



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

25 Ιανουαρίου 2003

1. Έστω  $\varphi : \mathbb{Z}_8 \rightarrow S_4$  ένας ομομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η  $f$  δεν μπορεί να είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός.

2. (i) Έστω  $K$  το υποσύνολο της  $S_5$  με την ιδιότητα

$$K = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(1) = 1 \text{ και } \sigma(3) = 3\}.$$

Δείξτε ότι η  $K$  είναι υποομάδα της  $S_5$ . Πόσα είναι τα σύμπλοκα της  $K$  στην  $S_5$ ;

(ii) Εξετάστε αν η  $S_3$  είναι κυκλική ομάδα.

3. Βρείτε την ανάλυση σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων επί του  $\mathbb{Z}_5$  του πολυωνύμου

$$f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x].$$

4. Δίνεται ο δακτύλιος

$$R = \{(a, \beta) \mid a \in \mathbb{Z}_2, \beta \in \mathbb{Z}_m\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$$

με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού καρτεσιανού γινομένου δακτυλίων. Δείξτε ότι αν το  $m$  είναι περιττός τότε ο  $R$  είναι ισομορφικός με τον  $\mathbb{Z}_{2m}$ . Μπορείτε να πείτε το ίδιο και για την περίπτωση που το  $m$  είναι άρτιος;

5. Αποφασίστε για την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(i) Όλοι οι γεννήτορες της  $\mathbb{Z}_{20}$  είναι πρώτοι αριθμοί.

(ii) Η  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  είναι ισομορφική με την  $\mathbb{Z}_8$ .

(iii) Η εικόνα μιας ομάδας 6 στοιχείων μέσω ενός ισομορφισμού μπορεί να έχει 4 στοιχεία.

(iv) Κάθε ομάδα πηλίκου μιας μη αβελιανής ομάδας είναι μη αβελιανή.

(v) Η χαρακτηριστική του  $n\mathbb{Z}$  είναι  $n$ .

(vi) Κάθε μέγιστο ιδεώδες σε έναν μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα είναι πρώτο.

6. Δείξτε ότι αν τα  $A$  και  $B$  είναι ιδεώδη ενός δακτυλίου  $R$  τότε το άθροισμα

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

είναι ιδεώδες του  $R$ . Δείξτε επίσης ότι το γινόμενο

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι ιδεώδες του  $R$ .

7. Έστω  $\mathbb{Z}_{2002}$  η κυκλική ομάδα τάξης  $2002 (= 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)$ . Δείξτε ότι η  $\langle 55 \rangle = \langle 33 \rangle$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφότης