το B δεν είναι πεπερασμένο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δείξτε ότι αν A και B πεπερασμένα σύνολα με card A = n, card B = m $\Rightarrow$ το $A\times B$ πεπερασμένο με card$(A\times B) = m\cdot n$.
$h : \{1,2,3,\dots,m\cdot n\} \xrightarrow[\text{επί}]{\text{"1-1"}} A\times B$



$h(1) = (a_1, b_1)$ $\quad$ $h(4) = (a_2, b_1)$
$h(2) = (a_1, b_2)$ $\quad$ $h(5) = (a_2, b_2)$
$h(3) = (a_1, b_3)$ $\quad$ $h(6) = (a_2, b_3)$

$h(1) = (a_1, b_1)$ $\quad h(m+1) = (a_2, b_1)$ $\quad h(2m+1) = (a_3, b_1)$

$h(2) = (a_1, b_2)$ $\quad \vdots$ $\quad \vdots$

$\vdots$

$h(m) = (a_1, b_m)$ $\quad h(2m) = (a_2, b_m)$ $\quad h(3m) = (a_3, b_m)$

$h((n-1)m+1) = (a_n, b_1)$ $\quad$ Γενικά: $h(k) = (a_{\pi+1}, b_\upsilon)$

$\vdots$ $\quad 1 \leq k \leq m \cdot n$

$h(n \cdot m) = (a_n, b_m)$ $\quad k = m \cdot \pi + \upsilon$

με $1 \leq \upsilon \leq m$

$1 \leq \pi \leq n$

$k = m \cdot n = m\underbrace{(n-1)}_{\pi} + \underbrace{m}_{\upsilon}$

Άρα $h(m \cdot n) = (a_n, b_m)$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ.

1) Αν B πεπερασμένο και $A \subseteq B$ τότε A πεπερασμένο και $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$. Ακόμα έχουμε $\operatorname{card}(B - A) = \operatorname{card} B - \operatorname{car} A$.

2) Αν A και B δύο πεπερασμένα σύνολα τότε $A \times B$ είναι πεπερασμένο και $A \cup B$ είναι πεπερασμένο και ισχύει $\operatorname{card} A \times B = \operatorname{card} A \operatorname{card} B$ και $\operatorname{car} A \cup B = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι πεπ. σύνολο.

Εις άτοπο απαγωγή: Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο σύνολο με $\operatorname{card} \mathbb{N} = n$.

$B = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\} \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \operatorname{card} B = n+1$

Από πρόταση 1) θα είχαμε:

$\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} \mathbb{N}$ άρα $n+1 \leq n$ που δεν ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι ένα οποιοδήποτε ~~υπεραριθμήσιμο~~ υποσύνολο ενός άπειρου συνόλου είναι και αυτό άπειρο.

19-05-15

Σ.Θ.Σ.

Άσκηση: Ν.Δ.Ο αν A έχει m στοιχεία και B έχει n στοιχεία τότε το $A \times B$ έχει $m \cdot n$ στοιχεία $m, n \in \mathbb{N}$.

Λύση: Έχουμε $A \overset{f}{\simeq} \{1,2,\dots,m\}$ και $B \overset{g}{\simeq} \{1,2,\dots,n\}$ και

Άρα $A = \{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(m)\}$ και

$B = \{g^{-1}(1), g^{-1}(2), \dots, g^{-1}(n)\}$ οπότε

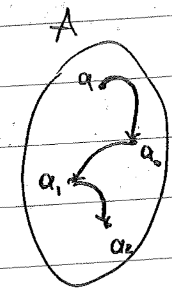
$$A \times B = \{(f^{-1}(i), g^{-1}(j)) : i \in \{1,2,\dots,m\}, j \in \{1,2,\dots,n\}\}$$

$$= \{(f^{-1}(i), g^{-1}(1)) : i \in \{1,2,\dots,m\}\} \cup \{(f^{-1}(i), g^{-1}(2)) : i \in \{1,2,\dots$$ [illegible]

$$\cup \dots \cup \{(f^{-1}(i), g^{-1}(n)) : i \in \{1,2,\dots,m\}\} \simeq$$

$$\simeq \{1,2,\dots,m\} \cup \{m+1, m+2, \dots, 2m\} \cup \dots \cup \{m(n-1), m(n-2), \dots$$ [illegible]

Πρόταση: A απέραντο και $\alpha \in A$ τότε το $A - \{\alpha\}$ είναι απέραντο και μάλιστα ισοπληθικό με το A.



~~ΑΠΟΔΕΙΞΗ~~: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση επιλογής μπορούμε να κατασκευάσουμε μέσα στο A μία άπειρη ακολουθία διαφορετικών στοιχείων του A, έστω $B = \{\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$

Προφανώς το $B \simeq \mathbb{N}$, οπότε έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 1: Αν A απέραντο τότε $\exists B \subseteq A : B \simeq \mathbb{N}$

Πόρισμα: Αν A απέραντο τότε για κάθε B πεπερασμένο [illegible] ισχύει $A \setminus B \simeq A$.

Υπόδειξη: $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ οπότε $A \simeq A - \{b_1\} \simeq A - \{b_1, b_2\} \simeq$
$\simeq \dots \simeq A - \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
$= A - B$

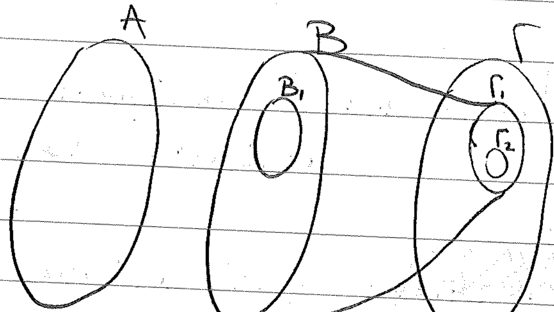
ΑΣΚΗΣΗ: Ν.Δ.Ο. ισχύει το αντίστροφο του Πορίσματος 1

ΛΥΣΗ: Έστω $B \subseteq A$ και $B \approx \mathbb{N}$.
Εις άτοπο απαγωγή.
Έστω A πεπερασμένο. Άρα το B είναι πεπερασμένο άρα προκύπτει ότι $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο. Άτοπο!

ΟΡΙΣΜΟΣ: Θα γράφουμε $A \lesssim B$ και θα εννοούμε ότι $\exists$ κάποιο $\Gamma \subseteq B$ με $A \approx \Gamma$. Λέμε ότι το B υπερισχύει του A.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $A \lesssim B$ και $B \lesssim \Gamma$ τότε $A \lesssim \Gamma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $A \underset{f}{\approx} B_1$
$B \underset{g}{\approx} \Gamma_1$



$\Gamma_2 = g[B_1] = g[f[A]] = g \circ f[A]$

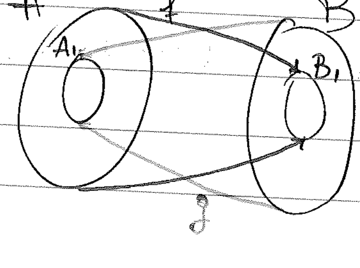
ε $g \circ f$ μια "1-1" και "επί" συνάρτηση
ου A επί του Γ_2. Δηλαδή $\Gamma_2 \approx A$.

ΡΙΣΜΟΣ: Θα γράφουμε $A \prec B$ ανν $A \lesssim B$ και $A \not\approx B$.
Θα λέμε ότι το B υπερισχύει γνήσια του A.

ΟΒΛΗΜΑ: $\exists \Gamma \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{N} \prec \Gamma \prec \mathbb{R}$? (ανοιχτό πρόβλημα των μαθηματικών)

ΒΛΗΜΑ: Έστω $A \lesssim B$ και $B \lesssim A$. Τότε $A \approx B$?

ΡΗΜΑ: (Scröder-Bernstein)



Άσκηση: Να τη βρω!

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $f: A \to B$, "1-1"

Έστω $g: B \to A$, "1-1"

Θα βρούμε κάποια $D \subseteq A$: $f: D \to f[D]$ τ.ω.

α) είναι "1-1" και "επί"

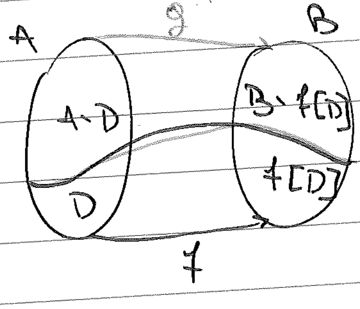
β) $g^{-1}: A \setminus D \to B \setminus f[D]$, "1-1" και "επί".

Τότε μπορούμε να ορίσουμε $h: A \to B$, "1-1" και "επί" ως εξής:

Αν $x \in D$ τότε $h(x) = f(x)$

Αν $x \in A \setminus D$ τότε ορίζουμε $h(x) = g^{-1}(x)$

Η h είναι "1-1" και "επί".



25-05-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

ΘΕΩΡΗΜΑ: (των Bernstein - Schröder)

$A \precsim B \;\wedge\; B \precsim A \Rightarrow A \simeq B$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: i) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

Έχουμε $\mathbb{N} \underset{f}{\precsim} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (2)

Με $f(n) = (n,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, Η f είναι "1-1".

Όμοια: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \underset{g}{\precsim} \mathbb{N}$ (1)

Με $g(n,m) = 2^n(2m+1)$ (π.χ. $g(1,1) = 2\cdot 3 = 6$)

Η g είναι "1-1" διότι $g(n_1,m_1) = g(n_2,m_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{n_1}(2m_1+1) = 2^{n_2}(2m_2+1) \overset{n_1\geq n_2}{\Rightarrow} \underbrace{2^{n_1-n_2}}_{\text{άρτιος}}\underbrace{(2m_1+1)}_{\text{περιττός}} = \underbrace{2m_2+1}_{\text{περιττός}}$$

$\Rightarrow n_1 = n_2$ και άρα $2m_1+1 = 2m_2+1 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Άρα από Θεώρημα Bernstein-Schröder $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

ii) $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$ (1) Όμως ισχύει και $\mathbb{Q} \underset{g}{\precsim} \mathbb{N}$

$p \in \mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} \xrightarrow[g']{} (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$: "1-1" συνάρτηση

$q \in \mathbb{N}$

Άρα έχουμε $\underbrace{\mathbb{Q} \underset{g'}{\precsim} \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \underset{g_1}{\simeq} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \underset{g_2}{\simeq}}_{g' = g_2\circ g_1\circ g \text{ "1-1" συνάρτηση}} \mathbb{N}$ (2)

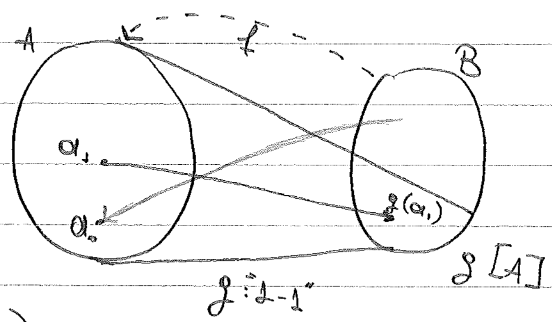
Από (1) και (2) με Θ.B.-S. $\Rightarrow \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: $\mathbb{N}^{100} \simeq \mathbb{N}$ δηλαδή $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$ Επαγωγικά!

Άσκηση: $(A \preceq B \iff \exists f : B \to A$ επί του A, $A \neq \emptyset)$

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω $A \underset{g}{\preceq} B$



Κατασκευή της f.

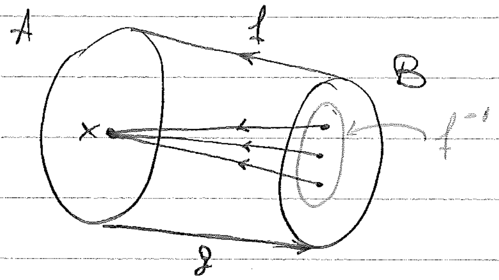
Εάν $y \in g[A] \Rightarrow \exists!\, x \in A : y = g(x)$

Άρα ορίζουμε $f(y) = x$.

Εάν $y \notin g[A]$. Τότε επιλέγουμε ένα τυχαίο $a_0 \in A$ και ορίζουμε $f(y) = a_0$ για όλα τα $y \notin g[A]$.

Εύκολα η f είναι "επί" του A.

"$\Leftarrow$" Κατασκευή της g.



$g(x) = r(f^{-1}[\{x\}])$ όπου

r είναι συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\{f^{-1}[\{x\}] : x \in A\}$ από μη κενά σύνολα.

Η g είναι "1-1" διότι

$t = r(f^{-1}[\{x\}]) = r(f^{-1}[\{y\}])$

τότε $t \in f^{-1}[\{x\}] \cap f^{-1}[\{y\}] \Rightarrow x = y$.

Άσκηση: $A \subseteq \mathbb{N}$ και A απέραντο $\Rightarrow A \simeq \mathbb{N}$

(Σχόλιο: Τα υποσύνολα των φυσικών αριθμών θα είναι είτε πεπερασμένα σύνολα είτε αριθμήσιμα).

Λύση: A απέραντο $\Longrightarrow \exists B \subseteq A$ και $B \simeq \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } B \subseteq A \Longrightarrow \mathbb{N} \preceq A \\ \text{Όμως } A \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow A \preceq \mathbb{N} \end{array}\right\} A \simeq \mathbb{N}$

Ορισμος: Το A θα λέγεται αριθμήσιμο ανν $A \simeq \mathbb{N}$
Το A θα λέγεται το πολύ αριθμήσιμο ανν $A \precsim \mathbb{N}$
Το A θα λέγεται μη αριθμήσιμο ανν $\mathbb{N} \precsim A$.

Σχολιο: Αν A είναι απειραντο τότε $A \simeq \mathbb{N}$ ή $A \succ \mathbb{N}$

Αποδειξη: A είναι απειραντο ανν $B \subseteq A$, $B \simeq \mathbb{N}$
άρα $\mathbb{N} \precsim A \longrightarrow \mathbb{N} \simeq A$
$\longrightarrow \mathbb{N} \prec A$

Ασκηση: Η το πολύ αριθμήσιμη ένωση το πολύ αριθμήσιμων συνόλων ~~είναι το πολύ~~ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο
$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i$
Έστω $\{A_i, i \in I\}$ με $I \precsim \mathbb{N}$ και $A_i \precsim \mathbb{N}$
Δείξτε $\bigcup_{i \in I} A_i \precsim \mathbb{N}$.

Αποδειξη: Έστω $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ "επί". Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ η οποία να είναι επί της $\bigcup$.

Ορίζουμε $f : I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ με ~~ορισμό~~ ορισμό $f(i, n) = f_i(n) \in A_i$
Εύκολα η f είναι επί. Άρα $\bigcup_{i \in I} A_i \precsim I \times \mathbb{N}$.

$$\left(\text{Σχολιο: Αν } \left.\begin{matrix} A \precsim B \\ \Gamma \precsim \Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \times \Gamma \precsim B \times \Delta \right)$$

$$\text{Άρα αφού } \left.\begin{matrix} I \precsim \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \; I \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$$

Άρα $\bigcup_{i \in I} A_i \precsim I \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N}$

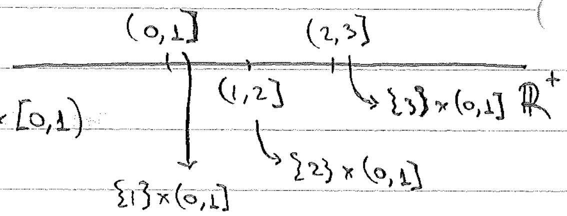
Σχολιο: $\{A_i,\ i\in\mathbb{N}\}$ με $A_i \simeq \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \simeq \mathbb{N}$

Πράγματι $A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Rightarrow \mathbb{N} \precsim \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \precsim \mathbb{N} \overset{B-S}{\Longrightarrow} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \simeq \mathbb{N}$.

Ασκηση: Δείξτε ότι $\mathbb{N}\times\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ και γενικά
$I\times\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ για $I\neq\emptyset$, $I\precsim\mathbb{N}$

Αποδειξη: $\mathbb{N}\times\mathbb{R} \supseteq \{1\}\times\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. Άρα $\mathbb{R} \precsim \mathbb{N}\times\mathbb{R}$
?? $\mathbb{N}\times\mathbb{R} \precsim \mathbb{R}$ θα κατασκευάσετε μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ "επί".

ΙΔΕΑ: $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{R}$
με $f(x) = ([x]+1,\ x-[x]) \in \mathbb{N}\times[0,1)$



π.χ. $f(3{,}5) = (4,\ 0{,}5)$
$f(19{,}23) = (20,\ 0{,}23)$

$x = ([x]) + [x-[x]]$

$\xrightarrow{f} ([x]+1,\ x-[x])$ είναι "επί"

Άρα $\mathbb{N}\times[0,1) \precsim \mathbb{R} \precsim \mathbb{N}\times\mathbb{R}$
$\mathbb{N}\times\overset{\mathbb{R}}{}\mathbb{R}$ ΤΕΛΙΚΑ $\mathbb{R}\simeq\mathbb{N}\times\mathbb{R}$.

Βιβλιο: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}$

"8ος"
Ασκηση: Δείξτε ότι $P_{πεπ}(\mathbb{N})\simeq\mathbb{N}$
$P_{πεπ}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}$

όπου $P_{πεπ}(A) := \{\emptyset\}\cup \underset{\text{μονοσύνολα}}{P_1(A)} \cup \underset{\text{δισύνολα}}{P_2(A)} \cup \dots = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(A)$

Λύση: $P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N}) \supseteq P_1(\mathbb{N}) \supseteq \{\{1\},\{2\},\{3\},\dots\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N} \end{array}\right\} P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N}) \succsim \mathbb{N}$$

$$\text{Αντίστροφα} \left.\begin{array}{l} P_0(\mathbb{N}) = \{\emptyset\} \precsim \mathbb{N} \\ P_1(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \\ P_2(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \\ \{m,n\} \to (m,n) \\ P_3(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Άρα το $P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N})$ είναι αριθμήσιμη ένωση των πολύ αριθμήσιμων συνόλων άρα $\precsim \mathbb{N}$

Από $\mathbb{N} \precsim P_{\pi\epsilon\pi}(\mathbb{N}) \precsim \mathbb{N} \Rightarrow$ βγαίνει το ζητούμενο

Άσκηση: Ποιο είναι το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\quad (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx P(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R})$

Ποιο είναι το $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad (\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \succ \mathbb{R})$ (εκτός ύλης)

▶ Το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \succ \mathbb{N}$

Απόδειξη: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \succsim P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \underset{\text{Θ. Cantor}}{\succ} \mathbb{N}$

Βήμα 1ο: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \succsim P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$

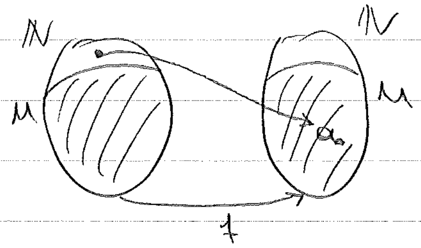
Θα κατασκευάσουμε μια $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow[\text{"επί"}]{} P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$

Ορίζουμε $g(f) = f[\mathbb{N}] \in P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ όπου $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Η g συνάρτηση είναι "επί"

Πράγματι $M \subseteq \mathbb{N}$

$M \neq \emptyset \quad f[\mathbb{N}] = M$



Βήμα 2ο: $P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \succ \mathbb{N}$

Θ. Cantor, Αν το X ~~είναι~~ έχει δύο ή παραπάνω στοιχεία τότε $P(X) \setminus \{\emptyset\} \succ X$

Απόδειξη: Εις άτοπο απαγωγή

$P(X)\setminus\{\phi\} \simeq X$

Δηλαδή έστω $g : X \xrightarrow[\text{"1-1"}]{\text{"επί"}} P(X)\setminus\{\phi\}$

$A=\{y\in X : y\notin g(y)\}$

Περίπτωση 1η: $A=\phi \Rightarrow$ άρα για κάθε $y\in X$ το $y\in g(y)$

$\{m\}=g(y)$ για κάποιο $y\in X$

$\Rightarrow y=m$ δηλαδή $g(m)=\{m\}$ $\forall m\in X$.

$X\supseteq X_1=\{m,n\}$, X_1 αποτελείται από δύο στοιχεία άρα δεν μπορεί να είναι εικόνα μέσω κάποιου $m\in Y$ άρα η g όχι επί Άτοπο!

Περίπτωση 2η: $A\neq\phi \in P(X)\setminus\{\phi\}$

Άρα υπάρχει $m\in X$: $\boxed{g(m)=A}$

2α) $m\in A \Rightarrow m\notin g(m)=A \Rightarrow m\notin A$

2β) $m\notin A \Rightarrow m\in g(m)=A \Rightarrow m\in A$.

26-06-15

Στοιχειώδης Θεωρία Συνόλων

Έχουμε δείξει ότι $X \prec P(X) \setminus \{\emptyset\}$ εάν το X έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία.

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε σύνολο X. $X \prec P(X)$

Λύση: Περίπτωση 1η: $X = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ Άρα $\emptyset \prec \{\emptyset\}$

Περίπτωση 2η: $X = \{\omega\} \Rightarrow P(X) = \{\{\omega\}, \emptyset\}$.
Οπότε πάλι $\{\omega\} \prec \{\emptyset, \{\omega\}\}$

Περίπτωση 3η: X έχει δύο στοιχεία ή παραπάνω
$X \prec P(X) \setminus \{\emptyset\} \prec P(X) \Rightarrow X \prec P(X)$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι εάν το A περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία a_0, a_1 και $B \neq \emptyset$ τότε $A^B \succ B$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $A^B \succsim P(B)$ (1)
$P(B) \succ B$ (2)

Θα κατασκευάσουμε $f : A^B \xrightarrow[\text{επί}]{} P(B)$

$\Gamma \precsim \Delta$ ανν υπάρχει $f : \Delta \xrightarrow[\text{επί}]{} \Gamma$
$(\Gamma \neq \emptyset)$ (Πρόταση)

$g \in A^B$
$M \in P(B)$

Μπορούμε να σκεφτούμε το M ως $g^{-1}[a_0]$ της συνάρτησης $g \in A^B$ με $g(x) = a_0$ για $x \in M$ και $g(x) = a_1$, $x \in B \setminus M$.
Άρα ορίζουμε $f[g] = g^{-1}[\{a_0\}] \subseteq B$
Έχουμε $f : A^B \to P(B)$
Η f είναι επί διότι για κάθε $M \subseteq B$ μπορούμε

να κατασκευάσουμε μία $g \in A^B$ όπως παραπάνω με $g^{-1}[\{a_0\}] = M$. Άρα $\left.\begin{array}{l} A^B \gtrsim P(B) \\ P(B) \succ B \end{array}\right\} \Rightarrow A^B \succ B$

Πόρισμα: $2^{\mathbb{N}} \succ \mathbb{N}$ όπου με $2^{\mathbb{N}}$: όλες οι ακολουθίες από το $\mathbb{N}$ στο $[0,1]$ (δυαδικές ακολουθίες)

• $\boxed{\mathbb{N}^{\mathbb{R}} \succ \mathbb{R}}$ Σχόλιο: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots}_{\mathbb{N} \text{ φορές}}$$

$$\begin{array}{ccc} \wr\wr & & \wr\wr \\ (0,1] & \times & (0,1] \end{array}$$

$$\simeq (0,1]^{\mathbb{N}} \simeq (0,1]$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $(0,1]^{\mathbb{N}} \underset{f}{\simeq} (0,1]$

Κατασκευή της f: Έστω $g \in (0,1]^{\mathbb{N}} \xrightarrow{f} ?$

$1 \to g(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(1)}{2^i}$

$2 \to g(2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(2)}{2^i}$

$3 \to g(3) = \cdots$

$$\begin{array}{cccc} a_1(1) & a_2(1) & a_3(1) & \cdots \\ a_1(2) & a_2(2) & a_3(2) & \cdots \\ a_1(3) & a_2(3) & a_3(3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Πρόταση: κάθε $x \in (0,1]$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ με $a_i = 0$ ή 1 και η ακολουθία των a_i είναι απέραντη δυαδική ακολουθία

Κατασκευάζουμε $x = \frac{a_1(1)}{2} + \frac{a_2(1)}{4} + \frac{a_1(2)}{8} + \frac{a_3(1)}{16} + \dots$

$\cap$

$(0,1]$

Η $g \xrightarrow{f} x$ είναι "επί".

$a_1 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad .$ $\qquad g : \mathbb{N} \to (0,1]$

$a_2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad .$ $\qquad g(4) = 1$

$a_7 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$ $\qquad f(g) = 1$

"SOS"

Άσκηση Ποιο από τα δύο ισχύει $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} > \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ ή $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} < \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

Άσκηση: Ποια είναι η σχέση του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ με το $\mathbb{R}$?

Σχόλιο: A^B είναι όλες οι συναρτήσεις από το $B \to A = \underbrace{A \times A \times A \times \dots}_{B \text{ φορές}}$

Π.χ. $2^{\mathbb{N}} = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots}_{\mathbb{N} \text{ φορές}}$

$a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \in [0,1]$ είναι "επί"

Άρα $[0,1] \lesssim 2^{\mathbb{N}} \underset{?}{\lesssim} [0,1]$

Έχουμε μια $f : (0,1] \to 2^{\mathbb{N}} \setminus \{$όλες τις ακολουθίες με πεπ. πλήθος άσσων$\}$

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \xrightarrow{f} (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Άρα επειδή η f είναι "επί" και "1-1" έχουμε ότι $2^{\mathbb{N}} \setminus \{\dots\} \simeq (0,1)$

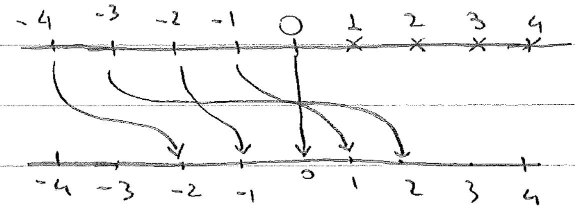
~~Αρκεί να αποδείξουμε ότι~~ $\cancel{2^{\mathbb{N}} \setminus \{\dots\} \simeq 2^{\mathbb{N}}}$

Θα αποδείξουμε ότι όλες οι ακολουθίες με πεπερασμένο πλήθος άσσων είναι ισοδύναμες με τους φυσικούς αριθμούς.

Έχουμε $\Pi = \{(0,0,0,\dots), \text{ με 1 άσσο}, \text{ με 2 άσσους}, \dots\}$
$\simeq \mathbb{N}$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \simeq \mathbb{R}$. Πράγματι ορίζουμε $f(-2k) = -k \quad k=0,1,2,\dots$

$f(-2k+1) = k+1 \quad k=0,1,2,\dots$



Π.χ. $f(-3) = f(-2-1) = 2$

για $x \neq \mathbb{Z}-\mathbb{N}$, $f(x) = x$

Άσκηση: f "1-1" ; "επί" $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Συνέχεια Άσκησης:

Έχουμε δείξει $2^{\mathbb{N}}\setminus\Pi \simeq (0,1] \simeq \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$

$\Pi \simeq \mathbb{N}$

$2^{\mathbb{N}}\setminus\Pi \cup \Pi \simeq (\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) \cup \mathbb{N} \Rightarrow 2^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R} \simeq (0,1]$

//

Άσκηση: "SOS" Δίνεται η σχέση $\sigma = \{(\mu,\nu) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \nu-\mu = 3k, k\in\mathbb{Z}\}$
Είναι σχέση ισοδυναμίας?

Λύση: μεταβατική: $(\mu,\nu)\in\sigma$ και $(\nu,\rho)\in\sigma$

πρέπει $(\mu,\rho)\in\sigma$

$\left.\begin{array}{l}\nu-\mu = 3k\\ \rho-\nu = 3k'\end{array}\right\} \rho-\mu = 3(k+k') \Rightarrow (\mu,\rho)\in\sigma$

$\Rightarrow$ μεταβατική.

όμοια δείχνουμε ανακλαστική και συμμετρική.

//

ΣΟΣ" $[3] = \{\mu : (\mu, 3) \in \sigma\}$ $3-\mu = 3\lambda \Longrightarrow \mu = 3(1-\lambda)$
$= \{3, 6, 9, \dots\}$

$\mathbb{N}/_\sigma = \{[1], [2], [3]\}$

$[1] = \{\mu : (1, \mu) \in \sigma\}$ $\mu - 1 = 3k \Rightarrow \mu = 3k+1$
$= \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

$[2] = \{\mu : (2, \mu) \in \sigma\} = \{2, 5, 8, \dots\}$

ΑΣΚΗΣΗ: "ΣΟΣ" Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι καλά διατεταγμένα και γιατί?

i) $\mathbb{N}$ με την συνηθισμένη διάταξη
ii) $\mathbb{Q}$ με τη συνηθισμένη διάταξη
iii) $\mathbb{Q}$ με διάταξη του παρανομαστή δηλαδή p/q, $q>0$ με $(p,q)=1$, p_1/q_1 με $(p_1,q_1)=1$, $q_1>0$

$$p/q < p_1/q_1 \iff q < q_1$$

iv) Το σύνολο των πεπερασμένων μη κενών υποσυνόλων των φυσικών αριθμών, με σχέση διάταξης τη σχέση των υποσυνόλων

ΛΥΣΗ:
i) ΝΑΙ
ii) ΟΧΙ π.χ. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
iii) ΝΑΙ π.χ. $-3/2 > \frac{1}{1}$ διότι $\forall A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{Q}$ επιλέγουμε ένα ρητό με τον μικρότερο παρανομαστή.
iv) $B = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$ δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο.

ΟΧΙ