ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Αλγεβρα

17 Φεβρουαρίου 2022

1. Έστω $\sigma = (135794)$ και $\tau = (25981)$ μεταθέσεις του S_9. Να υπολογίσετε την μετάθεση
$$\mu = \sigma^{1821}\tau^{1914}(\sigma\tau)^{-1941}(\tau\sigma)^{-2022}$$
να την γράψετε σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους, σαν γινόμενο 2-κύκλων, να βρείτε την τάξη της και να βρείτε αν είναι άρτια ή περιττή

2. (i) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{18316} : 11$.

   (ii) Να λυθεί το παρακάτω σύστημα στο $\mathbb{Z}_7$
$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 15 \\ 3x + 6y &= 137 \end{aligned}$$

3. Έστω G ομάδα και $Z(G)$ το κέντρο της ομάδας έτσι ώστε η $G/Z(G)$ να είναι κυκλική ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

4. Εστω το ιδεώδες I του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$ με $I = \left\{ f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f\left(\frac{2021}{2022}\right) = 0 \right\}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}[x]/I \cong \mathbb{Q}$.

5. (i) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 + 1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

   (ii) Κατασκευάστε ένα σώμα με 27 στοιχεία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Κ. Κοφίνας
Β. Μεταφτσής

Ενδεικτικές Λύσεις

1.

$$\sigma\tau = (135794)(25981) = (12798354), \tau\sigma = (25981)(135794) = (13942578)$$

$$1821 \equiv 3 \pmod 6,$$
$$1914 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5,$$
$$-1941 \equiv -5 \equiv 3 \pmod 8,$$
$$-2022 \equiv -6 \equiv 2 \pmod 8$$
$$\mu = (135794)^3(25981)^{-1}(12798354)^3(13942578)^2 =$$
$$(17)(39)(54)(18952)(19528473)(1927)(3458) = (1293)(47) = (13)(19)(12)(47)$$

Άρα η μετάθεση μ έχει τάξη 4 και είναι άρτια.

2. (i) Παρατηρώ ότι $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ και άρα $3^{18136} \equiv 3 \pmod{11}$.

   (ii) $5x = 1 - 2y$. Ο αντίστροφος του 5 στο $\mathbb{Z}_7$ είναι ο 3. Άρα $x = 3 - 6y$. Αντικαθιστώ στην δεύτερη και έχω $9 - 18y + 6y = 4$ άρα $12y = 5$ δηλαδή $5y = 5 \Rightarrow y \equiv 1 \pmod 7$. Άρα $x = 3 - 6 = -3 \equiv 4 \pmod 7$.

3. Αν η $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$ τότε «εύκολα» το $G = \{g^n z \mid n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}(G)\}$. Το αποτέλεσμα άμεσο.

4. Το ιδεώδες I είναι το σύνολο $I = \{(x - \frac{2021}{2022})g(x) \mid \forall\ g(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. Άρα το $\mathbb{Q}[x]/I$ δεν μπορεί να περιέχει πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου το μηδενικού βαθμού δηλαδή περιέχει μόνο τα σταθερά πολυώνυμα. Άρα το $\mathbb{Q}[x]/I = \{a + I \mid a \in \mathbb{Q}\}$. Ο ισομορφισμός είναι τώρα προφανής.

5. (i) Σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι το πολυώνυμο είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$. Προφανώς το $x^4 + 1$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{Z}$ διότι κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι $a^4 = -1$ για κάποιο $a \in \mathbb{Z}$. Έστω τώρα ότι $x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cb + d)$ με $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Τότε

   $$x^4 + 1 = x^4 + (c + a)x^3 + (ac + d + b)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

   άρα

   $$\begin{aligned} c + a &= 0 \\ ac + b + d &= 0 \\ ad + bc &= 0 \\ bd &= 1 \end{aligned}$$

   Η πρώτη λέει $c = -a$ και η τελευταία λέει ότι $b = d = 1$ ή $b = d = -1$ και άρα η δεύτερη δίνει είτε $-a^2 + 2 = 0$ είτε $-a^2 - 2 = 0$ δηλαδή είτε $a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$ είτε $a^2 = -2$ άτοπο και στις δύο περιπτώσεις.

(ii) Το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 2x + 1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_3[x]$. Άρα αν I το ιδεώδες που παράγεται από το $f(x)$ τότε το $\mathbb{Z}_3[x]/I$ είναι το ζητούμενο σώμα.