ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
Αλγεβρα Ι

25 Ιανουαρίου 2002

1. Έστω x, y στοιχεία της ομάδας G με τάξεις m, n αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι $xy = yx$, να υπολογίσετε την τάξη του στοιχείου xy.

2. Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = (1352)(2345) \ \text{ και } \ \tau = (123456)^{-1}(13)(2654)(123456)$$

με $\sigma, \tau \in S_6$. Να εκφράσετε τις σ, τ ως γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους. Να εκφράσετε την μετάθεση (12345) σαν γινόμενο κύκλων μήκους 3. Πόσα στοιχεία τάξης 21 και πόσα τάξης 22 έχει η S_{10}; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Να κάνετε την διαίρεση του πολυωνύμου $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 11x + 31$ με το $g(x) = x^2 - 5x + 3$ όταν

   (i) $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

   (ii) $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$.

   (iii) $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

4. Έστω $a, \beta \in \mathbb{Z}$ και $I = \langle a, \beta \rangle$ το ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ που παράγεται από τα a, β. Βρείτε $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $I = \langle k \rangle$. Δείξτε ότι το I είτε περιέχει ακριβώς έναν πρώτο αριθμό είτε περιέχει όλους τους πρώτους αριθμούς είτε δεν περιέχει κανένα πρώτο αριθμό.

5. Αναγνωρίστε την ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2)/\langle(3,0)\rangle$.

6. Δίνεται ο δακτύλιος των πινάκων

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

με τις γνωστές πράξεις των πινάκων.

   (i) Να βρείτε όλες τις κανονικές υποομάδες της πολλαπλασιαστικής ομάδας R^* των αντιστρέψιμων πινάκων του δακτυλίου R.

   (ii) Να περιγράψετε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων $\vartheta : (R^*, \cdot) \longrightarrow (R, +)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής

Τα θέματα δεν είναι ισοδύναμα.