



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ

18 Ιουνίου 2013

1. Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα στις παρακάτω προτάσεις.
 - (i) Αν $H_1 \cong G_1$ και $H_2 \cong G_2$ τότε $H_1 \times H_2 \cong G_1 \times G_2$.
 - (ii) Αν $N_1 \triangleleft G_1$, $N_2 \triangleleft G_2$ και $G_1 \cong G_2$, $N_1 \cong N_2$ τότε $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$.
2. Έστω N κανονική υποομάδα της ομάδας G με δείκτη n . Δείξτε ότι $g^n \in N$ για κάθε $g \in G$.
3. Να γράψετε την παρακάτω μετάθεση σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους και να βρείτε την τάξη της:

$$\left((125673)(23456)(234)(456)(362)(785)(451) \right)^{2013}.$$

4. Δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν η απεικόνιση $f : G \rightarrow G$, με $f(g) = g^{-1}$ είναι ομομορφισμός.
5. Έστω I το ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$ με $I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(5) = 0\}$. Να εξετάσετε αν το $\mathbb{Q}[x]/I$ είναι σώμα και να βρείτε, αν υπάρχει, το αντίστροφο του $(x^3 + 1) + I$.
6. Έστω I, J ιδεώδη ενός μεταθετικού δακτυλίου R με μονάδα και IJ το ιδεώδες του R που παράγεται από το σύνολο $\{ij \mid i \in I, j \in J\}$. Δείξτε ότι το $IJ \subset I \cap J$. Αν $R = \mathbb{Z}$, $I = \langle 4 \rangle$ και $J = \langle 6 \rangle$ ποιο ιδεώδες είναι το IJ ;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφίσης