

Θέματα στην Στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων

1. Έστω A, B, Γ και Δ τυχόντα σύνολα, τότε για όσες απ' τις παρακάτω σχέσεις πιστεύετε ότι ισχύουν να δώσετε απόδειξη διαφορετικά, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

$$(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$$

$$(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) = (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$$

2. Έστω $\sigma : A \rightarrow B$ και $g : A \rightarrow B$ είναι τυχούσες σχέσεις τότε να δείξετε τις παρακάτω ιδιότητες

- $\sigma \subseteq g$ αν και μόνον αν $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$
- $D(\sigma) \setminus D(g) \subseteq D(\sigma - g)$
- $R(\sigma) \setminus R(g) \subseteq R(\sigma - g)$
- $(\sigma \cap g)^{-1} = \sigma^{-1} \cap g^{-1}$

3. Έστω f και g είναι δυο πραγματικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A . Τότε να δείξετε ότι

- $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$
- $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$
- Δεν ισχύει γενικά ότι $\sup |f| = |\sup f|$

4. Δείξτε ότι το σύνολο των ακεραίων \mathbb{Z} έχει την ίδια ισχύ με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

5. Ποιά ονομάζονται απέραντα σύνολα και ποια αριθμήσιμα; Χαρακτηρίστε με βάση τους ορισμούς που δώσατε το σύνολο $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\}$ και το σύνολο των αρρήτων αριθμών. Δώστε πλήρη δικαιολόγηση.

Χρόνος εξέτασης: 3 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

Οι διδάξαντες

**Κυριάκος Κερεμίδης
Χαράλαμπος Κορνάρος**