



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ

26 Ιουνίου 2010

1. Να βρείτε το αντίστροφο του 123 στην ομάδα \mathbb{Z}_{3001}^* .
2. Γράψτε την μετάθεση

$$\sigma = (3 \ 2 \ 1)^{-5}(2 \ 3 \ 4 \ 5)^{-2}(5 \ 2 \ 3 \ 9)^3(5 \ 6 \ 7)^{17}(6 \ 7 \ 8 \ 5 \ 4 \ 3)^{26}$$

ως γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους και βρείτε την τάξη της.

3. Έστω $f : G \rightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων και A μια υποομάδα της G . Να δείξετε ότι
 - (i) Το σύνολο $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ αποτελεί υποομάδα της H .
 - (ii) Αν η A είναι κανονική υποομάδα της G και ο f είναι επιμορφισμός, τότε η $f(A)$ είναι κανονική υποομάδα της H .

4. Να βρείτε τον πυρήνα των ομομορφισμών

- (i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$, όπου $f(m) = 2m$,
- (ii) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_8$, όπου $g(m) = 5m$, και
- (iii) $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$, όπου $h(m) = (2m, 4m)$.

Ποιοι από αυτούς είναι μονομορφισμοί ή επιμορφισμοί;

5. Να εξετάσετε αν το σύνολο $S = \{m + 3n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Q}\}$ είναι
 - (i) υποδακτύλιος του \mathbb{C} ,
 - (ii) ιδεώδες του \mathbb{C} ,
 - (iii) σώμα.

6. Έστω $f(x) = 2x^3 + x + 1$, $H = \langle f(x) \rangle$ και $S = \mathbb{Z}_3[x]/H$.

- (i) Στο S , να υπολογίσετε το $f(a)$, όπου $a = x + H$.
- (ii) Αν $\beta \in S$ είναι μια ρίζα του $f(x)$, να υπολογίσετε τα $f(\beta + 1)$ και $\beta^3 - \beta$.
- (iii) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $f(x)$ στο S , καθώς και τα αντίστροφά τους.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφυσής