



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ

7 Ιουνίου 2021

1. Έστω  $n$  ο αριθμός που παριστάνουν τα 5 τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Να γράψετε την παρακάτω μετάθεση  $\sigma$  σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους, να υπολογίσετε την τάξη της, να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή μετάθεση και να βρείτε την αντίστροφή της.

$$\sigma = (13726)^n(54623)^{n+26}(74321)^{n-26}(16825)^{2021}$$

2. (i) Αν  $n$  είναι ο αριθμός που αποτελείται από τα 5 τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας, να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις του παρακάτω συστήματος στο  $\mathbb{Z}_7$ .

$$\begin{aligned}(n+3)x + (n+2)y &= 2 \\ (n-2)x + 2y &= 1\end{aligned}$$

- (ii) Έστω  $a$  ο αριθμός μητρώου σας. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης  $(278)^a : 11$ .
3. Έστω  $f : G_1 \rightarrow G_2$  επιμορφισμός ομάδων. Να δείξετε ότι αν η  $G_1$  είναι κυκλική τότε και η  $G_2$  είναι κυκλική. Ισχύει το αντίστροφο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
4. Βρείτε έναν υποδακτύλιο του  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  που να μην είναι ιδεώδες του  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
5. Δίνεται το πολυώνυμο  $f(x) = x^3 + 7x^2 - 8x + 1$ .
- (i) Δείξτε ότι το  $f(x)$  είναι ανάγωγο στο  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
- (ii) Έστω  $I$  το ιδεώδες του  $\mathbb{Z}_2[x]$  που παράγεται από το  $f(x)$ . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{Z}_2[x]/I$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Κ. Κοφίνας  
Β. Μεταφτσής