



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ

7 Φεβρουαρίου 2011

1. Να αναγνωρίσετε την ομάδα ηηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\langle(1, 1)\rangle$.
2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί ομάδων. Στις περιπτώσεις που είναι να υπολογίσετε τον πυρήνα και την εικόνα των ομομορφισμών.
 - (i) $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ με $f(x) = x(\text{mod}2)$.
 - (ii) $f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_4$ με $f(x) = (4\ x + 1)(123)$.
 - (iii) $f : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_5$ με $f(x) = 2x(\text{mod}5)$.
3. Δείξτε ότι αν H και N υποομάδες της G και η N κανονική της G τότε η $H \cap N$ είναι κανονική στην H . Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η $H \cap N$ μπορεί να μην είναι κανονική στην G .
4. Δίνεται ο δακτύλιος $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Να υπολογίσετε το ιδεώδες I του \mathbb{Q} που παράγεται από το $\frac{1}{2}$.
5. Να εξετάσετε ποιά από τα παρακάτω πολυώνυμα του \mathbb{Z} είναι ανάγωγα
 - (i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 - (ii) $x^3 + 6x^2 + 8x - 1$
 - (iii) $x^4 + 5x^2 + 6$
6. Έστω $f(x) = 2x^3 + x + 1$, $H = \langle f(x) \rangle$ και $S = \mathbb{Z}_3[x]/H$. Είναι το S σώμα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Σε κάθε περίπτωση να αναγνωρίσετε την προσθετική υποομάδα του S .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφτοής