Σημειώσεις Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Σημειώσεις Παραδόσεων

Ντόντη Αικατερίνη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι βασικοί χώροι.

1.1 Το υπερβολικό επίπεδο.

Ο χώρος μας είναι το άνω ημιεπίπεδο ή υπερβολικό επίπεδο, συμβολίζουμε $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{C} : Im(x) > 0\}$.

Ορισμός 1.1. *Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι υπερβολικών γραμμών, οι οποίες ορίζονται ως προς τα ευκλείδεια αντικείμενα του $\mathbb{C}$. Ο πρώτος είναι η τομή του $\mathbb{H}$ με τις ευθείες του $\mathbb{C}$ κάθετες στο $\mathbb{R}$. Ο άλλος τύπος είναι η τομή του $\mathbb{H}$ με τους ευκλείδειους κύκλους με κέντρο στο $\mathbb{R}$.*

Πρόταση 1.1. *Για κάθε ζεύγος διακριτών σημείων p, q του $\mathbb{H}$, υπάρχει μοναδική υπερβολική γραμμή, έστω l, που περνά από τα p, q.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. $Re(p) = Re(q)$. Τότε $l = L \cap \mathbb{H}$, όπου $L = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Re(p)\}$. Παρατηρήστε ότι η L είναι Ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$.

2. $Re(p) \neq Re(q)$.
   Θεωρούμε την Ευκλείδεια ευθεία L_{pq} που περνάει από τα p και q. Η κλίση της είναι
   $$m = \frac{Im(q) - Im(p)}{Re(q) - Re(p)}.$$
   Αν τώρα S είναι η μεσοκάθετος στην L_{pq}, τότε η S έχει κλίση $-1/m$. Άρα η εξίσωση της S είναι η
   $$y = \frac{Re(p) - Re(q)}{Im(q) - Im(p)} \left[x - \frac{1}{2}(Re(p) - Re(q)) \right],$$

εφόσον περνά από το σημείο $\frac{p+q}{2}$. Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να βρούμε την εξίσωση του κύκλου.

$\square$

Ορισμός 1.2. *Δύο υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}$ λέγονται παράλληλες όταν δεν τέμνονται.*

Θεώρημα 1.1. *Αν l είναι μία υπερβολική ευθεία του $\mathbb{H}$ και p σημείο του $\mathbb{H}$ εκτός της l, τότε υπάρχουν άπειρες διαφορετικές υπερβολικές ευθείες που περνούν από το p και είναι παράλληλες με την l.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Η l είναι τμήμα ευκλείδειας γραμμής του $\mathbb{C}$.
   Τότε, η $L = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) = Re(p)\}$ είναι παράλληλη με την l. Θεωρώ σημείο x στο $\mathbb{R}$ μεταξύ της l και L και κατασκευάζω Ευκλείδειο κύκλο με κέντρο x που περνά από το p. Ένας τέτοιος κύκλος δεν τέμνει ποτέ την l και το κομμάτι του κύκλου που ανήκει στο $\mathbb{H}$ είναι υπερβολική ευθεία. Δεδομένου ότι μπορώ να επιλέξω άπειρα τέτοια x, έχω άπειρες τέτοιες υπερβολικές γραμμές.

2. Η l είναι κομμάτι Ευκλείδειου κύκλου C και $p \notin C$. Για να κατασκευάσουμε μία άλλη υπερβολική ευθεία που περνάει από το p και είναι παράλληλη στην l, παίρνουμε ένα σημείο x στον $\mathbb{R}$ ανάμεσα στα K και L, και έστω A ο Ευκλείδειος κύκλος με κέντρο στον Re που περνάει από τα x και p. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοιος Ευκλείδειος κύκλος A, επειδή $Re(x) \neq Re(p)$.

   Από την κατασκευή, ο A χωρίζεται από το L, και έτσι η υπερβολική ευθεία $H \cap A$ χωρίζεται από την l. Αυτό σημαίνει ότι η $H \cap A$ είναι μία δεύτερη υπερβολική ευθεία που περνάει από το p και είναι παράλληλη στην l.

   Καθώς υπάρχουν άπειρα σημεία στον $\mathbb{R}$ μεταξύ των K και L, η κατασκευή αυτή μας δίνει άπειρες τέτοιες υπερβολικές ευθείες που περνούν από το p και είναι παράλληλες στην l.

$\square$

1.2 Η σφαίρα του Riemann $\overline{\mathbb{C}}$.

Έστω S^1 ο μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{C}$. Έστω $\xi : S^1 \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: το $\xi(k)$ είναι το σημείο τομής της ευθείας που περνάει από τα i και k με το $\mathbb{R}$. Η ξ λέγεται *στερεογραφική προβολή*. Η ξ είναι καλά ορισμένη, $1-1$ και επί. Πράγματι αν $\xi(x_1) = \xi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, επειδή από δύο σημεία περνάει μοναδική ευθεία-Ευκλείδεια ευθεία. Άρα αυτή η ευθεία έχει μία τομή με το S^1. Μπορούμε να βρούμε την κλίση της L_k :

$$m = \frac{Im(k) - 1}{Re(k)}.$$

Η εξίσωση της είναι:

$$y - 1 = \frac{Im(k) - 1}{Re(k)} x.$$

Το

$$\xi(k) = \frac{Re(k)}{1 - Im(k)}$$

(η τομή της L_k με την $y = 0$). Η στερεογραφική προβολή ορίζεται και για μεγαλύτερες διαστάσεις, π.χ. $S^2 \setminus \{$ βόρειος πόλος$\} \to \mathbb{R}^2$. Η στερεογραφική προβολή μας λέει ότι μπορούμε να δούμε το $\mathbb{R}^2 = (\overline{\mathbb{C}})$ σα μία σφαίρα S^2 χωρίς ένα σημείο. Το $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ λέγεται σφαίρα του Rιεμανν. Αν στο αρχικό ($\xi : S^1 \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$) συμπεριλάβω το i, τότε κάνω το χώρο μου συμπαγή (συμπαγοποίηση), γιατί όλες οι ευθείες καταλήγουν στο i.

Στο $\mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια μετρική μπορούμε να ορίσουμε ανοικτά και κλειστά σύνολα ως εξής:

Ορισμός 1.3. *Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{C}$ λέγεται ανοικτό αν $\forall z \in X$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η περιοχή $U_\epsilon(z) := \{y \in \mathbb{C} : |y - z| < \epsilon\} \subset X$.*

Ορισμός 1.4. *Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{C}$ λέγεται κλειστό στο $\mathbb{C}$ αν το $\mathbb{C} \setminus X$ είναι ανοικτό.*

Ορισμός 1.5. *Ένα σύνολο $X \subset \mathbb{C}$ είναι φραγμένο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $X \subset U_\epsilon(0)$.*

Η εικόνα του $\mathbb{R}$ μαζί με το ∞ είναι ένας κύκλος στο $\overline{\mathbb{C}}$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την τοπολογία του $\mathbb{C}$ στο $\overline{\mathbb{C}}$, αρκεί να ορίσουμε ανοικτές περιοχές $U_\epsilon(z), \forall z \in \mathbb{C}$. Έτσι, αν $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $U_\epsilon(z) = \{y \in \mathbb{C} : |y - z| < \epsilon\}$ και $U_\epsilon(\infty) = \{y \in \mathbb{C} : |y| > \epsilon\} \cup \{\infty\}$. Αν ϵ μικρό, τότε η γειτονιά του ∞ είναι μεγάλη, (σχεδόν όλος ο χώρος) και αντίστροφα, αν ϵ μεγάλο η γειτονιά μικρή.

Ορισμός 1.6. *Ένα σύνολο* X *είναι ανοικτό στο* $\overline{\mathbb{C}}$ *αν* $\forall z \in X$ *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε η περιοχή* $U_\epsilon(z) \subset X$.

Παράδειγμα 1.1. *Το* $\mathbb{H}$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\overline{\mathbb{C}}$. *Πράγματι* $\forall z \in \mathbb{C} \cap \mathbb{H}$ *επιλέγω* ϵ *με* $0 < \epsilon < Im(z)$. *Τότε* $U_\epsilon(z) \subset \mathbb{H}$.

Παράδειγμα 1.2. *Το* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\overline{\mathbb{C}}$. *Πράγματι το* E *ανοικτό στο* $\mathbb{C}$, *άρα ανοικτό και στο* $\overline{\mathbb{C}}$.

Παράδειγμα 1.3. *Το* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1000\} \cup \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών του* $\overline{\mathbb{C}}$. *Αυτό διότι το* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1000\} \cup \{\infty\}$ *είναι ανοικτή περιοχή του* ∞ *και το* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *είναι ο ανοικτός δίσκος.*

Προσοχή! Το μονοσύνολο $\{\infty\}$ *δεν είναι ανοικτό.*

Η σύγκλιση στο $\overline{\mathbb{C}}$ επεκτείνει τη σύγκλιση στο $\mathbb{C}$. Μία ακολουθία $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\overline{\mathbb{C}}$ συγκλίνει στο $z \in \overline{\mathbb{C}}$ αν $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $z_n \in U_\epsilon(z), \forall n \geq n_0$. Στο $\overline{\mathbb{C}}$ δεν επεκτείνεται η μετρική του $\mathbb{C}$, αλλά η τοπολογία του $\mathbb{C}$. Αν παίρνω γειτονιές γύρω από το z, με μικρότερο ϵ κάθε φορά και υπάρχει μία ακολουθία άπειρων όρων που συνεχίζει να είναι εκεί, τότε υπάρχει σύγκλιση στο z.

Παράδειγμα 1.4. *Η* $1/n$ *με* $n \in \mathbb{N}$ *συγκλίνει στο* $\overline{\mathbb{C}}$. *Όταν δεν εμπλέκεται το* ∞ *συμβαίνει ότι ήδη γνωρίζουμε, δηλαδή* $1/n \to 0$.

Παράδειγμα 1.5. *Το όριο της ακολουθίας* n *με* $n \in \mathbb{N}$ *είναι το ίδιο με το όριο της* $-n$ *με* $n \in \mathbb{N}$ *στο* $\overline{\mathbb{C}}$. *Η* n *με* $n \in \mathbb{N}$ *συγκλίνει στο άπειρο,* $n \to \infty$ *γιατί* $\forall \epsilon > 0$ *με* $n_0 > \epsilon$ *το* $n \in U_\epsilon(\infty)$. *Παραπέρα αν το* $n \in U_\epsilon(\infty)$ *τότε και το* $-n \in U_\epsilon(\infty)$.

Στο $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ακολουθίες, όπως $a_n = n$ ή $b_n = -n$, με $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν.

Ορισμός 1.7. *Ένας κύκλος του* $\overline{\mathbb{C}}$ *είναι είτε ένας Ευκλείδειος κύκλος του* $\mathbb{C}$, *είτε ένωση μιας ευθείας του* $\mathbb{C}$ *με το* ∞.

Έστω L μια ευκλείδεια γραμμή $\overline{L} = L \cup \{\infty\}$ είναι κύκλος του $\overline{\mathbb{C}}$ που περιέχει την L. Το $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Το σύνολο των κύκλων του $\overline{\mathbb{C}}$ είναι το σύνολο των λύσεων εξισώσεων του $\mathbb{C}$ της μορφής:

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \qquad 1.1$$

όπου $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{C}$.

Αν άρω τον περιορισμό $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση 1.1 για $\alpha = 0$ παίρνει τη μορφή της εξίσωσης της ευθείας

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0.$$

Δηλαδή, αν $\alpha = 0$, έχουμε ευθεία, αν $\alpha \neq 0$, έχουμε κύκλο.

Το ∞ αποτελεί λύση της παραπάνω εξίσωσης για $\alpha = 0$, λόγω συνέχειας. Πράγματι, έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σημείων του $\mathbb{C}$, που ικανοποιούν την εξίσωση $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ και $z_n \to \infty$. Θεωρώ την ακολουθία $w_0 + n(w_1 - w_0), n \in \mathbb{R}$, όπου w_0, w_1 λύσεις της εξίσωσης $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Η ακολουθία $w_0 + n(w_1 - w_0)$ δίνει λύσεις της εξίσωσης οι οποίες τείνουν στο άπειρο.

Αυτό δεν ισχύει για την εξίσωση $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$, όταν $\alpha \neq 0$ και $z_n \to \infty$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\alpha|z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0,$$

και έχουμε

$$\lim_{z_n\to\infty}(\alpha z_n\overline{z_n} + \beta z_n + \overline{\beta}\overline{z_n} + \gamma) = \lim_{z_n\to\infty}(\alpha|z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha}) = \infty.$$

Όμως, θα έπρεπε το παραπάνω όριο να είναι 0 λόγω συνέχειας. Το ∞ δεν μπορεί να ικανοποιεί την εξίσωση του κύκλου.

Ορισμός 1.8. *Μια συνάρτηση $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ είναι συνεχής στο $z \in \overline{\mathbb{C}}$ αν $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, ώστε κάθε $w \in U_\delta(z)$ ικανοποιεί την $f(w) \in U_\epsilon(f(z))$. Δηλαδή, $f(U_\delta(z)) \subset U_\epsilon(f(z))$. Η f είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{C}}$ αν είναι συνεχής $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Παράδειγμα 1.6. *Έστω η συνάρτηση $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ με*

$$J(z) = \begin{cases} 1/z & , z \in \overline{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & , z = 0, \\ 0 & , z = \infty. \end{cases}$$

Η J είναι συνεχής στο $\overline{C}\setminus\{0\}$. Για $z = 0$ και $\epsilon = 5$, $U_5(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 5\}$. Αν πάρω $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, τότε $f(U_\delta(0)) \subset U_\epsilon(\infty)$, γιατί αν $|w| < 1/\delta$, τότε $J(w) > \epsilon$. Άρα, η J είναι συνεχής στο 0. Για $z = \infty$, αν επιλέξω το $\delta < 1/\epsilon$, έχω $f(U_\delta(\infty)) \subseteq U_\epsilon(0)$.

Μια συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν σέβεται τα όρια των ακολουθιών. Η $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ λέγεται ομοιομορφισμός, αν η f είναι $1-1$, επί και συνεχής και η f^{-1} συνεχής. Η J είναι ομοιομορφισμός.

Ορισμός 1.9. *Το σύνολο όλων των ομοιομορφισμών $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, συμβολίζεται ως Homeo $(\overline{\mathbb{C}})$.*

Homeo $(\overline{\mathbb{C}})$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική $f(x) = x$. Το αντίστροφο της f είναι η f^{-1}.

1.3 Το όριο του απείρου του $\mathbb{H}$.

Ορισμός 1.10. *Ένας δίσκος D του $\overline{\mathbb{C}}$ είναι μια από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος ενός κύκλου του $\overline{\mathbb{C}}$. Αν D είναι ένας δίσκος του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε αναφερόμαστε στον κύκλο A που τον προσδιορίζει.*

Σημείωση 1. *Κάθε δίσκος προσδιορίζει μοναδικά έναν κύκλο. Κάθε κύκλος δεν προσδιορίζει μοναδικά έναν δίσκο.*

Το $\mathbb{H}$ καθορίζεται (όχι μοναδικά) από το $\overline{\mathbb{R}}$. Το $\overline{\mathbb{R}}$ είναι το σύνορο του $\mathbb{H}$. Το σύνορο μιας υπερβολικής γραμμής l του $\mathbb{H}$ είναι η τομή του κύκλου του $\overline{\mathbb{C}}$ που περιέχει την l με τον $\overline{\mathbb{R}}$. Το σύνορο, δηλαδή, της l είναι $\{0, \infty\}$.

Γενικότερα, μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο υποσυνόλων $\curvearrowleft$ του $\mathbb{H}$. Στο $\mathbb{H}$ έχουμε δύο κατηγορίες παράλληλων γραμμών:

1. Αυτές που προέρχονται από κύκλους του $\overline{\mathbb{C}}$ που τέμνονται, εκτός $\mathbb{H}$ και

2. Αυτές που προέρχονται από κύκλους του $\overline{\mathbb{C}}$ που δεν τέμνονται.

Οι τελευταίες λέγονται ultraparallel.

Πρόταση 1.2. *Έστω $p \in \mathbb{H}$ και $q \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε υπάρχει μοναδική υπερβολική γραμμή που περνάει από τα p, q.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. $Re(p) \neq Re(q)$
   Τότε χρησιμοποιούμε την παρακάτω, γνωστή από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κατασκευή. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα p, q, η οποία τέμνει τον $\overline{\mathbb{R}}$ στο σημείο m. Ο κύκλος με κέντρο m και ακτίνα την απόσταση των m, q περνά από το σημείο p και ορίζει μοναδική υπερβολική ευθεία μεταξύ των δύο σημείων p, q.

2. $Re(p) = Re(q)$
   Τότε η μοναδική υπερβολική ευθεία που περνάει από τα p, q είναι η:

$$L = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) = Re(p)\}.$$

   Αν το $q = \infty$, τότε χρησιμοποιούμε ξανά την L. Το κομμάτι της παραπάνω γραμμής με αρχικό σημείο το $p \in \mathbb{H}$ και τελικό το $q \in \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται υπερβολική ακτίνα.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Η γενική ομάδα των Möbius.

2.1 Η ομάδα των Möbius μετασχηματισμών.

Έστω $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$ το σύνολο όλων των ομοιομορφισμών του $\overline{\mathbb{C}}$ που διατηρούν τους κύκλους του $\overline{\mathbb{C}}$. Έχουμε:

$$Homeo^C(\overline{\mathbb{C}}) = \{f \in Homeo(\overline{\mathbb{C}}) \,|\, \forall A \,\text{κύκλο του}\; \overline{\mathbb{C}} \,\text{το}\, f(A) \,\text{κύκλος}\}.$$

Πρόταση 2.3. *Το στοιχείο f του $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ με $f(z) = pz + q$, όπου $p \neq 0, p, q \in \mathbb{C}$ είναι και στοιχείο του $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι οι κύκλοι του $\overline{\mathbb{C}}$ δίνονται από την εξίσωση:

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0,\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \;\text{ και }\; \beta \in \mathbb{C}.$$

1. Περίπτωση $\alpha = 0$

   Ο κύκλος A έχει εξίσωση

   $$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R} \qquad 1.2$$

   . Η εξίσωση της $f(A)$ είναι:

$$\begin{aligned} f(\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma) &= f(0) && (2.1)\\ p(\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma) + q &= q && (2.2)\\ p(\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma) &= 0 && (2.3)\\ \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma &= 0, && (2.4)\\ & && (2.5) \end{aligned}$$

για $p \neq 0$. Διαφορετικά θέτω $w = pz + q$, οπότε $z = (w-q)/p$. Αντικαθιστώ το z στην εξίσωση 1.2 κι έχω:

$$\beta \frac{w-q}{p} + \overline{\beta} \overline{\frac{w-q}{p}} + \gamma = \frac{\beta}{p} w + \frac{\overline{\beta}}{p} \overline{w} - \frac{\beta}{p} q - \overline{\frac{\beta}{p} q} + \gamma.$$

Είναι προφανές ότι έχουμε και πάλι εξίσωση κύκλου.

2. Γενική περίπτωση

   Αντικαθιστώντας το $z = (w-q)/p$ και κάνοντας τις πράξεις, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{p\overline{p}}(w-q)\overline{(w-q)} + \frac{\beta}{p}(w-q) + \frac{\overline{\beta}}{\overline{p}}\overline{(w-q)} + \gamma &= 0 \quad (2.6)\\
\frac{\alpha}{|p|^2}|w-q|^2 + \frac{\beta}{p}(w-q) + \frac{\overline{\beta}}{\overline{p}}(\overline{w} - \overline{q}) + \gamma &= 0 \quad (2.7)\\
\frac{\alpha}{|p|^2}\left| w + \frac{\overline{\beta} p}{\alpha} - q - \frac{\overline{\beta} p}{\alpha}\right|^2 + \frac{\beta w}{p} - \frac{\beta q}{p} + \frac{\overline{\beta}\overline{w}}{\overline{p}} - \frac{\overline{\beta}\overline{q}}{\overline{p}} + \gamma &= 0 \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{|p|^2}\left| w + \frac{\overline{\beta} p}{\alpha} - q\right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha} = 0.$$

   Άρα, όλα τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα πηγαίνουν κύκλους σε κύκλους.

□

Πρόταση 2.4. *Η*

$$J(z) = \begin{cases} 1/z & , z \in \overline{C} \setminus \{0\}, \\ \infty & , z = 0, \\ 0 & , z = \infty. \end{cases}$$

είναι στοιχείο του $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Απόδειξη. Η ... για $z = 1/w$ δίνει:

$$\alpha \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \beta \frac{1}{w} + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0$$

$$\alpha + \overline{\beta} w + \beta \overline{w} \gamma w \overline{w} = 0.$$

Το τελευταίο αποτελεί εξίσωση κύκλου. □

Παράδειγμα 2.7. *Έστω A ο κύκλος με εξίσωση $2z + 2\overline{z} + 3 = 0$. Τότε ο $J(A)$ έχει εξίσωση $2w + 2\overline{w} + 3w\overline{w} = 0$. Επομένως, κάθε στοιχείο της μορφής $f \circ J \circ f \circ J \circ \ldots$ ή $J \circ f \circ J \circ f \circ \ldots$ είναι στοιχείο του $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. Έχουμε ότι*

$$f \circ J(z) = f(\frac{1}{z}) = p\frac{1}{z} + q = \frac{qz+p}{z},\ p \neq 0,$$

$$J \circ f(z) = J(pz+q) = \frac{1}{pz+q},\ p \neq 0,$$

$$f \circ J \circ f(z) = f(\frac{1}{pz+q}) = p\frac{1}{pz+q} + q = \frac{qpz+(p+q^2)}{pz+q},\ p \neq 0,$$

$$f_2 \circ J \circ f_1(z) = f_2(\frac{1}{p_1z+q_1}) = p_2\frac{1}{p_1z+q_1} + q_2 = \frac{q_2p_1z+p_2+q_2q_1}{p_1z+q_1},\ p_1, p_2 \neq 0.$$

Ορισμός 2.11. *Ένας μετασχηματισμός Möbius, είναι μια συνάρτηση $m : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ με $m(z) = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ και $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών Möbius, συμβολίζεται με Mob^+.*

Το $m(\infty)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$m(\infty) = \lim_{z\to\infty}\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = \lim_{z\to\infty}\frac{\alpha+\frac{\beta}{z}}{\gamma+\frac{\delta}{z}} = \frac{\alpha}{\gamma}, \gamma \neq 0.$$

Για $\gamma = 0, m(\infty) = \infty$. Το $m(0) = \beta/\delta$, αν $\delta \neq 0$ και $m(0) = \infty$, αν $\delta = 0, \beta \neq 0$.

Η περίπτωση $\beta = \delta = 0$ αποκλείεται, γιατί $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Πρόταση 2.5. *Το σύνολο Mob^+ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.*

Απόδειξη. Για $m_1(z) = (\alpha_1 z + \beta_1)/(\gamma_1 z + \delta_1)$, και $m_2(z) = (\alpha_2 z + \beta_2)/(\gamma_2 z + \delta_2)$, όπου $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0$ και $\alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2 \neq 0$, έχουμε ότι

$$m_1(m_2(z)) = \frac{\alpha_1(\frac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2})+\beta_1}{\gamma_1(\frac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2})+\delta_1} = \frac{\alpha_1\alpha_2 z+\alpha_1\beta_2+\beta_1\gamma_2 z+\delta_2\beta_1}{\gamma_1\alpha_2 z+\gamma_1\beta_2+\delta_1\gamma_2 z+\delta_2\delta_1}$$

$$\frac{(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2)z+\alpha_1\beta_2+\delta_2\beta_1}{(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2)z+\gamma_1\beta_2+\delta_2\delta_1},$$

όπου

$(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2)(\gamma_1\beta_2+\delta_2\delta_1) - (\alpha_1\beta_2+\delta_2\beta_1)(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2) \neq 0$. Παραπέρα, $m(z) = z = (z+0)/(0z+1) \in Mob^+$. □

Θεώρημα 2.2. *Έστω Möbius, μετασχηματισμός $m(z) = (\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ και $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.*

1. *Αν* $\gamma = 0$, *τότε*
$$m(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}.$$

2. *Αν* $\gamma \neq 0$, *τότε* $m(z) = f(J(g(z)))$, *όπου* $g(z) = \gamma^2 z + \gamma\delta, f(z) = -(\alpha\delta - \beta\gamma)z + \alpha/z, z \in \mathbb{C}$ *και* $f(\infty) = \infty = g(\infty)$.

Απόδειξη. Αν $\gamma = 0$, δεν έχω να δείξω τίποτα.

Αν $\gamma \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} m(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha\gamma z + \beta\gamma}{\gamma^2 z + \delta\gamma} = \frac{\alpha\gamma z + \alpha\delta - (\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma^2 z + \delta\gamma} \\ = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 z + \delta\gamma} = f(J(g(z))). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.1.
$$Mob^+ \leq Homeo^C(\overline{\mathbb{C}}).$$

Ορισμός 2.12. *Έστω* $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *ένας ομοιομορφισμός. Ένα σταθερό σημείο του* g *είναι ένα σημείο* $z \in \overline{\mathbb{C}}$ *τέτοιο ώστε* $g(z) = z$.

Το ερώτημα που προκύπτει αφορά στα σταθερά σημεία των Möbius μετασχηματισμών.

1. Αν $\gamma = 0$, τότε
$$m(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}.$$
Υποθέτουμε ότι ο m δεν είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Η εξίσωση
$$m(z) = z \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta} = z \Leftrightarrow z(\frac{a}{\delta} - 1) = -\frac{\beta}{\delta}.$$
Αν $\alpha/\delta = 1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε ο m δεν έχει κανένα σταθερό σημείο. Αυτό είναι προφανές, γιατί αν $\alpha = \delta \Rightarrow m(z) = z + \beta/\delta \Rightarrow \beta \neq 0$, άρα το $-\beta/\delta \neq 0$. Αν $\alpha/\delta \neq 1$, τότε
$$z = \frac{-\frac{\beta}{\delta}}{\frac{\alpha-\delta}{\delta}},$$
κι η $m(z)$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο (υπό την προϋπόθεση ότι δεν είναι η ταυτοτική).

2. Αν $\gamma \neq 0$, τότε

$$m(z) = z \Leftrightarrow \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = z \Leftrightarrow \alpha z+\beta = \gamma z^2+\delta z \Leftrightarrow \gamma z^2+(\delta-\alpha)z-\beta = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είτε έχει μια διπλή ρίζα, είτε έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.3. *Έστω $m(z)$ ένας Möbius μετασχηματισμός με 3 σταθερά σημεία στο $\mathbb{C}$. Τότε $m(z) = z$.*

Παράδειγμα 2.8. *Βρείτε τα σταθερά σημεία της $J(z) = 1/z$. Είμαστε στην περίπτωση όπου $\gamma \neq 0$. Λύνουμε την $1/z = z \Leftrightarrow z = \pm 1$.*

2.2 Ιδιότητες μεταβατικότητας των Möb^+.

Μία από τις βασικές ιδιότητες των Möb^+ είναι ότι δρουν μοναδικά, τριπλά μεταβατικά στον $\overline{\mathbb{C}}$. Με αυτό, εννοούμε πως δοθέντων δύο τριάδων σημείων (z_1, z_2, z_3) και (w_1, w_2, w_3) από διακριτά σημεία του $\overline{\mathbb{C}}$, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο m των Möb^+ τέτοιο ώστε

$$m(z_1) = w_1, m(z_2) = w_2, m(z_3) = w_3.$$

Πρόταση 2.6. *Οι Möbius μετασχηματισμοί δρουν μοναδικά μεταβατικά στις διακριτές τριάδες του $\overline{\mathbb{C}}$. Δηλαδή, αν $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ δύο διακριτές τριάδες του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε υπάρχει μοναδικός Möbius μετασχηματισμός m ώστε*

$$m(z_i) = w_i, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Ουσιαστικά, δεδομένου ότι μία τριάδα διακριτών σημείων ορίζει μοναδικά ένα κύκλο, η παραπάνω ιδιότητα δείχνει ότι υπάρχει Möbius μετασχηματισμός που να στέλνει τον κύκλο σε οποιονδήποτε άλλο.

Απόδειξη. Θα δείξω πρώτα τη μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχουν δύο Möbius μετασχηματισμοί m_1, m_2 με $m_i(z_j) = w_j, \quad \forall j = 1, 2, 3,\ i = 1, 2$. Τότε

$$m_1(z_j) = w_j \Rightarrow m_1(z_j) = m_2(z_j) \Rightarrow m_2^{-1} \circ m_1(z_j) = z_j,\ j = 1, 2, 3,$$

δηλαδη $m_2^{-1} \circ m_1$ είναι ο ταυτοτικός, διότι έχει τρία σταθερά σημεία, οπότε $m_2 = m_1$.

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι για κάθε διακριτή τριάδα (z_1, z_2, z_3), υπάρχει μοναδικός Möbius μετασχηματισμός m, ώστε: $(z_1, z_2, z_3) \overset{m}{\to} (0, 1, \infty)$. Θεωρούμε

$$m(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Έχουμε ότι $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1, m(z_3) = \infty$. Εξετάζω αν ο m είναι Möbius μετασχηματισμός:

$$m(z) = \frac{(z_2 - z_3)z - (z_2 - z_3)z_1}{(z_2 - z_1)z - (z_2 - z_1)z_3}.$$

Επίσης, πρέπει να ελέγξω το εξής

$$\begin{aligned}&(z_2 - z_3)(-z_3(z_2 - z_1)) - (z_2 - z_1)(-z_1(z_2 - z_3))\\ &= -z_3(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) + z_1(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)\\ &= (z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_1 - z_3) \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα, $m(z)$ είναι Möbius μετασχηματισμός.

Αν $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ δύο διακριτές τριάδες, τότε

$$m_1(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty) = m_2(w_1, w_2, w_3) \Rightarrow m_2^{-1} \circ m_1(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3).$$

□

Παράδειγμα 2.9. *Να υπολογιστεί ο m που πηγαίνει την $(2i, 1 + i, 3)$ στην $(0, 2 + 2i, 4)$. Ο*

$$m_1(z) = \frac{(z - 2i)(1 + i - 3)}{(z - 3)(1 + i - 2i)} = \frac{(2 + i)z + 2 + 4i}{(1 - i)z - 3 + 3i},$$

πηγαίνει την $(2i, 1 + i, 3)$ στην $(0, 1, \infty)$, και ο

$$m_2(z) = \frac{z(2 + 2i - 4)}{(z - 4)(2 + 2i)} = \frac{(-2 + 2i)z}{(2 + 2i)z - 8 - 8i},$$

πηγαίνει την $(0, 2 + 2i, 4)$ στην $(0, 1, \infty)$. Τελικά,

$$m_2^{-1} \circ m_1(z) = \frac{(24 + 8i)z + 16 - 48i}{(6 + 6i)z + 4 - 24i}.$$

Ορισμός 2.13. *Μια ομάδα G δρα σε ένα σύνολο X αν υπάρχει ομομορφισμός $G \to S_X$ όπου $S_X = \{$ σύνολο όλων των $1 - 1$ και επί απεικονίσεων $X \to X\}$. Δρα, σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της ομάδας αντιστοιχίζεται σε μια μετάθεση του $\underline{\overline{X}}$.*

Μια δράση του G στο x λέγεται μεταβατική αν $\forall x, y \in X$, υπάρχει $g \in G$, ώστε $gx = y$. Αν η δράση είναι η $G \xrightarrow{\phi} S_X$, τότε το $(\phi(g))(x)$ είναι εξ' ορισμού το πώς δρα ένα στοιχείο της G σε ένα στοιχείο του X. Απλοποιώντας το συμβολισμό γράφουμε gx για το $(\phi(g))(x)$. Έτσι

$$(\phi(g_1 g_2))(x) = (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(x) = \phi(g_1)(\phi(g_2))(x).$$

Ιδιότητες της δράσης είναι ότι $(g_1 g_2)x = g_1(g_2)x$ και $1x = x$.

Πόρισμα 2.2. *Η Mob^+ δρα μοναδικά μεταβατικά στο σύνολο των διακεκριμένων τριάδων του $\overline{\mathbb{C}}$.*

Πόρισμα 2.3. *Η Mob^+ δρα μεταβατικά στο σύνολο των κύκλων του $\overline{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Μια τριάδα διακριτών σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ ορίζει μοναδικά έναν κύκλο του $\overline{\mathbb{C}}$.

1. Αν τα τρία σημεία δεν είναι συγγραμμικά, η κατασκευή είναι γνωστή.

2. Αν τα σημεία είναι συγγραμμικά, τότε αρκεί να πάρουμε στο $\mathbb{C}$ την ευθεία που ορίζεται από τα τρία σημεία. Στο $\overline{\mathbb{C}}$ αυτή είναι κύκλος.

3. Αν τα δύο σημεία είναι στο $\mathbb{C}$ και το τρίτο είναι στο ∞, η ευθεία του $\mathbb{C}$ που περνά από τα δύο σημεία στο $\overline{\mathbb{C}}$ είναι κύκλος που περνάει από το ∞.

Το συμπέρασμα βγαίνει από το Πόρισμα .... □

Σημείωση 2. *Το αντίστροφο δεν ισχύει! Γιατί ένας κύκλος δεν ορίζεται από μια τριάδα, αλλά από άπειρες τριάδες. Σ' αυτή την περίπτωση, η μοναδικότητα δεν ισχύει. Με άλλα λόγια υπάρχουν πολλοί Möbius, μετασχηματισμοί που πηγαίνουν έναν κύκλο σε ένα άλλο. Άρα, οι Mob^+ δε δρουν μοναδικά μεταβατικά στο σύνολο των κύκλων του $\overline{\mathbb{C}}$, διότι κάθε κύκλος ορίζεται από άπειρες διαφορετικές τριάδες.*

Πόρισμα 2.4. *Οι Mob^+ δρουν μεταβατικά στους δίσκους του $\overline{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Έστω D και E δύο δίσκοι στο $\overline{\mathbb{C}}$, όπου ο D προσδιορίζεται από τον κύκλο C_D στο $\overline{\mathbb{C}}$ και ο E προσδιορίζεται από τον κύκλο C_E στο $\overline{\mathbb{C}}$. Καθώς οι Möb$^+$ δρουν μεταβατικά στο σύνολο C κύκλων στο $\overline{\mathbb{C}}$, υπάρχει ένας Möbius μετασχηματισμός m που ικανοποιεί τη σχέση $m(C_D) = C_E$ και έτσι ο $m(D)$ είναι ένας δίσκος που προσδιορίζεται από τον C_E.

Ωστόσο, υπάρχουν δύο δίσκοι που προσδιορίζονται από τον C_E και δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε αν $m(D) = E$ ή ο $m(D)$ είναι ο άλλος δίσκος που προσδιορίζεται από τον C_E. Εάν $m(D) = E$, έχουμε τελειώσει.

Εάν $m(D) \neq E$, πρέπει να βρούμε έναν Möbius μετασχηματισμό που να πηγαίνει τον C_E στον εαυτό του και να ανταλλάσει τους δύο δίσκους που προσδιορίζονται από τον C_E.

Η κατασκευή αυτή δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Αρχικά εργαζόμαστε με έναν κύκλο στο $\overline{\mathbb{C}}$ που μπορούμε να καταλάβουμε, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη μεταβατικότητα των Möb$^+$ στο σύνολο των κύκλων στον $\overline{\mathbb{C}}$ για να μεταφέρουμε τη λύση μας για αυτόν τον συγκεκριμένο κύκλο σε οποιονδήποτε άλλο κύκλο.

Για τον κύκλο $\overline{\mathbb{R}}$, έχουμε ήδη βρει την απάντηση, η οποία βρίσκεται στον Möbius μετασχηματισμό $J(z) = \frac{1}{z}$. Καθώς $J(0) = \infty, J(\infty) = 0$, και $J(1) = 1$, παρατηρούμε ότι ο J πηγαίνει το $\overline{\mathbb{R}}$ στον εαυτό του. Καθώς $J(i) = \frac{1}{i} = ?i$, παρατηρούμε ότι ο J δεν πηγαίνει τον $\mathbb{H}$ στον εαυτό του, και έτσι ο J ανταλλάσει τους δύο δίσκους που προσδιορίζονται από τον $\overline{\mathbb{R}}$.

Τώρα, έστω A οποιοσδήποτε κύκλος στο $\overline{\mathbb{C}}$ και n ένας Möbius μετασχηματισμός που ικανοποιεί τη σχέση $n(A) = \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, ο Möbius μετασχηματισμός $n^{-1} \circ J \circ n$ πηγαίνει τον A στον εαυτό του και ανταλλάσει τους δύο δίσκους που προσδιορίζονται από τον A.

Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας Möbius μετασχηματισμός p έτσι ώστε $p(C_E) = C_E$ και ο p ανταλλάσει τους δύο δίσκους που προσδιορίζονται από τον C_E. Ως εκ τούτου, στην περίπτωση που $m(D) \neq E$, η σύνθεση $p \circ m$ ικανοποιεί τη σχέση $p \circ m(C_D) = p(C_E) = C_E$ και $p \circ m(D) = E$.

□

Παράδειγμα 2.10. *Θεωρείστε τους δίσκους:*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, \quad E = \{z \in \mathbb{C} : |z - (4 + 5i)| < 1\}.$$

Θέλω να βρω έναν Möbius μετασχηματισμό ώστε να στείλω τον D στον E.

Πολλοί διαφορετικοί Möbius μετασχηματισμοί πηγαίνουν τον E στον D. Κατασκευάζουμε έναν από αυτούς.

Έστω $m(z) = z - 4 - 5i$. Καθώς ο E είναι ο Ευκλείδειος δίσκος με κέντρο $4 + 5i$ και ακτίνα 1, έχουμε ότι ο $m(E)$ είναι ο Ευκλείδειος δίσκος με κέντρο $m(4+5i) = 0$ και ακτίνα 1. Εάν πάρουμε τη σύνθεση του m με τον $n(z) = 2z$, παρατηρούμε ότι $n \circ m(E)$ είναι ο Ευκλείδειος δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα 2, έτσι ώστε $n \circ m(E) = D$, όπως ζητείται. Γράφοντας λεπτομερώς τη σύνθεση $n \circ m$, παίρνουμε $n \circ m(z) = n(z - 4 - 5i) = 2z - 8 - 10i$.

Αν ο D ήταν ο εξωτερικός δίσκος, πως θα τον μετατόπιζα στο εσωτερικό του E· Με αυτήν που έχουμε, πηγαίνει το εξωτερικό στο εξωτερικό του E, όμως για να το φέρω μέσα. Θα πάρω τρία σημεία του κύκλου E και θα τα πάω στο $\mathbb{R}$ μέσω της G και θα εφαρμόσω την $J(z) = 1/z$ και μετά θα τα γυρίσω πίσω μέσω της σ^{-1}. Άρα, $\sigma \circ J \circ \sigma \circ m \circ n^{-1}$, είναι η απεικόνιση.

2.3 Ταξινόμηση των Möbius μετασχηματισμών.

Ορισμός 2.14. *Δύο Möbius μετασχηματισμοί m_1, m_2 ονομάζονται συζυγείς, εάν υπάρχει p μετασχηματισμός Möbius έτσι ώστε:*

$$m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}.$$

Σημείωση 3. *Παρατηρούμε ότι*

1. *Η δράση του m_1 στο $\overline{\mathbb{C}}$ είναι η ίδια με τη δράση του m_2 στο $p(\overline{\mathbb{C}})$. Η δράση του m_2 στο $p(\overline{\mathbb{C}}) = \{p(z)|z \in \overline{\mathbb{C}}\}$, είναι*

$$m_2(p(z)) = (p \circ m_1 \circ p^{-1})(p(z)) = p(m_1(z)).$$

2. *Εάν $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$, τότε οι m_1 και m_2 έχουν τον ίδιο αριθμό σταθερών σημείων.*

   Αναλυτικότερα, έστω z είναι σταθερό σημείο του m_1, δηλαδή $m_1(z) = z$. Τότε, το $p(z)$ είναι σταθερό σημείο του m_2. Δηλαδή

$$m_2(p(z)) = p \circ m_1 \circ p^{-1}(p(z)) = p(m_1(z)) = p(z).$$

   Άρα, η συνάρτηση $\phi : \{$ σταθερά σημεία του $m_1\} \to \{$ σταθερά σημεία του $m_2\}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή $1-1$ και επί.

Ιδέα Ταξινόμησης:

1. Κάθε Möbius μετασχηματισμός είναι συζυγής μ΄ έναν σε κανονική μορφή.

2. Ταξινόμηση των κανονικών μορφών.

Σημείωση 4. *Αν ξέρουμε πως συμπεριφέρεται ένας Möbius μετασχηματισμός σε τρία σημεία (συνήθως $0, \infty, 1$), ξέρουμε τα πάντα γι΄ αυτόν.*

Υποθέτουμε ότι ο m έχει ένα σταθερό σημείο $x \in \overline{\mathbb{C}}$, δηλαδή $m(x) = x$. Έστω $y \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{x\}$ και p ο μετασχηματισμός που στέλνει το x στο ∞, το y στο 0 και το $m(y)$ στο 1.

Εξετάζουμε τον $p \circ m \circ p^{-1}$. Οπότε

$$p \circ m \circ p^{-1}(\infty) = p(m(x)) = p(x) = \infty.$$

Άρα, ο $p \circ m \circ p^{-1}$ αφήνει σταθερό το ∞. Επομένως, $p \circ m \circ p^{-1}(z) = az + b$, με $a \neq 0$. Αλλά ο p έχει μόνο ένα σταθερό σημείο. Άρα ο $p \circ m \circ p^{-1}(z)$ δεν μπορεί να είναι η σταθερή απεικόνιση. Επομένως, η εξίσωση $az+b=z$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{C}$. Αυτό συμβαίνει, γιατί δεν έχει κανένα σταθερό σημείο στο $\mathbb{C}$, αλλά μόνο ένα σταθερό στο $\overline{\mathbb{C}}$, το ∞. Άρα $a=1$ δηλαδή $p\circ m\circ p^{-1}(z)=z+b$.

Το συμπέρασμα που προκύπτει, όταν ένας Möbius μετασχηματισμός έχει μόνο ένα σταθερό σημείο είναι:

$$p\circ m\circ p^{-1}(z)=p(m(y))=1\Rightarrow b=1,$$

δηλαδή είναι συζυγής με τον $n(z)=z+1$ κι ονομάζεται *παραβολικός*.

Παράδειγμα 2.11. *Θα δούμε πώς δουλεύει το παραπάνω με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα*

$$m(z)=\frac{z}{z+1}.$$

Βρίσκω τα σταθερά σημεία του, δηλαδή εξετάζω

$$m(z)=z\Rightarrow\frac{z}{z+1}=z.$$

Οπότε, $z=0$ είναι σταθερό σημείο, αφού $m(0)=0$. Για $z\neq 0$ και απαλείφοντας το z έχουμε,

$$\frac{1}{z+1}=1\Rightarrow 1=z+1\Rightarrow z=0,$$

που είναι άτοπο. Άρα, $z=0$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο.

Επίσης, $m(\infty)=1\neq\infty$. Επομένως, διαλέγω $y=\infty\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ και p ο μετασχηματισμός που στέλνει το 0 στο ∞, το ∞ στο 0 και το $m(\infty)=1$ στο 1.

Ο μετασχηματισμός θα είναι $p(z)=(az+b)/(cz+d)$. Άρα,

$$p(0)=\frac{b}{d}=\infty\quad\Rightarrow\quad d=0 \tag{2.9}$$

$$p(\infty)=\frac{a}{c}=0\quad\Rightarrow\quad a=0 \tag{2.10}$$

$$p(1)=\frac{b}{c}=1\quad\Rightarrow\quad b=c. \tag{2.11}$$

Καταλήγουμε ότι $p:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ είναι ο $p(z)=1/z$. Παρατηρήστε ότι $p^{-1}:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ είναι η $p^{-1}(z)=1/z$.

$$p\circ m\circ p^{-1}(z)=p\circ m(\frac{1}{z})=p\circ(\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+1})=\frac{1}{(1+z)^{-1}}=1+z.$$

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που ο m έχει δύο σταθερά σημεία, δηλαδή $m(x) = x, m(y) = y, x \neq y$. Έστω q Möbius μετασχηματισμός έτσι ώστε: $q(x) = 0, q(y) = \infty$. Τότε,

$$m^{'}(\infty) = q \circ m \circ q^{-1}(\infty) = q(m(y)) = q(y) = \infty \Rightarrow \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0,$$

$$m^{'}(0) = q \circ m \circ q^{-1}(0) = q(m(x)) = q(x) = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

και επομένως

$$m^{'}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow m^{'}(z) = \frac{a}{d}z.$$

Άρα,

$$q \circ m \circ q^{-1}(0) = az, a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Το a λέγεται πολλαπλασιαστής του m.

Παράδειγμα 2.12. *Εξετάζω την $m(z) = (2z+1)/(z+1)$. Αρχικά, βρίσκουμε τα σταθερά σημεία. Έχω*

$$m(z) = z \Rightarrow \frac{2z+1}{z+1} = z \Rightarrow 2z+1 = z^2 + z \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \overline{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ τα δύο σταθερά σημεία, δηλαδή

$$q(z) = \frac{z-x}{z-\overline{x}}, q(x) = 0, q(\overline{x}) = \infty.$$

Ο πολλαπλασιαστής a υπολογίζεται από την ισότητα

$$q \circ m \circ q^{-1}(1) = a.$$

Οπότε, $q^{-1}(1) = z$ τέτοιο ώστε

$$q(z) = 1 \Rightarrow \frac{z-x}{z-\overline{x}} = 1 \Rightarrow z - x = z - \overline{x},$$

που δεν έχει λύσεις, δηλαδή $z = \infty$. Άρα,

$$q \circ m \circ q^{-1}(1) = q(m(\infty)) = q(2) = \frac{2-x}{2-\overline{x}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = a.$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο το a εξαρτάται από το q.

Παράδειγμα 2.13. *Έστω $m(x) = x, m(y) = y$ και $n_1(x) = 0 = n_2(x), n_1(y) = \infty = n_2(y)$. Δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστής της $n_1 \circ m \circ n_1^{-1}$ είναι ίσος με τον πολλαπλασιαστή της $n_2 \circ m \circ n_2^{-1}$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι

$$n_1^{-1}(0) = x = n_2^{-1}(0) \qquad n_1^{-1}(\infty) = y = n_2^{-1}(\infty).$$

Θέτουμε

$$n_1^{-1}(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad n_2^{-1}(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Άρα,

$$n_1^{-1}(0) = \frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = n_2^{-1}(0) \qquad n_1^{-1}(\infty) = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = n_2^{-1}(\infty),$$

και $m(z) = (kz + l)/(rz + s)$.

Ξέρουμε επίσης ότι,

$$n_1 \circ m \circ n_1^{-1}(z) = az \Rightarrow m(n_1^{-1}(z)) = n_1^{-1}(az) \Rightarrow \frac{kn_1^{-1}(z) + l}{rn_1^{-1}(z) + s} = \frac{a_1 az + b_1}{c_1 az + d_1}$$

$$\Rightarrow \frac{k\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + l}{r\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + s} = \frac{a_1 az + b_1}{c_1 az + d_1} \Rightarrow \frac{k(a_1 z + b_1) + l(c_1 z + d_1)}{r(a_1 z + b_1) + s(c_1 z + d_1)} = \frac{a_1 az + b_1}{c_1 az + d_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(ka_1 + lc_1)z + (kb_1 + ld_1)}{(ra_1 + sc_1)z + (rb_1 + sd_1)} = \frac{a_1 az + b_1}{c_1 az + d_1}$$

$$\Rightarrow \exists w_1 : w_1 a_1 a = ka_1 + lc_1, \quad kb_1 + ld_1 = w_1 b_1$$

$$w_1 c_1 a = ra_1 + sc_1, \quad rb_1 + sd_1 = w_1 d_1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{w_1}\left(\frac{ka_1 + lc_1}{a_1}\right) = \frac{1}{w_1}\left(k + l\frac{c_1}{a_1}\right), \quad w_1 = \frac{kb_1 + ld_1}{b_1} = k + l\frac{d_1}{b_1}.$$

Για το $n_2 \circ m \circ n_2^{-1}$ καταλήγουμε ότι

$$b = \frac{1}{w_2}\left(k + l\frac{c_2}{a_2}\right), \quad w_2 = k + l\frac{d_2}{b_2}.$$

Παραπέρα $w_1 = w_2 \Rightarrow a = b$, άρα οι πολλαπλασιαστές είναι ίδιοι. □

Σημείωση 5. *Δύο Möbius μετασχηματισμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν είναι ανάλογοι.*

Παράδειγμα 2.14. *Έστω s Möbius μετασχηματισμός με $s(x) = \infty, s(y) = 0$ και $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ με $J(z) = 1/z$. Τότε, για $t = J \circ s$ έχουμε $t(x) = J(s(x)) = 0$ και $t(y) = J(s(y)) = \infty$. Επιπλέον $t^{-1} = s^{-1} \circ J^{-1} = s^{-1} \circ J$. Ξέρουμε ότι*

$$(t \circ m \circ t^{-1})(z) = az \Leftrightarrow J \circ s \circ m \circ s^{-1} J^{-1}(z) = az \Rightarrow J \circ s \circ m \circ s^{-1}(\frac{1}{z}) = az$$

$$\Rightarrow \; s \circ m \circ s^{-1}(\frac{1}{z}) = J^{-1}(az) \Rightarrow s \circ m \circ s^{-1}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{az},$$

για κάθε z. Για $w = 1/z$ έχουμε $s \circ m \circ s^{-1}(w) = w/a$. Σ' αυτή την περίπτωση, ο πολλαπλασιαστής είναι $1/a, a \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$. Άρα, ο πολλαπλασιαστής ορίζεται με ακρίβεια αντιστρόφου, δηλαδή ο πολλαπλασιαστής του m είναι ο a ή ο $1/a$.

Ανακεφαλαιώνοντας, μπορούμε να πούμε ότι ένας Möbius μετασχηματισμός m με δύο σταθερά σημεία είναι συζυγής με τον μετασχηματισμό $n(z) = az$, όπου a είναι ο πολλαπλασιαστής του m. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιαστής του m μπορεί να είναι a ή $1/a$.

Στην περίπτωση του $J(z) = 1/z$, ο συζυγής του n ως προς το J (ή διαφορετικά ο J συζυγής του n) είναι ο

$$J \circ n \circ J(z) = J(n(\frac{1}{z})) = J(\frac{a}{z}) = \frac{z}{a}.$$

Εάν $|a| = 1 \Rightarrow a = e^{2i\theta}$. Τότε η

$$q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{2i\theta} z,$$

είναι στροφή γύρω από το κέντρο των αξόνων με γωνία $2\theta, \theta \in (0, \pi)$ και ο m λέγεται ελλειπτικός. Δηλαδή, ο m είναι ελλειπτικός αν και μόνο αν $|a| = 1$ κι ο m έχει δύο σταθερά σημεία $(0, \infty.)$

Εάν $|a| \neq 1$ και $q \circ m \circ q^{-1}(z) = p^2 z e^{2i\theta}$ είναι η σύνθεση

1. *μιας σμίκρυνσης ($p < 1$) ή μεγέθυνσης ($p > 1$) με λόγο p^2 και*

2. *μιας (πιθανόν τετριμμένης) στροφής με γωνία 2θ.*

Σ' αυτήν την περίπτωση, ο m λέγεται λοξοδρομικός.

Τελικά αν ο m έχει

1. *σταθερό σημείο τότε $q \circ m \circ q^{-1}(z) = z + 1$, παραβολικός,*

2. *σταθερά σημεία τότε $q \circ m \circ q^{-1}(z) = z e^{2i\theta}, \theta \in (0, \pi)$ ελλειπτικός, ή $q \circ m \circ q^{-1}(z) = p^2 z e^{2i\theta}, \theta \in [0, \pi)$ λοξοδρομικός.*

2.4 Απεικόνιση με πίνακες.

Έστω $m(z) = (az+b)/(cz+d)$ *και* $n(z) = (\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$.

$$(m \circ n)(z) = m(n(z)) = \frac{an(z)+b}{cn(z)+d} = ... = \frac{a(\alpha z+\beta)+b(\gamma z+\delta)}{c(\alpha z+\beta)+d(\gamma z+\delta)} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}.$$

Άρα αν αντιστοιχίσουμε κάθε Möbius μετασχηματισμό με έναν 2×2 *πίνακα με μη μηδενική ορίζουσα τότε*

$$m \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, n \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

άρα

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}$$

και $m \circ n$ *είναι το γινόμενο των πινάκων*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}.$$

Σημείωση 6. *Κάθε Möbius μετασχηματισμός καθορίζει έναν* 2×2 *πίνακα.*

Σημείωση 7. *Εάν* A_m *είναι ο πίνακας του* m *και* A_n *ο πίνακας του* n*, τότε* $A_m \cdot A_n$ *είναι ο πίνακας της* $m \circ n$.

Σημείωση 8. *Επειδή ο* m *είναι αντιστρέψιμος, τότε* $A_{m^{-1}} = A_m^{-1}$ *και συνεπώς ο* A_m *είναι αντιστρέψιμος* 2×2 *πίνακας, άρα* $\det A_m \neq 0$ *και υπάρχει Möbius μετασχηματισμός* m*, τέτοιος ώστε* $A_m = A$.

$$\text{Υπενθύμιζουμε ότι εάν } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ τότε } A^{-1} = (ad-bc)^{-1}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 2.15. *Έστω* m *μετασχηματισμός Möbius και* A_m *ο* 2×2 *πίνακας του* m*. Τότε,* $det(A)$ *ονομάζεται η ορίζουσα του* m*. Δηλαδή, εάν* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*, η ορίζουσα του* m *είναι* $ad-bc \neq 0$.

Παράδειγμα 2.15. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$*, τότε* $A_m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *και* $\det A_m = ad-bc$*. Αντίστοιχα, αν* $\theta \neq 0$ *και* $n(z) = \frac{\theta az+\theta b}{\theta cz+\theta d}$*, τότε* $A_n = \begin{pmatrix} \theta a & \theta b \\ \theta c & \theta d \end{pmatrix}$ *και* $det(A_n) = \theta^2(ad-bc)$.

Έστω $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$, *ισούται με*

$$m(z) = \frac{\frac{az}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{cz}{\sqrt{ad-bc}} + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}},$$

με $det(A_m) = 1$. *Ορίζουμε κανονικοποίηση του* m *να είναι* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *με* $ad - bc = 1$.

Το ίχνος ενός πίνακα $Tr(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a + d$ *και ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

2. $Tr(rA) = rTr(A)$

3. $Tr(AB) = Tr(BA)$ *και συνεπώς* $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με απλές πράξεις.

Ορισμός 2.16. *Εάν* m *μετασχηματισμός Möbius και* $A_m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *τότε το ίχνος του* m *είναι το*

$$\tau(m) = (a + d)^2 = (Tr(A_m))^2,$$

όταν ο m *είναι κανονικοποιημένος.*

Σημείωση 9. *Έστω* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *ένας κανονικοποιημένος Möbius μετασχηματισμός, δηλαδή* $ad - bc = 1$. *Αλλά και ο* $m(z) = \frac{-az-b}{-cz-d}$ *είναι κανονικοποιημένος μιας και* $(-a)(-d) - (-b)(-c) = 1$. *Προσέξτε τότε ότι* $(-a - d)^2 = (a + d)^2$, *άρα το ίχνος του* m *είναι καλά ορισμένο.*

Πρόταση 2.7. $\tau(n \circ m) = \tau(m \circ n)$ *και συνεπώς* $\tau(q \circ m \circ q^{-1}) = \tau(m)$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο n κι ο m είναι κανονικοποιημένοι μετασχηματισμοί Möbius με πίνακες A_n και A_m αντίστοιχα. Τότε

$$A_{n \circ m} = A_n A_m$$

και

$$A_{m \circ n} = A_m A_n.$$

Τώρα

$$\tau(n \circ m) = (Tr(A_{n \circ m}))^2 = (Tr(A_n A_m))^2 = (Tr(A_m A_n))^2 = (Tr(A_{m \circ n}))^2 = \tau(m \circ n).$$

Άρα συζυγείς πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος. □

Εάν m παραβολικός, τότε $q \circ m \circ q^{-1}(z) = z + 1$. Επομένως,

$$\tau(m) = \tau(q \circ m \circ q^{-1}) = (1+1)^2 = 4.$$

$$A_{q \circ m \circ q^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και φυσικά και τ(ταυτοτικής) $= 4$.

Σημείωση 10. $\tau(n \circ m) \neq \tau(n)\tau(m)$.

Εάν m ελλειπτικός ή λοξοδρομικός, γράφουμε $n(z) = p \circ m \circ p^{-1}(z) = a^2 z, a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ με $A_n = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\det A_n = a^2 \neq 1$. Κάνοντας κανονικοποίηση έχουμε $A_n' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$.

Άρα, η κανονικοποιημένη του μορφή είναι $n(z) = \frac{az}{1/a} = \frac{az}{a^{-1}}$. Άρα, $\tau(n) = (a + a^{-1})^2$.

ΠΡΟΣΟΧΗ. Για να πάρουμε το ίχνος ενός Möbius μετασχηματισμού πρέπει ο m να είναι σε κανονικοποιημένη μορφή.

Στην πρώτη περίπτωση του ελλειπτικού τύπου, έχουμε $|a| = 1$ και $a = e^{i\theta}, a^{-1} = e^{-i\theta}$. Άρα, $a = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ και $a^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα $a + a^{-1} = 2\cos\theta$, οπότε $\tau(m) = (a + a^{-1})^2 = 4(\cos\theta)^2, \theta \in (0, \pi)$.

Στη δεύτερη περίπτωση του λοξοδρομικού έχουμε $a = pe^{i\theta}, a^{-1} = p^{-1}e^{-i\theta}$. Άρα, $a + a^{-1} = pe^{i\theta} + p^{-1}e^{-i\theta}$ και

$$\begin{aligned} \tau(m) &= (a + a^{-1})^2 = (pe^{i\theta} + p^{-1}e^{-i\theta})^2 \\ &= p^2 e^{2i\theta} + 2 + p^{-2}e^{-2i\theta} \\ &= p^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)] + p^{-2}[\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)] + 2 \\ &= \cos(2\theta)(p^2 + p^{-2}) + i\sin(2\theta)(p^2 - p^{-2}) + 2. \end{aligned}$$

Για $p \neq 1$, έχουμε $Im(\tau(m)) \neq 0$ για $\theta \neq 0, \theta \neq \pi/2$. Για $\theta = 0$, έχουμε $Im(\tau(m)) = 0$ και $\tau(m) = p^2 + p^{-2} + 2$. Για $\theta = \pi/2$, έχουμε $Re(\tau(m)) = 0$ και $\tau(m) = -(p^2 + p^{-2} + 2)$. Οπότε, $Im(\tau(m)) = \sin(2\theta)(p^2 - p^{-2})$. Επειδή $p \neq 1$, συνεπάγεται $p^2 \neq p^{-2}$ κι εάν $\theta \neq 0, \theta \neq \pi/2$ συνεπάγεται ότι $\sin(2\theta) \neq 0$. Επομένως, $Im(\tau(m)) \neq 0$.

Λήμμα 2.1. *Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x^{-2}$, τότε $f(x) \geq 2$ και $f(x) = 2$, αν και μόνο αν $x = 1$.*

Απόδειξη. Η $f'(x) = 2x - 2x^{-3}$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f(x)$. Οπότε, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2/x^3 = 0 \Rightarrow \frac{x^4-1}{x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = 1$, γιατί $x > 0$. Εάν $x < 1, x^4 < 1 \Rightarrow \frac{x^4-1}{x^3} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, οπότε f φθίνουσα. Εάν $x > 1, f'(x) > 0$, οπότε f αύξουσα. Στο $x = 1$ έχουμε απόλυτο ελάχιστο. Άρα, $f(x) \geq f(1) = 2$, για κάθε $x \in (0, \infty)$ και $f(x) = 2$, ισοδύναμα $x = 1$. □

Πρόταση 2.8. *Έστω m Möbius μετασχηματισμός διαφορετικός του ταυτοτικού. Τότε*

1. *Ο m παραβολικός αν και μόνο αν $\tau(m) = 4$.*

2. *Ο m ελλειπτικός αν και μόνο αν $\tau(m) \in [0, 4), \tau(m) = 4(\cos\theta)^2$.*

3. *Ο m λοξοδρομικός αν και μόνο αν είτε $Im(\tau(m)) \neq 0$, είτε $\tau(m) \in \mathbb{R}$ και $\tau(m) \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$*

Για $\theta = 0, \tau(m) = (p^2+p^{-2})+2 > 4$. Για $\theta = \pi/2, \tau(m) = -(p^2+p^{-2}+2) < 0$.

Παράδειγμα 2.16. *Έστω $m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{3}{\sqrt{2}}}$. Παρατηρώ ότι ο m είναι σε κανονικοποιημένη μορφή. Τότε, $\tau(m) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = (\frac{4}{\sqrt{2}})^2 = 16/2 = 8$. Άρα, m είναι λοξοδρομικός. Τι μπορούμε να πούμε για τον πολλαπλασιαστή του; Ο m είναι συζυγής με τον $n(z) = a^2 z$ και*

$$\tau(m) = (a + a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} + 2$$

$$\Leftrightarrow \tau(m) = a^2 + 1/a^2 + 2 \Rightarrow a^4 + (2 - \tau(m))a^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{(\tau(m) - 2) \pm \sqrt{(2 - \tau(m))^2 - 4}}{2} = \frac{\tau(m) - 2 \pm \sqrt{4 - 4\tau(m) + (\tau(m))^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{\tau(m) - 2 \pm \sqrt{-4\tau(m) + (\tau(m))^2}}{2}.$$

Άρα, $a^2 = \frac{6\pm\sqrt{64-32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{32}}{2} = \frac{6\pm4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, οπότε $a^2 = 3 + 2\sqrt{2} >$ 1.

Παράδειγμα 2.17. *Δείξτε ότι εάν $m \in Mob^+$ με ένα σταθερό σημείο $x \neq \infty$, τότε*

$$m(z) = \frac{(1 + px)z - px^2}{pz + 1 - px}.$$

Απόδειξη. Έστω $m(z) = (az+b)/(cz+d)$ και έχουμε ότι έχει μόνο ένα σταθερό σημείο $x \neq \infty$. Αυτό σημαίνει $c \neq 0$. Επίσης, η εξίσωση $m(z) = z$, έχει μοναδική λύση. Δηλαδή,

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow az+b = cz^2+dz \Leftrightarrow cz^2+(d-a)z-b = 0.$$

Για να έχει μοναδική λύση πρέπει $\Delta = (d-a)^2+4cb = 0$ και η λύση είναι $x = -\frac{d-a}{2c}$. Άρα, έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{gathered}(d-a)^2+4cb = 0\\ x = -\frac{d-a}{2c} \Rightarrow -(d-a) = 2cx\\ ad-bc = 1.\end{gathered}$$

Από τις ... και ... έχουμε ότι $b = -cx^2$ και βάση της τελευταίας και της ... έχουμε ότι $a = 2cx+d$ και

$$(2cx+d)d+c^2x^2 = 1 \Rightarrow d^2+2cxd+c^2x^2-1 = 0 \Rightarrow d = \frac{-2cx \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow d = 1-cx.$$

Τότε, $a = 2cx+1-cx = 1+cx$. Θέτουμε $c = p$ και $m(z) = \frac{(1+px)z-px^2}{pz+1-px}$. □

Παράδειγμα 2.18. *Έστω $m \in Mob^+$ με δύο σταθερά σημεία x, y με $x \neq \infty \neq y$. Τότε*

$$m(z) = \frac{\frac{x-ya}{x-y}z + \frac{xy(a-1)}{x-y}}{\frac{1-a}{x-y}z + \frac{xa-y}{x-y}},$$

όπου a ο πολλαπλασιαστής του m.

Απόδειξη. Έστω $m = \begin{pmatrix} r & s \\ v & w \end{pmatrix}$. Υπάρχει $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ με $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ έτσι ώστε $q(x) = 0, q(y) = \infty$ και $q \circ m \circ q^{-1}(z) = az$. Επειδή $q(x) = 0$ συνεπάγεται $\alpha x + \beta = 0 \Rightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}, \alpha \neq 0$ κι επειδή $q(y) = \infty$ συνεπάγεται $\gamma y + \delta = 0 \Rightarrow y = \frac{-\delta}{\gamma}, \gamma \neq 0$. Οπότε $q^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Άρα $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \alpha z \Rightarrow m \circ q^{-1}(z) = q^{-1}(\alpha z)$. Έχουμε ότι

$$m \circ q^{-1} = \begin{pmatrix} r & s \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\delta - s\gamma & -\beta r + s\alpha \\ v\delta - w\gamma & -\beta v + w\alpha \end{pmatrix}$$

και

$$q^{-1}(\alpha z) = \frac{\delta a z - \beta}{-\gamma \alpha z + \alpha} \to \begin{pmatrix} \delta\alpha & -\beta \\ -\gamma\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} r\delta - s\gamma &= \delta\alpha k && (2.12)\\ v\delta - w\gamma &= -\gamma\alpha k && (2.13)\\ -\beta r + s\alpha &= -\beta k && (2.14)\\ -\beta v + w\alpha &= -\alpha k. && (2.15) \end{aligned}$$

Απαλείφουμε το k κι έχουμε το αποτέλεσμα. □

Έστω $M_2(\mathbb{C})$ *το σύνολο όλων των* 2×2 *πινάκων. Με* $GL_2(\mathbb{C})$ *συμβολίζουμε τους* 2×2 *αντιστρέψιμους πίνακες. Συγκεκριμένα*

$$GL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\} = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A \text{ αντιστρέψιμος }\}.$$

Με $SL_2(\mathbb{C})$ *το σύνολο* $SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$. *Τα προηγούμενα μας δείχνουν ότι έχουμε μια συνάρτηση* $F : GL_2(\mathbb{C}) \to Mob^+$. *Η αντιστοιχία* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to m_A$, *όπου* $m_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *μας δίνει μια συνάρτηση* $SL_2(\mathbb{C}) \to Mob^+$. *Έχουμε ότι* $F(A) = m_A$. *Ο πυρήνας της* F *είναι τα* $A \in GL_2(\mathbb{C})$, *έτσι ώστε* $F(A) = id \Rightarrow m_A = id \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z$ *για κάθε* $z \in \overline{\mathbb{C}}, \Rightarrow a = k, b = 0, c = 0, d = k \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kI$. *Άρα,* $ker(F) = \{kI : k \neq 0\}$ *και η* F *επάγει έναν επιμορφισμό* $GL_2(\mathbb{C})/ker(F) \overset{\cong}{\to} Mob^+$. *Η* $PGL_2(\mathbb{C})$ *είναι η προβολική γενική γραμμική ομάδα. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το κέντρο της* $GL_2(\mathbb{C})$,
δηλαδή το σύνολο $Z = \{X \in GL_2(\mathbb{C}) : XA = AX, \forall A \in GL_2(\mathbb{C})\}$.
Έστω $X = \begin{pmatrix} r & s \\ v & w \end{pmatrix}$. *Τότε*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ v & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r & r+s \\ v & v+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+v & s+w \\ v & w \end{pmatrix} \Rightarrow v = 0, r = w.$$

Άρα, $X = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = rI, r \in \mathbb{C}$. *Όμοια,*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} \Rightarrow s = 0.$$

Επομένως, $Z = \{aI : a \in \mathbb{C}\} = kerF$.

2.5 Ανακλάσεις.

Όσον αφορά στις ανακλάσεις, ορίζουμε $C : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, *με* $C(z) = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{z} & , z \neq \infty, \\ \infty & , z = \infty, \\ 0 & , z = \infty. \end{pmatrix} \right.$

Πρόταση 2.9. *Ο* C *είναι ομοιομορφισμός του* $\overline{\mathbb{C}}$.

Απόδειξη. Ότι είναι $1-1$ και επί είναι προφανές. Μένει η συνέχεια. Παρατηρούμε ότι $C^{-1} = C$. Άρα, αρκεί να δείξουμε τη συνέχεια για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός του C. □

Σημείωση 11. *Ο* C *δεν ανήκει στους* Mob^+. *Συγκεκριμένα, αν* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \overline{z}$ *για κάθε* z, *τότε* $m(r) = r$ *για κάθε* $r \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$. *Άτοπο!*

Η γενική ομάδα Möbius (συμβολίζουμε Möb) είναι η υπο-ομάδα των $Homeo(\overline{\mathbb{C}})$ *που παράγεται από το* Mob^+ *και το* C. *Άρα, κάθε στοιχείο της γράφεται*

$$p = m_{k+1} \circ C \circ m_k \circ C \circ m_{k-1} \circ \ldots \circ C \circ m_1, \text{ όπου} m_i \in Mob^+.$$

Όλες οι ιδιότητες του Mob^+ *μεταφέρονται στο* Mob. *Συγκεκριμένα,*
- *Μεταθέτει τις τριάδες διακριτών στοιχείων του* $\overline{\mathbb{C}}$.
- *Μεταθέτει τους κύκλους στο* $\overline{\mathbb{C}}$.
- *Μεταθέτει τους δίσκους στο* $\overline{\mathbb{C}}$.
- *Δε δρα μοναδικά στις τριάδες.* $[C(r) = r$ *για κάθε* $r \in \mathbb{R}$ *και* $c \neq 1]$.

Συμβολίζουμε με $Homeo^C = \{h \in Homeo(\overline{\mathbb{C}}) : h(\text{κύκλος}) = \text{ κύκλος}\}$. *Ξέρουμε ότι* $Mob^+ \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. *Ένας κύκλος* A *αποτελείται από τα* $z \in \mathbb{C}$ *με* $A = z : |z - a| = r$, *όπου* $a =$ *κέντρο,* $r =$ *ακτίνα. Το* $C(A)$ *είναι ο κύκλος με* $|\mathbb{C}(z) - a| = |\overline{z} - a| = \overline{|}z - \overline{a}| = |z - \overline{a}|$. *Επομένως, η* C *απεικονίζει τον κύκλο* A *στον κύκλο* $z : |z - \overline{a}| = r$. *Άρα,* $Mob \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Πρόταση 2.10. *Κάθε στοιχείο του* Mob *είναι της μορφής*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ή

$$n(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}/, , ad - bc \neq 0.$$

Γεωμετρικά, η δράση του C *είναι ανάκλαση ως προς τον* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$, *δηλαδή είτε για κάθε* $z \in \overline{\mathbb{R}}, C(z) = z$, *είτε για κάθε* $z \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{R}}$, *όπου* $\mathbb{R}$ *είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα το* z *και το* $C(z)$. *Το* $\overline{\mathbb{R}}$

είναι κύκλος στο $\overline{\mathbb{C}}$. *Με δεδομένο το* C *μπορούμε να ορίσουμε ανάκλαση ως προς οποιοδήποτε κύκλο* A *στο* $\overline{\mathbb{C}}$. *Ξέρουμε ότι υπάρχει* $m \in Mob^+$ *έτσι ώστε* $m(\overline{\mathbb{R}}) = A$. *Ορίζουμε την ανάκλαση ως προς το* A *να είναι* $C_A = m \circ C \circ m^{-1}$.

Παράδειγμα 2.19. $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, m : \overline{\mathbb{R}} \to S^1, (0,1,\infty) \to (i,1,-i)$ *με* $m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}}}$. *Οπότε, η ανάκλαση ως προς τον κύκλο* A *είναι* $C_A(z) = m \circ c \circ m^{-1} = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$. *Άρα,* $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$. *Τώρα, αν* $n : (0,1,\infty) \to (1,-1,i)$, *τότε* $n(z) = \frac{\frac{1-i}{\sqrt{2}}z+\frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}z+\frac{i}{\sqrt{2}}}$ *και* $n \circ c \circ n^{-1}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$.

Ειδικές περιπτώσεις.

1. *Έστω* A *ένας Ευκλείδειος κύκλος με κέντρο* a *και ακτίνα* r. *Τότε* $C_A(z) = \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a$.

2. *Έστω* A *μια Ευκλείδεια γραμμή που περνάει από το* a *και σχηματίζει γωνία* θ *με το* $\mathbb{R}$. *Τότε* $C_A(z) = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{a}) + a$.

Παράδειγμα 2.20. $A = S^1, C_A(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$. *Ο* A *είναι ο Ευκλείδειος κύκλος κέντρου* a *και ακτίνας* p. *Έστω* $p \in Mob^+$, *ώστε* $p(S^1) = A$, *δηλαδή* $p(z) = pz+a$. *Έστω* $z \in S^1$. *Τότε* $|z| = 1$. *Επομένως,* $|p(z)-a| = |pz+a-a| = |pz| = p|z| = p \Rightarrow p(z) \in A$.

$$\begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p & -a/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p^{-1}(z) = (1/p)z - a/p$. *Άρα,*

$$C_A = p \circ Ccircp^{-1}(z) = p \circ C(\frac{1}{p}z - a/p) = p\left(\frac{1}{\overline{\overline{\frac{1}{p}z - a/p}}}\right) = p\left(\frac{p}{\overline{z}-\overline{a}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a = \frac{p^2 + a(\overline{z}-\overline{a})}{\overline{z}-\overline{a}} = \frac{a\overline{z} + (p^2 - |a|^2)}{\overline{z}-\overline{a}}.$$

Αν A *είναι Ευκλείδεια γραμμή που περιέχει το* $a \in \mathbb{C}$ *και σχηματίζει γωνία* θ *με το* $\mathbb{R}$. *Τότε* $p \in Mob^+, p(\mathbb{R}) = A, p(z) = e^{i\theta}z + a$. *Έχουμε*

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & -ae^{-i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$C_A(z) = p \circ C \circ p^{-1}(z) = p \circ C(e^{-i\theta} z - ae^{-i\theta}) = p(\overline{e^{-i\theta} z - ae^{-i\theta}})$$

$$= p(e^{i\theta}\overline{z} - \overline{a}e^{i\theta}) = e^{i\theta}(e^{i\theta}\overline{z} - \overline{a}e^{i\theta}) + a = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{a}) + a = e^{2i\theta}\overline{z} + (a - e^{2i\theta}\overline{a}).$$

Πρόταση 2.11. *Κάθε στοιχείο του Mob μπορεί να γραφεί ως σύνθεση πεπερασμένου αριθμού ανακλάσεων ως προς κύκλους.*

Απόδειξη. Καθώς ο Möb παράγεται από τους Möb$^+$ και $C(z) = \overline{z}$, και καθώς ο Möb$^+$ παράγεται από τους $J(z) = \frac{1}{z}$ και $m(z) = az + b$ με $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να διαφοροποιήσουμε την πρόταση για αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Από τον ορισμό, ο C είναι ανάκλαση στον $\overline{\mathbb{R}}$. Μπορούμε να εκφράσουμε τον J ως τη σύνθεση του $C(z) = \overline{z}$ και της ανάκλασης $c(z) = \frac{1}{z}$ στον S^1.

Αρκεί να γράψουμε τις συναρτήσεις $m(z) = az+b$ ως σύνθεση ανακλάσεων. Οπότε $C_A(z) = \frac{p^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a = \frac{a\overline{z}+(p^2-|a|^2)}{\overline{z}-\overline{a}}$ και $C_{A'}(z) = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{a}) + a = e^{2i\theta}\overline{z} + (a - e^{2i\theta}\overline{a})$. Έχουμε, λοιπόν, $C_A(z) = \frac{p^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a, C_B(z) = \frac{\sigma^2}{\overline{z}-\overline{b}} + b$ και

$$C_A \circ C_B(z) = C_A(\frac{\sigma^2}{\overline{z} - \overline{b}} + b) = \frac{p^2}{\frac{\sigma^2}{z-b} + \overline{b} - \overline{a}} + a$$

$$= \frac{p^2(z-b)}{\sigma^2 + (\overline{b} - \overline{a})(z-b)} + a = \frac{p^2 z - (p^2)b}{(\overline{b} - \overline{a})z + (\sigma^2 - (\overline{b} - \overline{a})b)} + a.$$

Οπότε $b = a, \sigma = 1$ και $C_A \circ C_B(z) = (p^2)z - (p^2)a + a, p^2 \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, a = \frac{b}{1-p^2}, m = C_A \circ C_B$. Άρα $C_{A'}(z) = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{a}) + a, C_{B'}(z) = e^{2i\phi}(\overline{z} - \overline{b}) + b$ και

$$C'_A \circ C'_B(z) = C'_A(\exp 2i\phi(\overline{z} - \overline{b}) + b) = e^{2i\theta}\overline{e^{2i\phi}(\overline{z} - \overline{b})} + (\overline{b} - \overline{a}) + a$$

$$= e^{2i\theta}(e^{-2i\phi}(z - b) + \overline{b} - \overline{a}) + a = e^{2i(\theta-\phi)}(z - a) + a$$

$$= e^{2i(\theta-\phi)}z - a(e^{2i(\theta-\phi)} - 1).$$

Όμως, $|a| = 1, a = e^{2i(\theta-\phi)}, \theta \neq \phi\, a = \frac{b}{1-e^{2i(\theta-\phi}}$ και $m = C_{A'} \circ C_{B'}$. Άρα $m(z) = az + b$ συνεπάγεται ή $a > 0$ ή $|a| = 1$.

Γενικά, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, a = |a|e^{i\theta}$. Έχουμε $m_1(z) = pz, m_2(z) = e^{i\theta}z + b$ και $m = m_2 \circ m_1$. Η m είναι σύνθεση ανακλάσεων, επειδή m_1 και m_2 είναι συνθέσεις ανακλάσεων. Αν $a = 1, \theta = 0$, τότε $C_{A'}(z) = \overline{z} + a - \overline{a} = \overline{z} + 2iIm(a), m(z) = z + b$. Εάν $b \in i\mathbb{R}$, τελειώσαμε, γιατί $m = C_{A'} \circ C$. Οπότε, $C_{A'} \circ C(z) = C_{A'}(\overline{z}) = \overline{z} + 2iIm(a), b = 2iIm(a)$. □

Θεώρημα 2.4. $Mob = Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Απόδειξη. Ήδη δείξαμε ότι οι Mob διατηρούν τους κύκλους. Άρα, $Mob \subset Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. Το αντίστροφο είναι πολύ δύσκολο. Δίνουμε απλά μια γεύση της απόδειξης. Έστω $f \in Homeo^C(\mathbb{C})$. Έστω $p \in Mob^+$ και $(f(0), f(1), f(\infty)) \to (0, 1, \infty)$. Τότε, $p \circ f : (0, 1, \infty) \to (0, 1, \infty)$. Επίσης, $p \circ f \in Homeo^C(\mathbb{C}) \Rightarrow p \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (γιατί διατηρεί το $\overline{\mathbb{R}}$ και στέλνει το ∞ στο ∞). Άρα, είτε $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ είτε $p \circ f(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$.

Στην πρώτη περίπτωση, θέτουμε $m = p$ και στη δεύτερη $m = C \circ p$. έτσι έχουμε $m \in Mob, mf(0, 1, \infty) \to (0, 1, \infty)$ και $mf(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Θα δείξουμε ότι $mf = 1_{\overline{\mathbb{C}}} \Rightarrow f = m^{-1} \in Mob$. Για να δείξουμε ότι $m \circ f = 1_{\mathbb{H}}$, αρκεί να δείξουμε ότι $m \circ f(q) = q$, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Επειδή $m \circ f$ συνεχής, έχουμε $m \circ f(z) = \lim_{n \to \infty} mf(z_n) = \lim_{\to \infty} z_n = z$.

Έστω $Z = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : m \circ f(z) = z\}$ και $Z \neq \emptyset$, γιατί $0, 1, \infty \in Z$. Επειδή $m \circ f(\infty) = \infty$ και $m \circ f \in Homeo^C(\overline{C})$ σημαίνει ότι η $m \circ f$ στέλνει Ευκλείδειες γραμμές σε Ευκλείδειες γραμμές κι Ευκλείδειους κύκλους σε Ευκλείδειους κύκλους.

Έστω X, Y δύο Ευκλείδειες γραμμές που τέμνονται στο z_0. Εάν $mf(X) = X, mf(Y) = Y$, τότε $mf(z_0) = z_0$. Για $s \in \mathbb{R}, v(s)$ είναι η κάθετη γραμμή που περιέχει το s και $H(is)$ είναι η οριζόντια γραμμή που περιέχει το is. Έστω H οριζόντια. Επειδή $mf(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\mathbb{R} \cap \mathbb{H} = \emptyset$, συνεπάγεται ότι $mf(\mathbb{R}) \cap mf(H) = \emptyset \Rightarrow mf(H)$ είναι οριζόντια γραμμή. Αλλά $H, mf(H)$ είναι οριζόντιες γραμμές, είτε κι οι δύο στο $\mathbb{H}$, είτε κι οι δύο στο $-\mathbb{H}$.

Έστω A με κέντρο $1/2$ κι ακτίνα $1/2, mf(v(0))$ η εφαπτόμενη στο $mf(0)$ του $mf(A)$ και $mf(v(1))$ είναι η εφαπτόμενη στο $mf(1)$ του $mf(A)$. Τότε, $v(0), v(1)$ είναι παράλληλες και συνεπάγεται ότι $mf(v(0)), mf(v(1))$ είναι παράλληλες. Δηλαδή $mf(v(0)) = v(0), mf(v(1)) = v(1) \Rightarrow mf(A) = A$. Αυτό δε σημαίνει ότι $A \subset Z$.

Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τις $H(i/2)$ και $H(-i/2)$. Οπότε, $mfH(i/2) = H(i/2), mfH(-i/2) = H(-i/2)$. Αντίστοιχα, $H(i/2) \cap v(0) = i/2 \in Z$ και $H(i/2) \cap v(1) = 1 + i/2 \in Z$. Όμοια, $-i/2 \in Z$ και $1 - i/2 \in Z$.

Κάθε ζεύγος σημείων στο Z ορίζει μια ευθεία, η οποία αντιστοιχεί στον εαυτό της. Κάθε τριάδα μη-συνευθειακών σημείων στο Z ορίζουν έναν κύκλο που αντιστοιχεί στον εαυτό του. Οι τομές αυτών μας δίνουν σημεία στο Z κι ούτω καθεξής. Έτσι φτιάχνουμε ένα πυκνό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{C}}$ στο Z και τελειώσαμε. $\square$

2.6 Διατήρηση του $\mathbb{H}$.

Ορισμός 2.17. $Mob(\mathbb{H}) = \{m \in Mob : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$.

Ο $m \in Mob$ είναι σύμμορφη συνάρτηση, δηλαδή η m διατηρεί γωνίες είτε μεταξύ κύκλων, είτε μεταξύ ευθειών, είτε μεταξύ κύκλων κι ευθειών.

Θεώρημα 2.5. *Εάν $m \in Mob(\mathbb{H})$, τότε το m απεικονίζει υπερβολικές γραμμές σε υπερβολικές γραμμές.*

Απόδειξη. Ο m στέλνει κύκλους κάθετους στο $\overline{\mathbb{R}}$ σε κύκλους κάθετους στον $\overline{\mathbb{R}}$ ή σε ευθείες κάθετες στον $\overline{\mathbb{R}}$. Το ίδιο και με τις ευθείες κάθετες στον $\overline{\mathbb{R}}$. Έχουμε ότι,

$$Mob(\mathbb{H}) = \{m \in Mob : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$$

και

$$Mob^{+}(\mathbb{H}) = \{m \in Mob^{+} : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H} < Mob(\mathbb{H}).$$

Δηλαδή, $Mob^{+}(\mathbb{H}) = Mob^{+} \cap Mob(\mathbb{H})$, και $\mathbb{H}$ είναι ο δίσκος στο $\overline{\mathbb{C}}$ με σύνορο το $\overline{\mathbb{R}}$. Οπότε, $Mob(\overline{\mathbb{R}}) = m \in Mob : m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.

Αν $m \in Mob$, τότε είτε $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, είτε $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, ad - bc \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των a, b, c, d έτσι ώστε $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Ξέρουμε ότι $C(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$. Οπότε, $m(\infty) = a/c, m^{-1}(\infty) = -d/c, m^{-1}(0) = -b/a$ ανήκουν στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Υποθέτουμε ότι $a \neq 0, c \neq 0$. Τότε, $a/c, -d/c, -b/a$ ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Θα εκφράσουμε όλους τους όρους χρησιμοποιώντας το c κι έχουμε $a = m(\infty)c, b = -m^{-1}(0)a = -m^{-1}(0)m(\infty)c, d = -m^{-1}(\infty)c$. Τότε

$$m(z) = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c},$$

με $1 = ad - bc = c^2[-m(\infty)m^{-1}(\infty) + m^{-1}(0)m(\infty)]$. Άρα, $c \in \mathbb{R}$ ή $c \in i\mathbb{R}$, έτσι ώστε $c^2 \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, όλοι οι συντελεστές είναι είτε πραγματικοί είτε καθαρά φανταστικοί αριθμοί (έτσι ώστε να είναι η ορίζουσα ίση με 1).

Αν $c = 0, a \neq 0$, τότε $m(z) = az + b$. Έχουμε $m^{-1}(0) = -b/a, m(1) = a + b$, με a, b να ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Οπότε, $b = -am^{-1}(0), b = m(1) - a$. Αν $c \neq 0, a = 0$, τότε $m(z) = \frac{b}{cz+1}$ με $m(1) = \frac{b}{c+1}, m^{-1}(\infty) = -1/c \in \mathbb{R}$. Οπότε, $b = m(1)(c + 1)$ με $b, c \in \mathbb{R}$. Εάν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ή $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$, τότε $m(0), m(\infty), m^{-1}(\infty)$ είναι όλοι στο $\overline{\mathbb{R}}$ κι άρα παίρνουν το $\overline{\mathbb{R}}$ στον εαυτό του. □

Θεώρημα 2.6. *Ο $m \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$ έχει τη μορφή*

1. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ή $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$,

2. $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ή $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$.

Έστω $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ *είναι ένας κύκλος* $Mob(A) = \{m \in Mob : m(A) = A\}$. *Έστω* $p \in Mob$ *και* $p(\overline{\mathbb{R}}) = A$ *και* $m \in Mob(A)$. *Τότε* $p^{-1} \circ m \circ p = n \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$. *Αυτό γιατί* $n(\overline{\mathbb{R}}) = p^{-1} \circ m \circ p(\overline{\mathbb{R}}) = p^{-1}m(A) = p^{-1}(A) = \overline{\mathbb{R}}$. *Άρα,*

$$Mob(A) = p \circ n \circ p^{-1} : n \in Mob(\overline{\mathbb{R}}).$$

$$M_1 = p \circ n \circ p^{-1} : n \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$$

είναι ίσο με το σύνολο

$$M_2 = q \circ n \circ q^{-1} : n \in Mob(\overline{\mathbb{R}}).$$

Ξέρουμε ότι $p(\overline{\mathbb{R}}) = A = q(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow p^{-1}q(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow p^{-1} \circ q = t \in Mob(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow q = p \circ t$, *με* $t \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$. *Για* $n \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$, *έχουμε* $q \circ n \circ q^{-1} = p \circ t \circ m \circ (p \circ t)^{-1} \in M_1$ *το οποίο ισούται με* $p \circ t \circ m \circ t^{-1} \circ p^{-1}$ *ανήκει στο* $Mob(\overline{\mathbb{R}})$. *Άρα,* $M_2 \subset M_1$. *Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι* $M_1 \subset M_2$, *οπότε* $M_1 = M_2$.

Παράδειγμα 2.21. *Υπολογίστε το* $Mob(S^1)$, *όπου* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. *Έστω*

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}, m(\overline{\mathbb{R}}) = S^1,$$

με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

Αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *ο πίνακας ενός τυχαίου στοιχείου του Möb τότε η*

$$m^{-1}(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2}}}{-\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+ic & b+id \\ ai+c & bi+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+ic-bi-d & -ai+c+b+id \\ ai+c+b-di & a-ic+bi+d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-d+i(c-b \\ c+b+i(a- \end{pmatrix}$$

Κάθε στοιχείο του $Mob(\overline{\mathbb{R}})$ είτε αφήνει αναλλοίωτους τους δύο δίσκους που ορίζει το $\overline{\mathbb{R}}$, είτε τους εναλλάσσει. Για να προσδιορίσουμε τι ακριβώς συμβαίνει, υπολογίζουμε την εικόνα ενός σημείου που δεν ανήκει στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα, $m \in Mob(\mathbb{H})$ ισοδύναμα $Im(m(i)) > 0$.

1. *Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}, m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, m \in Mob(\overline{\mathbb{R}})$. Τότε*

   $$m(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(b+ai)(d-ic)}{d^2+c^2} = \frac{(bd+ac)+i(ad-bc)}{d^2+c^2} = \frac{(bd+ac)+i}{d^2+c^2}.$$

   Οπότε, $Im(m(i)) = \frac{1}{d^2+c^2} > 0$.

2. *Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, τότε $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, οπότε*

   $$m(i) = \frac{-ai+b}{-ci+d} = \frac{(b-ai)(d+ci)}{d^2+c^2} = \frac{(bd+ac)+i(cb-ad)}{d^2+c^2}.$$

   Οπότε, $Im(m(i)) = \frac{-1}{d^2+c^2} < 0$, άρα δεν ανήκει στην $Mob(\mathbb{H})$.

3. *Έστω $a, b, c, d \in i\mathbb{R}, ad-bc = 1, m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{i\alpha z+i\beta}{i\gamma z+i\delta}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Τότε*

   $$m(i) = \frac{-\alpha+i\beta}{-\gamma+i\delta} = \frac{(-\alpha+i\beta)(-\gamma-i\delta)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

   Οπότε, $Im(m(i)) = \frac{-\beta\gamma+\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{-1}{\gamma^2+\delta^2} < 0$, άρα δεν ανήκει στην $Mob(\mathbb{H})$.

4. *Έστω $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο ότι δεν ανήκει στο $Mob(\mathbb{H})$.*

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.7. *Εάν $m \in Mob(\mathbb{H})$, τότε είτε*

1. *$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1$ είτε*

2. *$m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, a, b, c, d \in i\mathbb{R}, ad-bc = 1$.*

Πόρισμα 2.5. *Εάν $m \in Mob^+(\mathbb{H})$, τότε $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, και $ad-bc = 1$.*

Παράδειγμα 2.22. *Ξέρουμε ότι η $Mob(\mathbb{H})$ παράγεται από τους $m(z) = az+b, a>0, b\in\mathbb{R}$, τον $k(z) = -1/z$, και τον $B(z) = -\overline{z}$. Για να φτιάξουμε την κατηγορία a) του Θεωρήματος, παίρνουμε τη σύνθεση των $m(z)$ και $k(z)$. Δηλαδή $k\circ m(z) = \frac{-1}{az+b}$. Οπότε, $n\circ k\circ m(z) = c\frac{-1}{az+b}+d = \frac{adz+(db-c)}{az+b}, n(z) = cz+d$, με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ και $c>0$. Άρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $a,c,d\in\mathbb{R}, c>0$ και $k\circ m(z) = \frac{-}{cz+d}az+b = \frac{(-c)z-d}{az+b}, a\in\mathbb{R}$. Οπότε κατασκευάσαμε όλες τις συναρτήσεις της κατηγορίας a του Θεωρήματος.*

Για την κατηγορία b) του Θεωρήματος, έχουμε $k\circ B(z) = 1/z = i/i\overline{z} = B\circ k(z)$. Οπότε $m\circ B(z) = -a\overline{z}+b = \frac{-ai\overline{z}+bi}{i}, B\circ m(z) = -\overline{az+b} = -a\overline{z}-b = \frac{-ai\overline{z}-bi}{i}$. Άρα

$$a\frac{1}{\overline{z}}+b = \frac{a+b\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{biz+ai}{i\overline{z}} = \frac{cbi\overline{z}+cai}{ci\overline{z}}.$$

Φτιάξαμε, λοιπόν, την κατηγορία ii) του Θεωρήματος για $d\neq 0$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε $m(z) = \frac{ai\overline{z}+bi}{ci\overline{z}}$. Έχουμε $k\circ m(z) = \frac{-ci\overline{z}}{ai\overline{z}+bi}$. Άρα, κατασκευάσαμε $n(z) = \frac{ai\overline{z}}{ci\overline{z}+di}$. Αν $m\circ n(z) = r\frac{ai\overline{z}}{ci\overline{z}+di}+s = \frac{rai\overline{z}+sci\overline{z}+sdi}{ci\overline{z}+di}$.

Πρόταση 2.12. *Η αντανάκλαση ως προς έναν κύκλο του $\overline{\mathbb{C}}$ είναι καλά ορισμένη.*

Απόδειξη. Εάν $m\in Mob(\overline{\mathbb{R}})$, τότε $c\circ m = m\circ c$. Εάν $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, τότε $c\circ m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, και $m\circ c(z) = m(\overline{z}) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$. Τώρα, αν $m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, με $a,b,c,d\in i\mathbb{R}$ τότε $c\circ m(z) = \frac{-az-b}{-cz-d} = \frac{az+b}{cz+d} = m\circ c(z)$.

Οι m,n ανήκουν στο Mob και $m(\overline{\mathbb{R}}) = n(\overline{\mathbb{R}}) = A$ (ο κύκλος με τον οποίο αρχίσαμε), συνεπάγεται $n^{-1}\circ m\in Mob(\overline{\mathbb{R}}), n^{-1}\circ m = p, p\circ c = c\circ p$ και $m = np$. Άρα $m\circ c\circ m^{-1} = n\circ p\circ c\circ p^{-1}\circ n^{-1} = n\circ c\circ n^{-1}$. □

Παράδειγμα 2.23. *Έστω $m\in Mob$, με $m(i) = i$. Τότε $m(i) = i \Rightarrow \frac{ai+b}{ci+d} = i \Rightarrow ai+b = -c+di \Rightarrow a = d, b = -c$ με $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ και $ad-bc = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$. Άρα υπάρχει γωνία $\theta\in[0,\pi)$ τέτοια ώστε $a = cos\theta, b = sin\theta$ και ο m έχει πίνακα $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.*

Έστω τώρα ότι $m(z) = \frac{\alpha i\overline{z}+\beta i}{\gamma i\overline{z}+\delta i}$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, και $\alpha\delta-\beta\gamma = -1$. Η $m(i) = i \Rightarrow \frac{\alpha i(-i)+\beta i}{\gamma i(-i)+\delta i} = i \Rightarrow \frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \Rightarrow \alpha = -\delta, \beta = \gamma$ και $\alpha\delta-\beta\gamma = -1 \Rightarrow (\alpha)^2+(\beta)^2 = 1$.

2.7 Ιδιότητες μεταβατικότητας στο Möb($\mathbb{H}$).

Πρόταση 2.13. *Ο $Mob(\mathbb{H})$ δρα μεταβατικά στο $\mathbb{H}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $w \in \mathbb{H}$ υπάρχει $m \in$ Μοβ($\mathbb{H}$) τέτοιο ώστε $m(w) = i$. Έστω $w = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$. Πρώτα θα μετακινήσουμε το w στον θετικό φανταστικό ημιάξονα. Έστω $p(z) = z - a$. Τότε ο $p \in$ Μοβ($\mathbb{H}$) και $p(w) = bi$. Στη συνέχεια, ορίζω q με $q(z) = \frac{z}{b}$. Ο $q \in$ Μοβ($\mathbb{H}$) και $q(bi) = i$. Άρα, για $m = q \circ p$, έχουμε ότι $m \in$ Μοβ($\mathbb{H}$) και $m(w) = q \circ p(w) = q(bi) = i$. Ιδιαιτέρως ο $m \in$ Μοβ$^+$($\mathbb{H}$). □

Πόρισμα 2.6. *Ο Mob($\mathbb{H}$) δρα μεταβατικά στις υπερβολικές γραμμές.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι ο Möb($\mathbb{H}$) στέλνει υπερβολικές γραμμές σε υπερβολικές γραμμές. Επιπλέον, τα στοιχεία της Möb($\mathbb{H}$) δρουν μεταβατικά στα σημεία.

Άρα μας αρκεί να κατασκευάσουμε ένα στοιχείο του M΄ob($\mathbb{H}$) που να απεικονίζει την τυχαία υπερβολική γραμμή l στο θετικό ημιάξονα I του $\mathbb{H}$. Αρκεί δηλαδή να βρούμε στοιχείο του M΄ob($\mathbb{H}$) που να πηγαίνει τα οριακά σημεία της l στα 0 και ∞. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $y < x$, τότε ο $m(z) = \frac{z-x}{z-y}$ ικανοποιεί τις $m(x) = 0, m(y) = \infty$ και εφόσον η ορίζουσα του m είναι η $x - y > 0$, έχουμε ότι το $m \in$ M΄οβ$^+$($\mathbb{H}$). □

Έχουμε δει ήδη ότι ένα στοιχείο $m \in$ Μοβ($\mathbb{H}$) έχει δύο μορφές:

1. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *με* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *και* $ad - bc = 1$,
2. $m(z) = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$, *με* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in i\mathbb{R}$ *και* $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Στη συνέχεια, σκοπός μας είναι να δούμε πώς δρα ένα στοιχείο της M΄οβ($\mathbb{H}$) στο $\mathbb{H}$. Αρχίζουμε μελετώντας τά σταθερά σημεία του.

Έστω ότι $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *με* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *και* $ad - bc = 1$. *Ψάχνουμε* $z \in \overline{\mathbb{C}}$ *ώστε* $m(z) = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow p(z) = cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

Αν $c = 0$, *τότε* $cz^2 + (d-a)z - b = 0 \Rightarrow c + \frac{d-a}{z} - \frac{b}{z^2} = 0$, *οπότε το* ∞ *είναι σταθερό σημείο. Αν επιπλέον* $d - a = 0$, *δηλαδή* $d = a$, *τότε* $m(z) = z$, *δηλαδή ο* m *είναι η ταυτοτική, η οποία έχει άπειρα σταθερά σημεία. Αν* $c = 0$ *και* $d \neq a$, *τότε* $z = \frac{b}{d-a}$.

Άρα, αν $c = 0$, *τότε είτε έχουμε ένα σταθερό σημείο, το* $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, *είτε δύο σταθερά σημεία, το* ∞ *και το* $\frac{b}{d-a} \in \mathbb{R}$.

Αν $c \neq 0$, *τότε* $z = \frac{1}{2c}[(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}]$, *έχουμε δύο σταθερά σημεία, εκτός εάν* $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = 0$, *οπότε έχουμε ακριβώς μία ρίζα. Σ' αυτή την περίπτωση,* $(d-a)^2 + 4bc = 0 \Leftrightarrow d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc = 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 - 4(ad - bc) = 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 - 4 = 0$.

Αν έχω δύο πραγματικές ρίζες, τότε $(d-a)^2 + 4bc > 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 - 4 > 0$. *Αν έχω δύο μιγαδικές ρίζες, τότε* $(d-a)^2 + 4bc < 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 - 4 < 0$.

Αν ο m έχει σταθερό σημείο στο $\mathbb{H}$, τότε ο m είναι ελλειπτικός. Αν ο m έχει ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι παραβολικός. Τέλος, αν ο m έχει δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε m λοξοδρομικός.

1. *Αν ο m είναι ελλειπτικός και άρα έχει ένα σταθερό σημείο στο $\mathbb{H}$, τότε η δράση του στο $\mathbb{H}$ είναι στροφή γύρω από το σταθερό σημείο. Λόγω της μεταβατικής δράσης του $Mob(\mathbb{H})$ στο $\mathbb{H}$, κάθε ελλειπτικό στοιχείο είναι συζυγές με τον $m(z) = \frac{zcos\theta+sin\theta}{-zsin\theta+cos\theta}$ για $\theta \in \mathbb{R}$.*

   Προσοχή! Ο m δεν είναι η συνηθισμένη Ευκλείδεια στροφή. Για παράδειγμα, για $\theta = \frac{\pi}{2}$, το $m(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. *Αν m παραβολικός, τότε έχει ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι $Mob(\mathbb{H})$ δρουν τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε ο m είναι συζυγής με τον $n(z) = z+1$. Ο m που είναι παραβολικός κι έχει σταθερό σημείο το $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί κάθε κύκλο του $\mathbb{H}\cup\overline{\mathbb{R}}$ εφαπτόμενο στο x. Προσοχή! Στο $Mob^+(\mathbb{H})$ η δράση στο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν είναι τριπλά μεταβατική, άρα το παραπάνω δεν ισχύει.*

3. *Αν m λοξοδρομικός, τότε ο m έχει δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$. Λόγω της μεταβατικότητας των $Mob(\mathbb{H})$ στα ζεύγη των πραγματικών, ο m είναι συζυγής με τον $n(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{R}$. Η υπερβολική ευθεία που ενώνει τα δύο σταθερά σημεία λέγεται άξονας της λοξοδρομικής m. Ο άξονας της $n(z) = \lambda z$ είναι ο θετικός ημιάξονας των μιγαδικών. Ο άξονας μένει αναλλοίωτος από την n, καθώς και τα δύο ημιεπίπεδα A, B που ορίζει. Δηλαδή, θα μετακινήσει το x πάνω - κάτω λz φορές, αφού $n(z) = \lambda z$, αλλά δε θα του αλλάξει ημιεπίπεδο. Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε άλλη λοξοδρομική με άξονα που περνά από τα x, y.*

Θεώρημα 2.8. *Έστω $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc = 1$. Τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:*

1. *Ο m είναι ο ταυτοτικός.*

2. *Ο m έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$, είναι λοξοδρομικός και συζυγής στο $Mob(\mathbb{H})$ με τον $n(z) = \lambda z$, όπου $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$.*

3. *Ο m έχει ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα, είναι παραβολικός και στο $Mob(\mathbb{H})$ είναι συζυγής με τον $q(z) = z+1$.*

4. *Ο m έχει ένα σταθερό σημείο στο $\mathbb{H}$, άρα είναι ελλειπτικός. Στο $Mob^+(\mathbb{H})$ είναι συζυγής με τον $q(z) = \frac{zcos\theta + sin\theta}{-zsin\theta + cos\theta}$.*

Έστω m λοξοδρομικός με σταθερά σημεία $x, y \in \overline{\mathbb{R}}, m \in Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$. Επειδή ο m διατηρεί το $\mathbb{H}$, διατηρεί τις γωνίες και τα ημιεπίπεδα που ορίζει ο άξονάς του. Οπότε, ο m διατηρεί το $A \cap \mathbb{H}$, όπου A κύκλος του $\overline{\mathbb{C}}$ που περνά από τα x, y. Αυτά ισχύουν για τα στοιχεία του $Mob^+(\mathbb{H})$.

Παράδειγμα 2.24. *Έστω $q(z) = \frac{i\overline{z}+2i}{i\overline{z}+i}$. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία.*

Αν $\overline{z} = \infty$, τότε $q(z) = \frac{i+\frac{2i}{\overline{z}}}{i+\frac{i}{\overline{z}}} = 1 \neq \infty$. Άρα, το ∞ δεν είναι σταθερό σημείο. Τώρα, $q(z) = \frac{i\overline{z}+2i}{i\overline{z}+i} = z \Rightarrow iz + 2i = z(i\overline{z} + i) \Leftrightarrow -2Im(z) + i(|z|^2 - 2) = 0$. Άρα, $Im(z) = 0$, δηλαδή $z \in \mathbb{R}$ και δεν υπάρχουν σταθερά σημεία του $q(z)$ στο $\mathbb{H}$. Επιπλέον $|z|^2 = 2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}$. Ο q παίρνει την υπερβολική γραμμή l που προσδιορίζουν τα $\pm\sqrt{2}$ και την πάει στον εαυτό της. [! Κανένα στοιχείο της $l \cap \mathbb{H}$ δε σταθεροποιείται]. Αντίθετα με τη λοξοδρομική, δρα σαν αντανάκλαση στα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει ο άξονάς της. Η q λέγεται ολισθαίνουσα ανάκλαση.

Χωροκύκλοι του $\mathbb{H}$ είναι οι κύκλοι του $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ που εφάπτονται στο $\overline{\mathbb{R}}$ στο σημείο x.

Έστω $m(z) \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^+(\mathbb{H}) \Leftrightarrow m(z) = \frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in i\mathbb{R}$ και $\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \alpha = ai, \beta = bi, \gamma = ci, \delta = di, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1$ και $m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$. Θεωρούμε $m(z) = z \Leftrightarrow c|z|^2 + dz - a\overline{z} - b = 0$.

Έστω $z = x + iy$ σταθερό σημείο ανήκει στο $\mathbb{H}$. Παίρνω

$$cx^2 + cy^2 + (d-a)x - b + i(d+a)y = 0 \qquad (1)$$

και $(d+a)y = 0$. Αλλά από υπόθεση $y > 0$, αφού $y \in \mathbb{H} \Rightarrow d = -a \Rightarrow$

$$ad - bc = -d^2 - bc = -1 \qquad (2).$$

Άρα, η (1), λόγω της (2) γίνεται $cx^2 + cy^2 + 2dx - b = 0$, δηλαδή τα σταθερά σημεία ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Αν $c = 0 \Rightarrow 2dx = b$ και δεν έχω περιορισμό για το y. Το x είναι μία συγκεκριμένη τιμή και το y μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Άρα, τα σταθερά σημεία του m είναι όλα τα σημεία της υπερβολικής ευθείας $\{z \in \mathbb{H} : Re(z) = \frac{b}{2d}\}$, διότι $d \neq 0$ από το $-d^2 = -1$, αφού $c = 0$. Η παραπάνω ευθεία σταθεροποιείται από τον m σημείο προς σημείο.

Έστω r_l η ανάκλαση ως προς την l και θεωρείστε την $r_l \circ m$. Εφόσον $m \in M\acute{o}\beta(\mathbb{H}) \setminus M\acute{o}\beta^+(\mathbb{H})$, έχουμε ότι $r_l \circ n, m \in Mob^+(\mathbb{H})$. Όμως, η $r_l \circ$

m σταθεροποιεί περισσότερα από δύο σημεία του $\mathbb{H}$ και συγκεκριμένα όλα τα σημεία της l. Άρα, η $r_l \circ m = id$, άρα $m = r_l$ είναι ανάκλαση.

Αν $c \neq 0$, διαιρούμε με c και παίρνουμε $x^2 + y^2 + \frac{2d}{c}x - b/c = (x + d/c)^2 + y^2 - \frac{d^2+bc}{c^2} = (x + d/c)^2 + y^2 - 1/c^2 = 0$. Αυτός είναι κύκλος κέντρου $-d/c$ κι ακτίνας $1/|c|$. Όπως και πριν, η m είναι ανάκλαση ως προς υπερβολική ευθεία που ορίζει ο A. Προσοχή! Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερά σημεία στο $\mathbb{H}$.

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν σταθερά σημεία στο $\mathbb{H}$. Θέλω σημεία στο $\overline{\mathbb{C}}$ που να ικανοποιούν τη σχέση $cx^2 + cy^2 + (d-a)x - b + i(d+a)y = 0$. Ψάχνω για σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα, $y = 0$. Αναγόμαστε στην $cx^2 + (d-a)x - b = 0$.

Αν $c = 0$, τότε $c + \frac{d-a}{x} - b/x^2 = 0$ και καθώς το x τείνει στο ∞, συμπεραίνουμε ότι το ∞ είναι σταθερό σημείο. Επίσης, $(d-a)x = b \Rightarrow x = \frac{b}{d-a}, d - a \neq 0$, γιατί $ad - bc = -1$ και θα πρέπει $a^2 = -1$ που δε γίνεται, γιατί είμαστε στους πραγματικούς αριθμούς. Άρα, έχουμε δύο σταθερά σημεία τα $\frac{b}{d-a}$ και ∞.

Ο άξονας της m είναι ο $\{z \in \mathbb{H} : Re(z) = \frac{b}{d-a}\}$, ο οποίος είναι συζυγής, λόγω της μεταβατικότητας των Möbius, μετασχηματισμών με τον $\frac{i\overline{z}+2i}{i\overline{z}+i}$, που συνεπάγεται ότι ο m είναι glide reflection. Ο m γράφεται ως σύνθεση μιας ανάκλασης κι ενός λοξοδρομικού μετασχηματισμού με άξονα τον l.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω $B(z) = -\overline{z}$. Στον $\overline{\mathbb{C}}$, έχω $B(i) = -(-i) = i, B(-i) = -(i) = -i, B(ix) = -(-ix) = ix, B(ix+1) = -(1 - ix) = -1 + ix$, δηλαδή είναι ανάκλαση. Τώρα προκύπτει το ερώτημα, αν αυτός είναι Möbius, μετασχηματισμός. Γράφεται $\frac{-\overline{z}+0}{0\overline{z}+1}$, με $ad - bc = -1$. Οπότε, $B(z) = \frac{-i\overline{z}}{i} = -\overline{z} \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^+(\mathbb{H})$.

Άρα

$$q(z) = (m \circ B)(z) = m(B(z)) = m(-\overline{z}) = \frac{-az + b}{-cz + d} \in Mob^+,$$

ο οποίος είναι λοξοδρομικός και συνεπάγεται

$$m(z) = q(z) \circ B^{-1}(z) = q(z) \circ B(z),$$

όπου $q(z)$ λοξοδρομικός και $B^{-1}(z)$ ανάκλαση.

Αν $c \neq 0$, έχουμε $cx^2 + (d-a)x - b = 0$. Οι λύσεις είναι $x = 1/2c[(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}] = 1/2c[(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 + 4}]$. Έχει πάντα δύο λύσεις, δηλαδή έχει πάντα δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα, η $m(z)$ είναι πάντα glide reflection. Έχουμε, λοιπόν, δείξει το παρακάτω.

Θεώρημα 2.9. *Έστω* $n(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^{+}(\mathbb{H})$, *δηλαδή* $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ *και* $ad - bc = 1$. *Τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω:*

1. *Η* n *σταθεροποιεί σημείο του* $\mathbb{H}$. *Τότε, υπάρχει* l *υπερβολική γραμμή του* $\mathbb{H}$ *που μένει αναλλοίωτη κι η* n *δρα σαν ανάκλαση ως προς* l.

2. *Η* n *δε σταθεροποιεί σημείο στο* $\mathbb{H}$. *Τότε, πάντα σταθεροποιεί δύο σημεία του* $\overline{\mathbb{R}}$ *και δρα σαν ολισθαίνουσα ανάκλαση ως προς τον άξονά της, δηλαδή την υπερβολική γραμμή που ορίζεται από τα δύο σταθερά σημεία.*

Παράδειγμα 2.25. *Βρείτε τα σταθερά σημεία της* $q(z) = -\overline{z} + 1$.

Η $q(z)$ *γράφεται ως* $q(z) = \frac{-\overline{z}+1}{0\overline{z}+1} = \frac{-i\overline{z}+i}{i} \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^{+}(\mathbb{H})$. *Για τα σταθερά σημεία, πρέπει να λύσω την* $q(z) = z$, *δηλαδή*

$$-\overline{z} + 1 = z \Leftrightarrow -(Re(z) - iIm(z)) + 1 = Re(z) + iIm(z)$$

$$\Leftrightarrow \; -(Re(z) + iIm(z) + 1 = Re(z) + iIm(z) \Leftrightarrow 2Re(z) = 1 \Leftrightarrow Re(z) = \frac{1}{2}$$

Άρα $q(z)$ *είναι ανάκλαση με άξονα* $\{z \in \mathbb{H} : Re(z) = 1/2\}$.

Παράδειγμα 2.26. *Βρείτε τα σταθερά σημεία της* $q(z) = \frac{2i\overline{z}-i}{3i\overline{z}-2i} \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^{+}(\mathbb{H})$.

Παρατήρηση! Αφού $q(z) \in Mob(\mathbb{H}) \setminus Mob^{+}(\mathbb{H})$, *περιμένω να είναι ανάκλαση ή ολισθαίνουσα ανάκλαση. Δοκιμάζω* $q(z) = z \Leftrightarrow 3i|z|^2 - 2i(z + \overline{z}) + i = 0$. *Θέτω* $z = x + iy$, *αντικαθιστώ και* $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})^2 + y^2 - \frac{1}{9} = 0$, *η οποία είναι εξίσωση κύκλου ακτίνας* $\frac{1}{3}$ *και κέντρου* $(\frac{2}{3}, 0)$. *Άρα, έχω δύο σταθερά σημεία στο* $\overline{\mathbb{R}}$, *το* 1 *και το* $\frac{1}{3}$. *Οπότε, είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση.*

Προσοχή! Δεν μπορεί να έχει σταθερά σημεία στην l, *γιατί θα σήμαινε πως έχει σταθερά σημεία στο* $\mathbb{H}$, *αλλά βρήκαμε πως είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση.*

Παράδειγμα 2.27. *Είδαμε ότι η* $q(z) = \frac{i\overline{z}+2i}{i\overline{z}+i}$ *είναι ολισθαίνουσα ανάκλαση. Γράψτε την* $q(z)$ *σα σύνθεση λοξοδρομικής κι ανάκλασης.*

Τα σταθερά σημεία είναι τα $\pm\sqrt{2}$ *(από προηγούμενο παράδειγμα). Άρα, η* $m(z) = \frac{2}{\overline{z}}$ *είναι ανάκλαση ως προς τον άξονα* l. *Άρα, η* $p(z) = m \circ q(z) = \frac{2z+2}{z+2}$ *είναι λοξοδρομική με σταθερά σημεία* $\pm\sqrt{2}$ *και συνεπάγεται* $q(z) = p(z) \circ m^{-1}(z) = (p \circ m)(z)$ *(αφού* m *είναι ανάκλαση).*

Κεφάλαιο 3

Μήκος και Απόσταση στο $\mathbb{H}$.

3.1 Μονοπάτια και στοιχεία του Arc-length.

Μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ λέγεται C^1 μονοπάτι, εάν η f είναι συνεχής και διαφορίσιμη στο (a, b) με συνεχή παράγωγο.

Η f έχει μια παραμετρικοποίηση $f(t) = (x(t), y(t))$, όπου οι $x(t), y(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και οι $x'(t), y'(t)$ υπάρχουν και είναι επίσης συνεχείς. Η εικόνα ενός διαστήματος μέσω της f λέγεται καμπύλη του $\mathbb{R}^2$.

Είναι γνωστό ότι το Ευκλείδειο μήκος μιας καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ δίνεται από τον τύπο

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)}dt.$$

Η ποσότητα $\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)}dt$ είναι το στοιχειώδες μήκος τόξου στο $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 3.28. *Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$, με $f(t) = (1 + t, t^2/2)$. Η παραμετρικοποίηση της f δίνεται από τις $x(t) = 1 + t$ με $x'(t) = 1$ και $y(t) = t^2/2$ με $y'(t) = t$. Οπότε*

$$L(f) = \int_0^2 \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln|t + \sqrt{1+t^2}|\right]_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}|,$$

όπου $t = \tan\theta$, με $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, ορίζουμε ως $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, με $f(t) = x(t) + iy(t)$. Τότε

$$|f'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Άρα,

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|dt = \int_f |dz|,$$

όπου $|dz|$ *το στοιχειώδες μήκος τόξου στο* $\mathbb{C}$.

Ο παραπάνω συμβολισμός μας βοηθά να ορίσουμε το εξής. Έστω $p : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *συνεχής. Το ολοκλήρωμα μονοπατιού της* ρ *κατά μήκος της* f *ορίζεται*

$$\int_f p(z)|dz| = \int_a^b p(f(t))|f'(t)|dt.$$

Ορισμός 3.18. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *μια* C^1 *καμπύλη. Το μήκος της* f *ως προς το στοιχείο μήκους - τόξου* $p(z)|dz|$ *είναι το ολοκλήρωμα*

$$L_\rho(f) = \int_f p(z)|dz| = \int_a^b p(f(t))|f'(t)|dt.$$

Παράδειγμα 3.29. *Έστω* $p(z) = \frac{1}{1+|z|^2} > 0$. *Έστω* $r > 0$ *και* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, f(t) = re^{it}$. *Παρατηρήστε ότι η* f *αποτελεί μια παραμετρικοποίηση του Ευκλείδειου κύκλου κέντρου* O *και ακτίνας* r. *Τότε*

$$L_\rho(f) = \int_f p(z)|dz| = \int_a^b p(f(t))|f'(t)|dt$$

με $p(f(t)) = \frac{1}{1+|f(t)|^2} = \frac{1}{1+r^2}$. *Οπότε* $f'(t) = ire^{it} \Rightarrow |f'(t) = r|$, *άρα*

$$L_\rho(f) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} r dt = \frac{2\pi r}{1+r^2}.$$

Το στοιχειώδες μήκος τόξου $p(z)|dz|$ *λέγεται σύμμορφη στρέβλωση του συνήθους στοιχειώδους μήκους τόξου* $|dz|$ *στο* $\mathbb{C}$.

Η $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *λέγεται κατά μέρη* C^1, *εάν υπάρχουν* $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ *έτσι ώστε η* $f|_{[a_i, a_i+1]}$ *είναι* C^1, *για κάθε* $i = 0, ..., n-1$.

Παράδειγμα 3.30. *Έστω* $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, *με* $f(t) = 1 + i|t|$. *Η* $f'(0)$ *δεν υπάρχει, αλλά οι* $f|_{[-1,0]}$ *και* $f|_{[0,1]}$ *είναι* C^1. *Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε*

$$L_p(f) = \int_{a_0}^{a_1} p(f(t))f'(t)dt + ... + \int_{a_{n-1}}^{a_n} p(f(t))f'(t)dt.$$

Έστω $p(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$ *και* $f(t) = 1 + i|t|$. *Οπότε*

$$L_p(f) = \int_{-1}^0 p(f(t))f'(t)dt + \int_0^1 p(f(t))f'(t)dt,$$

με $p(f(t)) = \frac{1}{1+|f(t)|^2} = \frac{1}{2+t^2}$. *Όταν* $-1 < t < 0$, *τότε* $f(t) = 1 - it \Rightarrow f'(t) = -i \Rightarrow |f'(t)| = 1$ *και όταν* $0 < t \leq 1, f(t) = 1 + it \Rightarrow f'(t) = i \Rightarrow |f'(t)| = 1$. *Άρα,*

$$L_p(f) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2+t^2}dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2+t^2}dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+(t/\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{1}$$

Παράδειγμα 3.31. *Έστω* $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *κατά μέρη* C^1 *και επί συνάρτηση,* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *κατά μέρη* C^1 *και* $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, *όπου* $g = f \circ h$. *Συσχετίστε τα* $L_p(f)$ *και* $L_p(g)$.

$$L_p(f) = \int_a^b p(f(t))|f'(t)|dt$$

και

$$L_p(g) = \int_\alpha^\beta p(g(t))|g'(t)|dt = \int_\alpha^\beta p(f \circ h(t))|f'(h(t))h'(t)|dt.$$

1. *Εάν* $h'(t) \geq 0 \, \forall t \in [\alpha, \beta]$, *τότε*

$$L_p(g) = \int_\alpha^\beta p(f(h(t))|f'(h(t))h'(t)|dt$$

Με αντικατάσταση $s = h(t)$, *έχουμε*

$$L_p(g) = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} p(f(s))|f'(s)|ds = \int_a^b p(f(s))|f'(s)|ds = L_p(f).$$

2. *Εάν* $h'(t) \leq 0 \, \forall t \in [\alpha, \beta]$, *τότε*

$$L_p(g) = \int_\alpha^\beta p(f(h(t))|f'(h(t))|(-h'(t))dt.$$

Με αντικατάσταση $s = h(t), h(\alpha) = b, h(\beta) = a$, *έχουμε*

$$L_p(g) = \int_b^a p(f(s))|f'(s)|ds = \int_a^b p(f(s))|f'(s)|ds = L_p(f).$$

Σ' αυτή την περίπτωση, $f \circ h$ *ονομάζεται αναπαραμετρικοποίηση της* f *(reparamentation). Άρα δείξαμε το παρακάτω.*

Πρόταση 3.14. $L_p(f \circ h) \geq L_p(f)$ *με ισότητα αν και μόνο αν* $f \circ h$ *είναι αναπαραμετρικοποίηση της* f.

Ορισμός 3.19. 1. *Έστω $X \subset \mathbb{C}$. Μια παραμετρικοποίηση του X είναι μια κατά μέρη C^1 συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, έτσι ώστε $f([a,b]) = X$.*

2. *Το $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά μέρη C^1 μονοπάτι, ονομάζεται απλό εάν η f είναι $1-1$.*

3. *Έστω f παραμετρικοποίηση του $X \subset \mathbb{C}$. Εάν το f είναι απλό, τότε ονομάζεται απλή παραμετρικοποίηση του X.*

4. *Το $f : [c,d] \to \mathbb{C}$ κατά μέρη C^1 μονοπάτι είναι σχεδόν απλό, εάν $f = h \circ g$ έτσι ώστε το $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ένα απλό μονοπάτι και η $g : [c,d] \to [a,b]$ είναι μια κατά μέρη C^1 συνάρτηση, έτσι ώστε g' να μην αλλάζει πρόσημο.*

5. *Έστω f μια παραμετρικοποίηση του $X \subseteq \mathbb{C}$ που είναι σχεδόν απλή. Τότε, η f ονομάζεται σχεδόν απλή παραμετρικοποίηση.*

6. *Η $X \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται απλή κλειστή καμπύλη, εάν υπάρχει παραμετρικοποίηση f του X με $f|_{[a,b)}$, $1-1$ και $f(a) = f(b)$.*

Παράδειγμα 3.32. 1. *$g : [0,4\pi] \to \mathbb{C}, g(t) = cost + isint$ είναι παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου S^1.*

2. *$f : [-1,1] \to \mathbb{C}, f(t) = 1 + i|t|$ απλό, ενώ $g : [0,4\pi] \to \mathbb{C}, g(t) = cost + isint$ δεν είναι $g(\frac{pi}{2}) = g(5\pi/2)$.*

3. *Επίσης, $g : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, g(t) = e^{it}$ είναι ο S^1.*

3.2 Το στοιχείο του μήκους καμπύλης του $\mathbb{H}$.

Έστω $p : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ συνεχής μη μηδενική συνάρτηση. Τότε

$$L_p(f) = \int_f p|dz| = \int_a^b p(f(t))|f'(t)|dt.$$

Η φράση «το μήκος είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της Möβ($\mathbb{H}$)» σημαίνει ότι για κάθε κατά μέρη C^1 μονοπάτι f στο $\mathbb{H}$ και για κάθε $\gamma \in$ Möβ($\mathbb{H}$), έχουμε $L_p(f) = L_p(\gamma f)$, όπου $L_p(f)$ όπως στη ... και

$$L_p(\gamma f) = \int_a^b p(\gamma \circ f(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt.$$

Ένα $m \in$ Möβ μπορούμε, όπως έχουμε δει να τον θεωρήσουμε ως μια συνάρτηση $m : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την m' κατά τα συνηθισμένα

$$m'(z) = \lim_{n \to z} \frac{m(w) - m(z)}{w - z},$$

αν το όριο αυτό υπάρχει.

Με τον τρόπο αυτό, μια κανονικοποιημένη $m \in$ Möb$^+$ έχει $m'(z) = frac1(cz+d)^2$. Τέτοιες συναρτήσεις συχνά ονομάζονται ολόμορφες. Δυστυχώς με τον τρόπο αυτό η m' για τα στοιχεία $m \in$ Möb $\setminus$ Möb$^+$ δεν ορίζεται. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε τους μετασχηματισμούς Möbius ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών οι οποίες απεικονίζουν ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ σε ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Από τον Απειροστικό Λογισμό ξέρουμε ότι οι παράγωγοι τέτοιων συναρτήσεων είναι μια γραμμική απεικόνιση και πιο συγκεκριμένα ο 2×2 πίνακας των μερικών παραγώγων.

Γυρίζοντας πίσω και συνδυάζοντας (1.6) = (1.7), έχουμε

$$\int_a^b (p(f(t))) - p((\gamma \circ f(t)))(|\gamma'(f(t))|)|f'(t)|dt = 0$$

για κάθε C^1 μονοπάτι $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ και $\gamma \in$ Möb$^+(\mathbb{H})$. Άρα, για κάθε $\gamma \in$ Möb$^+(\mathbb{H})$ έχουμε

$$\int_f \mu_{\gamma(z)}|dz| = \int_a^b |_\gamma \, (f(t))|f'(t)|dt = 0,$$

όπου $\mu_{\gamma(z)} = p(z) - p(\gamma(z))|\gamma'(z)|$. Άρα η συνθήκη στο $p(z)$ μετατρέπεται σε συνθήκη στο $\mu_{\gamma(z)}$. Καθώς η $p(z)$ είναι συνεχής και η γ ολόμορφη, έχουμε ότι η $\mu\gamma(z)$ είναι συνεχής για κάθε $\gamma \in$ Möb$^+(\mathbb{H})$.

Το πλεονέκτημα του παραπάνω είναι ότι η συνθήκη στο $\mu_{\gamma(z)}$ είναι ευκολότερα αναγνωρίσιμη από αυτή στο $p(z)$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε το παρακάτω.

Λήμμα 3.2. *Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\mu : D \to \mathbb{R}$ συνεχής και υποθέτουμε ότι $\int_f \mu(z)|dz| = 0$ για κάθε κατά μέρη C^1 μονοπάτι $f : [a,b] \to D$. Τότε $\mu \equiv 0$, για κάθε z.*

Απόδειξη. Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγή. Έστω $z \in D$, με $\mu(z) \neq 0$. Αν χρειαστεί αντικαθιστούμε την μ από την $-\mu$ κι υποθέτουμε ότι $\mu(z) > 0$. Επειδή η μ είναι συνεχής για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, με

$U_\delta(z) \subset D$ και $w \in U_\delta(z)$ συνεπάγεται ότι $\mu(w) \in U_\epsilon(\mu(z))$, όπου $U_\delta(z) = \{u \in \mathbb{C} : |u-z| < \delta\}$, $U_\epsilon(t) = \{s \in \mathbb{R} : |s-t| < \epsilon\}$.

Έστω $\epsilon = \frac{|\mu(z)|}{3}$, τότε υπάρχει $\delta > 0, w \in U_\delta(z)$, ώστε $\mu(w) \in U_\epsilon(\mu(z))$. Άρα $|\mu(w) - \mu(z)| < \frac{\mu(z)}{3} \Rightarrow 0 < \mu(z) - \frac{\mu(z)}{3} < \mu(w) < \mu(z) + \frac{\mu(z)}{3} \Rightarrow \mu(w) > 0$. (Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $w \in U_\delta(z), \mu(w) > 0$).

Τότε $\mu(f(t)) > 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, μιας και το $f(t) \in U_\delta(z)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα

$$\int_f \mu(z)|dz| > 0,$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο. □

Το Λήμμα ... μας δίνει την πληροφορία ότι το μήκος είναι αναλλοίωτο από τη δράση της $\gamma \Leftrightarrow \mu_{\gamma(z)} \equiv 0 \forall z \in \mathbb{H}, \forall \gamma \in Mob^+(\mathbb{H})$. *Εξετάζουμε πως συμπεριφέρεται η* μ_γ *στη σύνθεση στοιχείων του* $\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\mathbb{H})$. *Έχουμε*

$$\mu_{\gamma\circ\phi}(z) = p(z) - p(\gamma\circ\phi)(z)|(\gamma\circ\phi')(z)| = p(z) - p(\gamma\circ\phi(z))|(\gamma(\phi'(z)))|(\phi'(z))|$$

$$= p(z) - p(\phi(z))|(\phi'(z))| + p(\phi(z))|(\phi'(z)) - p(\gamma\circ\phi)(z)|(\gamma(\phi'(z)))|(\phi'(z))|$$

$$= \mu_\phi(z) + |(\phi'(z))|(p(\phi(z))) - p(\gamma(\phi(z))) - p(\gamma(\phi(z)))|(\gamma(\phi'(z)))|$$

$$= \mu_\phi(z) + |(\phi'(z))|\mu_\gamma(\phi(z)).$$

Εάν $\mu_\phi = \mu_\gamma = 0 \Rightarrow \mu_{\gamma\circ\phi} = 0$. *Άρα, εάν* $\mu_\gamma = 0$ *για κάθε γεννήτορα της* $Mob^+(\mathbb{H})$, *τότε* $\mu_\gamma = 0, \forall \gamma \in Mob^+(\mathbb{H})$.

Το σύνολο των γεννητόρων της $Mob(\mathbb{H})$ *είναι οι* $m(z) = az + b, a, b \in \mathbb{R}, a > 0$, *η* $k(z) = -\frac{1}{z}$ *και* $c(z) = -\overline{z} \notin Mob^+(\mathbb{H})$.

Ας δοκιμάσουμε αρχικά τους γεννήτορες της μορφής $\gamma(z) = z + b, b \in \mathbb{R}$. *Τότε* $(\gamma(z))' = 1, \forall z \in \mathbb{H}$. *Οπότε* $0 = \mu_\gamma(z) = p(z) - p(\gamma(z))|(\gamma'(z))| = p(z) - p(z+b)$, *για κάθε* $z \in \mathbb{H}$ *και κάθε* $b \in \mathbb{B}$.

Αυτό σημαίνει ότι το $p(z)$ *εξαρτάται μόνο από το* $y = Im(z)$ *του* $z = x + iy$. *Πράγματι, αν* $z, z' \in \mathbb{H}$, *με* $Im(z) = Im(z')$. *Έστω* $z = x + iy, z' = x' + iy'$. *Τότε* $\rho(z) = \rho(x+iy) = \rho(x + iy + (x' - x)) = \rho(x' + iy) = \rho(z')$.

Συνεπώς μπορούμε να δούμε την ρ *σαν μία πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής* $y = Im(z)$. *Πιο συγκεκριμένα, έστω* $r : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *και* $r(y) = \rho(iy), \rho(z) = r(Im(z))$.

Τώρα για τους γεννήτορες της μορφής $\gamma(z) = az, a > 0$ *Έχουμε* $(\gamma(z))' = a$. *Τότε* $0 = \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|(\gamma(z))'| = \rho(z) - a\rho(az)$ *για κάθε* $z \in \mathbb{H}$ *και* $a > 0$. *Άρα* $\rho(z) = a\rho(az)$. *Ειδικότερα* $r(y) = ar(ay)$ *για κάθε* $y > 0, a > 0$.

Διαιρώντας με a *έχουμε* $r(ay) = \frac{1}{a}r(y)$. *Για* $y = 1$ *αυτό δίνει* $r(a) = \frac{1}{a}r(1)$, *άρα η* r *καθορίζεται πλήρως από την τιμή της στο* 1. *Θυμηθείτε ότι η* $\rho(z) = r(Im(z)) = \frac{c}{Im(z)}$ *για κάποια θετική σταθερά* c.

Για $k(z) = -\frac{1}{z}$ *έχουμε* $k'(z) = \frac{1}{z^2}$. *Οπότε* $\mu_k(z) = \rho(z) - \rho(k(z))|k'(z)| = \rho(z) - \rho(-\frac{1}{z})(k'(z))$.

Άρα αν

$$z = x + iy \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Τότε

$$Im(-\frac{1}{z}) = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{Im(z)}{|z|^2}$$

και

$$\mu_k(z) = \frac{c}{Im(z)} - \frac{c|z|^2}{Im(z)}|\frac{1}{z^2}| = 0.$$

Τέλος για τον γεννήτορα $B(z) = -\overline{z}$ *έχουμε ότι δεν είναι ολόμορφη συνάρτηση. Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ *κατά μέρη* C^1 *μονοπάτι και*

$$L_\rho(B \circ f) = \int_a^b \rho(B \circ f(t))|(B \circ f)'(t)|dt.$$

Από τον ορισμό $B(f(t)) = -\overline{f(t)}$ *και* $\rho(B(f(t))) = \frac{c}{Im(-\overline{f(t)})} = \frac{c}{Im(f(t))}$. *Έστω* $f(t) = x(t) + iy(t)$, *τότε* $B(f(t)) = -(x(t) - iy(t)) = -x(t) + iy(t)$ *και* $(B \circ f)'(t) = -x'(t) + iy'(t)$ *και* $|(B \circ f)'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = |f'(t)|$. *Οπότε, το* L_ρ *μένει αναλλοίωτο από τη δράση της* B, *αφού*

$$L_\rho(B \circ f) = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = L_\rho(f).$$

Συνεπώς, εάν $\rho : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \rho(z) = \frac{c}{Im(z)}$, *όπου* c *σταθερά, τότε το* L_ρ *μένει αναλλοίωτο ως προς τη δράση της* $Mob(\mathbb{H})$. *Για το* $\mathbb{H}$ *και για ευκολία θα θεωρούμε πάντα ότι* $c = 1$ *και* $\rho(z) = \frac{1}{Im(z)}$.

Θεώρημα 3.10. *Για κάθε θετικη σταθερά* c, *το στοιχειώδες μήκος τόξου* $\frac{c}{Im(z)}|dz|$ *στο* $\mathbb{H}$ *είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της* $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$. *Άρα για κάθε κατά μέρη* C^1 *μονοπάτι* $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ *και για κάθε* $\gamma \in M\ddot{o}b(\mathbb{H})$

$$L_\rho(f) = L_\rho(\gamma \circ f).$$

Παράδειγμα 3.33. *Βρείτε το μήκος ως προς* $\rho(z) = \frac{c}{Im(z)}$ *του ευθύγραμμου τμήματος* A_λ *που ενώνει δύο σημεία του* $\mathbb{H}$.

Η $f : [-1,1] \to \mathbb{H}, f(t) = t + \lambda i$ *είναι μια παραμετρικοποίηση του* A_λ. *Τότε*

$$L_\rho(f) = \int_{-1}^{1} p(f(t))|(f'(t)|dt, p(f(t)) = \frac{c}{Im(f(t))} = \frac{c}{\lambda},$$

οπου $f'(t) = 1$, *και* $|f'(t)| = \sqrt{1}$.

Άρα

$$L_\rho(f) = \int_{-1}^{1} \frac{c}{\lambda} dt = \frac{2c}{\lambda}.$$

Για $c = 1$, *έχουμε* $L_\rho(f) = \frac{2}{\lambda}$ *και το Ευκλείδειο μήκος είναι* 2.

Έστω B_λ *το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία. Ο κύκλος έχει εξίσωση* $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ *κι επειδή τα δύο σημεία είναι στον κύκλο, έχουμε* $(-1-c)^2 + (\lambda)^2 = r^2$ *και* $(1-c)^2 + (\lambda)^2 = r^2$. *Οπότε, συνεπάγεται ότι* $(-1-c)^2 = (1-c)^2 \Rightarrow 1 + 2c + c^2 = 1 - 2c + c^2 \Rightarrow c = 0$ *και* $r^2 = (\lambda)^2 + 1 \Rightarrow r = \sqrt{(\lambda)^2 + 1}$. *Τότε,* $\theta = arcsin(\frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda)^2+1}})$ *είναι μια απλή παραμετρικοποίηση του* B_λ.

Έστω $f : [\theta, \pi - \theta] \to \mathbb{H}$, *με* $f(t) = r\cos t + ir \sin t$, *οπότε*

$$f'(t) = -r\sin t + ri\cos t, |f'(t)| = r,$$

και

$$\rho(f(t)) = \frac{c}{Im(f(t))} = \frac{c}{r \sin t}.$$

Συνεπώς

$$L_\rho(f) = \int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{c}{r\sin t} r dt = c\int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{dt}{\sin t} = c\int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = c\int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{\sin t}{1-\cos^2 t} dt$$

$$= -c\int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{du}{1-u^2} = \frac{c}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{c}{2}\int \frac{du}{u+1} = \frac{c}{2}\ln|u-1| - \frac{c}{2}\ln|u+1| = \frac{c}{2}\ln|\frac{u-1}{u+1}|$$

$$= \frac{c}{2}\left[\ln|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}|\right]_{\theta}^{\pi-\theta} = \frac{c}{2}\ln\left|\frac{-(\sqrt{\lambda^2+1})^{-1} - 1}{-(\sqrt{\lambda^2+1})^{-1} + 1}\right| - \frac{c}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{\lambda^2+1})^{-1} - 1}{(\sqrt{\lambda^2+1})^{-1} + 1}\right|$$

$$= c\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{\sqrt{\lambda^2+1}-1}\right|$$

όπου στη δεύτερη γραμμή κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $\cos t = u$ *και χρησιμοποιήσαμε ότι* $\cos\theta = (\sqrt{\lambda^2+1})^{-1}$.

3.3 Μετρικοί χώροι.

Ορισμός 3.20. *Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}$ ένα κατά μέρη C^1 μονοπάτι. Τότε*

$$L_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{Im(z)} dz = \int_\alpha^\beta \frac{1}{Im(f(t))} |f^{'}(t)| dt.$$

Η $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}x\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ με $d_{\mathbb{H}}(x, y) = inf\{L_{\mathbb{H}} : f\ C^1$ κατά μέρη μονοπάτι με $f(\alpha) = x, f(\beta) = y\}$. Η $d_{\mathbb{H}}$ είναι μετρική και ο $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ μετρικός χώρος.

Μας είναι ήδη γνωστό ότι ο $(\mathbb{R}^2, d)$ είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος, ενώ ο $(\mathbb{R}^2 \setminus 0, d)$ δεν είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος. Αυτό που δε γνωρίζουμε είναι ότι και ο $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ είναι επίσης γεωδαισιακός μετρικός χώρος, δηλαδή για κάθε $x, y \in \mathbb{H}$ υπάρχουν μονοπάτια κατά μέρη C^1, τα οποία υλοποιούν την απόσταση του x από το y. Αναλυτικότερα, υπάρχει $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}$ κατά μέρη C^1 ώστε $f(\alpha) = x, f(\beta) = y$, δηλαδή

$$L_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(x, y).$$

Επίσης, για κάθε $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$, ισχύει

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)), \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{H}$. Υπάρχει πάντα υπερβολική ευθεία που περνά από τα x, y. Ξέρουμε ότι υπάρχει $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$ ώστε η παραπάνω υπερβολική ευθεία να απεικονίζεται στον ημιάξονα των καθαρά μιγαδικών αριθμών.

Θα υπάρχουν, δηλαδή, $k, \lambda > 0$ ώστε $\gamma(x) = ki$ και $\gamma(y) = \lambda i$. Αναλυτικότερα, θα έχουμε

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(ki, \lambda i) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)).$$

Δηλαδή, υπάρχει $f : [\lambda, k] \to \mathbb{H}$ με $f(\lambda) = \lambda i, f(k) = \mu i \Rightarrow f(t) = ti$.

Λόγω της τελευταίας σχέσης, έχουμε ότι

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \int_\lambda^k \frac{1}{Im(f(t))} |f^{'}(t)| dt = \int_\lambda^k \frac{1}{t} dt = |ln(\frac{k}{\lambda})|$$

Παράδειγμα 3.34. *Έστω $x = 2 + i, y = -3 + i$. Να υπολογιστεί η $d_{\mathbb{H}}(x, y)$.*

Τα x, y βρίσκονται πάνω σε κύκλο κέντρου $\frac{-1}{2}$ και ακτίνας $\frac{\sqrt{29}}{2}$. Ο κύκλος αυτός τέμνει το $\overline{\mathbb{R}}$ στα σημεία $\frac{-1+\sqrt{29}}{2}, \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$. Τότε ο $\gamma(z) = \frac{z-p}{z-q}$, με $\gamma(p) = 0, \gamma(q) = \infty$. Ξέρουμε ότι $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$. Οπότε έχουμε

$$\gamma(2 + i) = \frac{2 + i - p}{2 + i - q} = \frac{p - q}{(2 - q)^2 + 1} i$$

$$\gamma(-3+i) = \frac{-3+i-p}{-3+i-q} = \frac{p-q}{(3-q)^2+1}i$$

Οπότε

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x),\gamma(y)) = |ln\frac{\frac{p-q}{(2-q)^2+1}}{\frac{p-q}{(3+q)^2+1}}| = |ln\frac{(2-q)^2+1}{(3+q)^2+1}| = ln(\frac{58+10\sqrt{29}}{58-10\sqrt{29}}).$$

Γενικότερα, έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ *με* $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. *Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις*

1. *Αν* $x_1 = x_2$, *τότε* $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = |ln(\frac{y_1}{y_2})|$.

2. *Έστω* $x_1 \neq x_2, x_1 > x_2$ *και* $\theta_i \in [0,\pi)$. *Θέλουμε ένα μονοπάτι* $f : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{H}$ *με* $f(t) = c + re^{it}$, *που είναι μια παραμετρικοποίηση του μονοπατιού από το* z_1 *στο* z_2.

   Άρα

$$L_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$$

$$L_{\mathbb{H}}(f) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{sin(t)}dt = ln|\frac{csc(\theta_2) - cot(\theta_2)}{css(\theta_1) - cot(\theta_1)}|.$$

   Γνωρίζουμε ότι $csc(\theta_i) = \frac{r}{y_i}, cot(\theta_i) = \frac{x_i - c}{y_i}$. *Με αντικατάσταση καταλήγουμε ότι*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = ln|\frac{(x_1 - c - r)y_2}{y_1(x_2 - c - r)}|.$$

Σημείωση 12. *Αν* $x_2 > x_1$, *τότε*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = ln|\frac{(x_2 - c - r)y_1}{y_2(x_1 - c - r)}|.$$

Άρα, ο γενικότερος τύπος είναι

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = |ln|\frac{(x_1 - c - r)y_2}{y_1(x_2 - c - r)}||.$$

Παράδειγμα 3.35. *Υπάρχει θετικός ακέραιος* s *έτσι ώστε*

$$d_{\mathbb{H}}(-s+i, i) = d_{\mathbb{H}}(i, s+i) = d_{\mathbb{H}}(-s+i, s+i);$$

Τα $-s+i, s+i$ *βρίσκονται πάνω στον κύκλο κέντρου* O *και ακτίνας* $\sqrt{s^2+1}$. *Οπότε*

$$d_{\mathbb{H}}(-s+i, s+i) = ln[\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{\sqrt{s^2+1}-s}] \qquad 1.$$

Τα i και $s+i$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο κέντρου $\frac{s}{2}$ και ακτίνας $\sqrt{\frac{s^2}{4}+1}$. Άρα

$$d_{\mathbb{H}}(i, s+i) = ln[\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}-s}] \qquad 2.$$

Πρέπει 1. = 2. Άτοπο! Δεν υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο με κορυφές στον χωροκύκλο $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{H} : Im(z) = 1\}$, δηλαδή χωροκύκλος με κέντρο το ∞.

Παράδειγμα 3.36. *Έστω $(z_1, z_2), (w_1, w_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{H}$. Δείξτε ότι υπάρχει $q \in Mob(\mathbb{H})$ με $q(z_1) = w_1$ και $q(z_2) = w_2$ αν και μόνο αν $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$.*

1. *Έστω ότι υπάρχει $q \in Mob(\mathbb{H})$ με $q(z_1) = w_1$ και $q(z_2) = w_2$. Τότε*

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(q(z_1), q(z_2)) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2).$$

2. *Επιλέγω $p_1 \in Möb(\mathbb{H})$ ώστε $p_1(z_1) = i$ και $p_1(z_2) = e^{d_{\mathbb{H}(z_1,z_2)}i}$.*

   Όμοια, επιλέγω $p_2 \in Möb(\mathbb{H})$ ώστε $p_2(w_1) = i$ και $p_2(w_2) = e^{d_{\mathbb{H}(w_1,w_2)}i}$.

   Όμως, $e^{d_{\mathbb{H}(z_1,z_2)}i} = e^{d_{\mathbb{H}(w_1,w_2)}i} \Rightarrow p_2^{-1} \circ p_1 = p$.

Ορισμός 3.21. *Μια ισομετρία είναι μια απεικόνιση $f : X \to X$ (όπου X μετρικός χώρος) που διατηρεί την απόσταση.*

Σημείωση 13. *Η ισομετρία f είναι $1-1$ και συνεχής.*

1. *Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε*

$$0 \neq d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

2. *Από τον ορισμό της μετρικής έχουμε ότι $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(S(x_0, \delta)) \subset S(f(x_0), \epsilon)$. Στην ισομετρία η συνέχεια διατηρείται για $\delta = \epsilon$.*

Παρατήρηση: Οι ισομετρίες δεν είναι πάντα επί.

Παράδειγμα 3.37. *Έστω ο $\mathbb{Z}$ με τη διακριτή μετρική. Έστω $f(x) = 2x$.*

1. *Αν $x = y$, τότε $d(f(x), f(y)) = d(2x, 2x) = 0$.*

2. *Αν $x \neq y$, τότε $d(f(x), f(y)) = d(2x, 2y) = 1$.*

Άρα, είναι ισομετρία, αλλά δεν είναι επί.

Αν ορίσουμε μια ισομετρία $f : x \to f(x)$, τότε αυτή είναι ομοιομορφισμός.

Παράδειγμα 3.38. *Αν $(\mathbb{C}, d)$ με $d(x, y) = |x - y|$, τότε η $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $g(z) = az$ είναι ισομετρία·*

$$d(z_1, z_2) = d(az_1, az_2)$$

ισοδύναμα

$$|z_1 - z_2| = |az_1 - az_2| = |a||z_1 - z_2|.$$

Θα πρέπει

$$|z_1 - z_2| = |a||z_1 - z_2|$$

αν και μόνο αν $|a| = 1$.

Πρόταση 3.15. *Έστω x, y, z διακριτά σημεία του $\mathbb{H}$. Τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

αν και μόνο αν το y ανήκει στην υπερβολική ευθεία που ενώνει τα x, z.

Θεώρημα 3.11. *Έστω $Isom(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ η ομάδα των ισομετριών του υπερβολικού επιπέδου. Τότε $Isom(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) = M\ddot{o}b(\mathbb{H})$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(p(x), p(y)), p \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ Για κάθε $x, y \in \mathbb{H}$, έχουμε ότι

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) \subset \text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}).$$

Έστω $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ και $p, q \in \mathbb{H}$. Έστω l_{pq} το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που περνά από τα p, q. Από προηγούμενη πρόταση, προκύπτει ότι $f(l_{pq}) = l_{f(p)f(q)}$.

Έστω l η μεσοκάθετος στην l_{pq}, δηλαδή

$$l = \{z \in \mathbb{H} | d_{\mathbb{H}}(z, p) = d_{\mathbb{H}}(z, q)\}.$$

Τότε $f(l) = \{z \in \mathbb{H} | d_{\mathbb{H}}(z, f(p)) = d_{\mathbb{H}}(z, f(q))\}$ είναι η μεσοκάθετος του $l_{f(p)f(q)}$.

Κανονικοποιούμε΄ την f, δηλαδή διαλέγουμε ένα ζεύγος σημείων x, y στον θετικο ημιάξονα I του $\mathbb{H}$ (των καθαρά φανταστικών) και $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H},)$ ώστε $\gamma(f(x)) = x, \gamma(f(y)) = y$. Τέτοιος γ υπάρχει από τις ιδιότητες των M΄ob($\mathbb{H}$) και από το γεγονός ότι $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$. Ο $\gamma \circ f$ σταθεροποιεί τα σημεία x, y και άρα υποχρεωτικά απεικονίζει το I στο I, διότι τα x, y έχουν επιλεγεί τυχαία ή χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις.

Υποθέτουμε ότι η γ διατηρεί τα ημιεπίπεδα στα οποία διατηρεί το I στο $\mathbb{H}$. (Διαφορετικά, αντικαθιστούμε το γ με $B \circ \gamma$).

Έστω z σημείο του I. Τότε το z προσδιορίζεται μοναδικά από τις $d_{\mathbb{H}}(z,x), d_{\mathbb{H}}(z,y)$. Οι αποστάσεις αυτές διατηρούνται και από την $\gamma \circ f$.

Έστω $w \in \mathbb{H}, w \notin I$. Έστω η μεσοκάθετος ενός τυχαίου ευθύγραμμου τμήματος της I. Η $\gamma \circ f$ σταθεροποιεί όλη την I, γεγονός που συνεπάγεται ότι σταθεροποιεί και το σημείο τομής και απεικονίζει τη μεσοκάθετο σε μεσοκάθετο, δηλαδή την απεικονίζει τον εαυτό της. Επειδή $\gamma \circ f$ σταθεροποιεί το z, έχουμε ότι

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), \gamma \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, \gamma \circ f(w))$$

και τα ημιεπίπεδα διατηρούνται, δηλαδή $\gamma \circ f(w) = w \Rightarrow \gamma \circ f = id_{\mathbb{H}} \Rightarrow (\gamma)^{-1} = f \Rightarrow f \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \Rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Κυρτότητα.

Ορισμός 4.22. *Ένα υποσύνολο $\underline{\overline{X}} \subset \mathbb{H}$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in \underline{\overline{X}}$, το κλειστό υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα $l_{xy} \in \underline{\overline{X}}$.*

Ως συνέπεια, λοιπόν, οι $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ διατηρούν την κυρτότητα (εφόσον διατηρούν τις υπερβολικές γραμμές). Γνωστά κυρτά σύνολα είναι οι υπερβολικές ευθείες, οι υπερβολικές ακτίνες, τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα.

Παράδειγμα 4.39. *Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο ($H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n \cap \dots$).*

Παράδειγμα 4.40. *Κάθε υπερβολική ευθεία l χωρίζει το $\mathbb{H}$ σε δύο ημιεπίπεδα. Αν δεν περιέχουν την l λέγονται ανοιχτά ημιεπίπεδα. Αν την περιέχουν λέγονται κλειστά. Τα κλειστά ημιεπίπεδα είναι κυρτά.*

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα. Έστω I ο ημιάξονας των φανταστικών και έστω $U = \{z \in \mathbb{H} | Re(z) > 0\}$.

1. *Αν $Re(x), Re(y) > 0$, τότε $l_{xy} \in U$, διότι για κάθε $z \in l_{xy}$, έχουμε ότι $Re(z) > 0$.*

2. *Όμοια αν $Re(x) > 0, Re(y) = 0$.*

3. *Αν $Re(x) = Re(y) = 0$, τότε $l_{xy} \subset I$.*

Για το τυχαίο ημιεπίπεδο A που ορίζει η τυχαία l, αρκεί να βρω $\gamma \in M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ ώστε $\gamma(A) = U, \gamma(l) = I$. Τέτοιο γ υπάρχει πάντα, λόγω της δράσης των $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$.

Επίσης, και τα ανοιχτά ημιεπίπεδα είναι κυρτά.

Σημείωση 14. *Γενικά, τα ημιεπίπεδα είναι κυρτά. Η ένωση κυρτών, όμως, δεν είναι κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{H}$.

Πρόταση 4.16. *Έστω* $\underline{X}$ *κλειστό, κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{H}$ *και* $z \in \mathbb{H} \setminus \underline{X}$. *Τότε υπάρχει μοναδικό* $x \in \underline{X}$ *με* $d_{\mathbb{H}}(z, \underline{X}) = inf d_{\mathbb{H}}(z, x)|x \in \underline{X}$.

Έστω $\underline{Y} \subset \mathbb{H}$. *Ο κυρτός χώρος του* $\underline{Y}(conv(\underline{Y}))$ *είναι η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του* $\mathbb{H}$ *που περιέχουν το* $\underline{Y}$. *Ο* $conv(\underline{Y})$ *είναι ο μικρότερος κυρτός υπόχωρος του* $\mathbb{H}$ *με* $\underline{Y} \subset conv(\underline{Y})$. *Αν* $x, y \in conv(\underline{Y})$, *συνεπάγεται ότι* $l_{xy} \subset conv(\underline{Y})$.

Σημείωση 15. *Έστω* $\underline{Y} = x, y, x \neq y$, *τότε* $conv(\underline{Y}) = l_{xy}$.

Ορισμός 4.23. *Έστω* $H = \{H_a\}_{a \in A}$ *συλλογή ημιεπιπέδων στο* $\mathbb{H}$ *και για κάθε* $a \in A$ *το* l_a *είναι η υπερβολική ευθεία που προσδιορίζει το* H_a. *Η* H *λέγεται τοπικά πεπερασμένη αν για κάθε* $z \in \mathbb{H}$, *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *ώστε μόνο πεπερασμένες* $l_a, a \in A$ *τέμνουν την* $U_\epsilon(z)$. *Αν* $|A|$ *πεπερασμένο, τότε* H *τοπικά πεπερασμένη.*

Ορισμός 4.24. *Ένα υπερβολικό πολύγωνο είναι ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του* $\mathbb{H}$ *που μπορεί να εκφραστεί ως τομή τοπικά πεπερασμένης συλλογής κλειστών ημιεπιπέδων.*

Ορισμός 4.25. *Ένα υπερβολικό πολύγωνο με μη κενό εσωτερικο λέγεται μη εκφυλισμένο. Διαφορετικά λέγεται εκφυλισμένο.*

Σημείωση 16. *Ένα υπερβολικό πολύγωνο μπορεί να έχει περισσότερες από μία ιδεατές κορυφές.*

Ορισμός 4.26. *Έστω* $\underline{X}$ *υποσύνολο του* $\mathbb{H}$. *Το υπερβολικό εμβαδόν δίνεται ως εξής*

$$area_{\mathbb{H}}(\underline{X}) = \int_{\underline{X}} \frac{1}{(Im(z))^2} dxdy = \int_{\underline{X}} \frac{1}{y^2} dxdy.$$

Παράδειγμα 4.41. *Έστω* $\underline{X}$ *η υπερβολική περιοχή που προσδιορίζεται από τα*

$$H_1 = \{z \in \mathbb{H} | Re(z) = -1\}$$

$$H_2 = \{z \in \mathbb{H} | Re(z) = 1\}$$

$$H_3 = \{z \in \mathbb{H} | Im(z) = 1\}$$

Να υπολογίσετε το υπερβολικό εμβαδόν.

Έχουμε

$$area_{\mathbb{H}}(\underline{X}) = \int_{\underline{X}} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{-1}^{1} dx = 2.$$

Σημείωση 17. *Ισχύει ότι*

$$area_{\mathbb{H}}(\overline{X}) = area_{\overline{X}}(P(\overline{X}))$$

για κάθε $p \in Möb(\mathbb{H})$. *Δηλαδή οι Möbius διατηρούν αναλλοίωτο το εμβαδόν.*

Παράδειγμα 4.42. *Έστω* P *ένα υπερβολικό τρίγωνο με μία ιδεατή κορυφή (τουλάχιστον)* v_1 *κι άλλες δύο κορυφές* v_2, v_3. *Βρίσκω* $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$ *ώστε* $\gamma(v_1) = \infty$ *και* $\gamma(l_{23})$ *στην υπερβολική γραμμή που περιέχεται στον μοναδιαίο κύκλο ώστε* $v_2 = e^{i\phi}, v_3 = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \phi \leq \pi$. *Ποιό είναι το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου;*

Έχουμε

$$area_{\mathbb{H}}(P) = area_{\mathbb{H}}(\gamma(P)) = \int_{\gamma(P)} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{cos\theta}^{cos\phi} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dxdy = ... = \phi - \theta = \pi - (a_2 + a_3).$$

Θεώρημα 4.12. *Ένα υπερβολικό τρίγωνο με μία τουλάχιστον ιδεατή κορυφή* v_1 *έχει εμβαδόν*

$$area_{\mathbb{H}}(P) = \pi - a_2 - a_3,$$

όπου a_2, a_3 *οι γωνίες που σχηματίζονται στις κορυφές* v_2, v_3.

Πόρισμα 4.7. *Κάθε ιδεατό τρίγωνο έχει εμβαδόν* π.

Παράδειγμα 4.43. *Τί γίνεται αν το* P *δεν έχει ιδεατές κορυφές; Έστω* P_1 *το τρίγωνο με κορυφές* x, v_1, v_2. *Οπότε, έχουμε*

$$area_{\mathbb{H}}(P_1) = \pi - (\pi - a_1 - \delta) = a_1 - \delta.$$

Έστω P_2 *το τρίγωνο με κορυφές* x, v_2, v_3. *Οπότε*

$$area_{\mathbb{H}}(P_2) = \pi - (a_2 + \delta) - a_3.$$

Άρα

$$area_{\mathbb{H}}(P) = area_{\mathbb{H}}(P_2) - area_{\mathbb{H}}(P_1) = \pi - (a_2 + \delta) - a_3 - a_1 + \delta = \pi - a_2 - a_3 - a_1.$$

Ο τελευταίος είναι γνωστός ως Τύπος Gauss - Bonnet.

Σημείωση 18. *Σε ένα υπερβολικό τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι* $< \pi$.

Παράδειγμα 4.44. *Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου στο $\mathbb{H}$ με κορυφές $i, 4+i, 2+2i$.*

Αν C_1, C_2 δύο κύκλοι κέντρου c_1, c_2 και ακτίνας r_1, r_2 (αντίστοιχα), τότε αν x το σημείο τομής, η γωνία στο x είναι θ με

$$cos\theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - |c_1 - c_2|^2}{2r_1r_2}.$$

Στην περίπτωσή μας ο κύκλος C_{12} που ορίζεται από τις v_1, v_2 έχει κέντρο $\frac{9}{2}$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{65}}{4}$. Ανάλογα υπολογίζουμε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων C_{13}, C_{23}.

Αντίστοιχα, η γωνία του C_{12} με τον C_{13} είναι $cos(a) = \frac{18}{\sqrt{325}}$, οπότε $a \approx 0,0555$. Όμοια, $b \approx 0,0555, c \approx 0,2487$. Άρα

$$area_{\mathbb{H}}(P) = \pi - (a+b+c) \approx 2,7819.$$

Ορισμός 4.27. *Ένα πολυγώνο P του $\mathbb{H}$ λέγεται 'λογικό' πολύγωνο αν δεν περιέχει ανοιχτά ημιεπίπεδα.*

Έστω P λογικό πολύγωνο με κορυφές $v_1, ..., v_n$ και a_i οι εσωτερικές γωνίες στις v_i. Τότε

$$area_{\mathbb{H}}(P) = (n-2)\pi - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Πρόταση 4.17. *Για κάθε $n \geq 3$ και για κάθε $a \in (0, \frac{n-2}{n}\pi)$, υπάρχει συμπαγές κανονικό υπερβολικό $n-$γωνο με εσωτερική γωνία a.*