



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

19 Ιουνίου 2001

1. Δίνεται ο δακτύλιος $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
 - (i) Δείξτε ότι το R είναι ακέραια περιοχή αλλά όχι σώμα. [0.5]
 - (ii) Αν $\langle 5 \rangle = \{5a + 5b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο $R/\langle 5 \rangle$ είναι σώμα. [1]
 - (iii) Δείξτε ότι $|R/\langle 5 \rangle| = 25$. [0.5]
2. Δίνεται η ομάδα μεταθέσεων S_5 και τα στοιχεία της $\rho = (123)$ και $\sigma = (45)$. Δείξτε ότι η υποομάδα $\langle \rho, \sigma \rangle$ που παράγεται από τα ρ και σ , είναι ισομορφική με την $(\mathbb{Z}_6, +)$. [1.5]
3.
 - (i) Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 10 έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο τάξης 2. [1]
 - (ii) Αν μια ομάδα έχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2 δείξτε ότι αυτό ανήκει στο κέντρο της ομάδας. [1]
 - (iii) Πόσα στοιχεία τάξης 2 έχει η S_4 ; [1]
4. Έστω a, β το τρίτο και το πέμπτο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, ξεκινώντας από τα δεξιά. Έστω $n = 2a + 4\beta$. Να βρεθούν τα ιδεώδη του δακτυλίου $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. [1]
5. Έστω $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$ ένα πολυώνυμο στο $\mathbb{Z}[t]$, με $n \geq 1$ και $a_0 \neq 0$. Δείξτε ότι αν το f έχει μια ρητή ρίζα τότε αυτή είναι ακέραια και διαιρεί το a_0 . [1.5]
6.
 - (i) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $3^{6015} : 7$. [0.5]
 - (ii) Λύστε την εξίσωση $3x + 16 = 3$ στο \mathbb{Z}_5 . [0.5]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφστής