



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΆΛΓΕΒΡΑ Ι

28 Ιουνίου 2003

1. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων  $\phi$  με  $\phi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$  ώστε

$$\phi(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = (a_0 \bmod 2, a_0 \bmod 9)$$

για κάθε πολυώνυμο  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ .

- (i) Να βρεθεί ο πυρήνας του ομομορφισμού  $\phi$ .
- (ii) Να βρεθεί πολυώνυμο  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  με  $\phi(f(x)) = \phi(x^2 + 3)$  και  $f(0) \neq 3$ .

2. Έστω  $\sigma, \tau \in S_6$  με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Να βρεθεί η τάξη του  $\sigma^{2003}$ .
  - (ii) Να δείξετε ότι  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \{1\}$ .
3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (i) Μια εξίσωση της μορφής  $a * x * b = c$  έχει μοναδική λύση σε μια ομάδα.
  - (ii) Η  $S_7$  είναι ισομορφη με την υποομάδα όλων εκείνων των στοιχείων της  $S_9$  που αφήνουν τους αριθμούς 5 και 7 σταθερούς.
  - (iii) Το  $\mathbb{Q}^*$  με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης.
  - (iv) Κάθε ομάδα πηλίκου μιας ομάδας άπειρης τάξης έχει και αυτή άπειρη τάξη.
  - (v) Σε ένα δακτύλιο, κάθε στοιχείο είτε είναι αντιστρέψιμο είτε είναι διαιρέτης του μηδενός.
  - (vi) Το πολυώνυμο  $x^{17} - x + 1$  στο  $\mathbb{Z}_{17}[x]$  δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{Z}_{17}$ .
4. Έστω  $R$  μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και χαρακτηριστική ένα πρώτο αριθμό  $p$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση  $\phi_p : R \rightarrow R$  με  $\phi_p(a) = a^p$  για κάθε  $a \in R$  είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
5. Έστω  $K$  σώμα χαρακτηριστικής 0. Έστω  $a \in K$  μια ρίζα του πολυωνύμου  $f(x) \in K[x]$ . Δείξτε ότι το  $a$  είναι ρίζα πολλαπλότητας  $m$  αν και μόνο αν  $f^{(k)}(a) = 0$  για  $k = 1, \dots, m-1$  και  $f^{(m)}(a) \neq 0$ . Ισχύει το παραπάνω για σώματα με χαρακτηριστική  $p$ ;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφτής