



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ

18 Ιουνίου 2011

1. Να αναγνωρίσετε την ομάδα  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 / \langle (2, 2) \rangle$ .
2. Σωστό ή Λάθος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
  - (i) Κάθε 1-1 απεικόνιση από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι μετάθεση.
  - (ii) Η τάξη της μετάθεσης  $(123)(456)$  είναι 9.
  - (iii) Η  $S_3$  δεν έχει αβελιανές υποομάδες.
  - (iv) Κάθε κυκλική ομάδα με τάξη μεγαλύτερη του 2 έχει τουλάχιστον 2 γεννήτορες.
  - (v) Τα αριστερά σύμπλοκα της υποομάδας  $H$  στην  $G$  μπορεί να είναι περισσότερα από τα δεξιά σύμπλοκα της  $H$  στην  $G$ .
  - (vi) Το στοιχείο  $(8, 4, 5)$  της  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$  έχει τάξη 32.
3. (i) Να γράψετε την παρακάτω μετάθεση  $\sigma$  σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους και να υπολογίσετε την τάξη της. Είναι η  $\sigma$  άρτια ή περιττή μετάθεση;

$$\sigma = (1357)^{1204} (45728)^{-1453} (158)^{-1789} (123458)^{1821}.$$

- (ii) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων στο  $\mathbb{Z}_5$ .

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\equiv 1 \pmod{5} \\ 3x + 2y &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

4. Έστω το  $f(x) = x^2 + x + 2$  στο  $\mathbb{Z}_3[x]$ .
  - (i) Να εξετάσετε αν το  $\mathbb{Z}_3[x] / \langle f(x) \rangle$  είναι σώμα.
  - (ii) Να περιγράψετε τα στοιχεία του  $\mathbb{Z}_3[x] / \langle f(x) \rangle$ .
  - (iii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{Z}_3[x] / \langle f(x) \rangle$ .
5. Έστω  $G, G'$  ομάδες. Δείξτε ότι η  $\phi : G \rightarrow G'$  είναι ομομορφισμός αν και μόνο αν το  $\{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$  είναι υποομάδα του  $G \times G'$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφίσης