ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Αλγεβρα Ι

14 Σεπτεμβρίου 2001

1. Έστω $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ σώμα με 4 στοιχεία.

   (i) Δείξτε ότι $\alpha^3 = 1$. [0.5]

   (ii) Να βρεθεί η χαρακτηριστική του F. [0.5]

   (iii) Να βρεθούν οι υποομάδες της $(F^*, \cdot)$. [0.5]

   (iv) Να βρεθούν όλα τα σύμπλοκα της προσθετικής ομάδας $\langle \alpha \rangle$ μέσα στην $(F, +)$. [0.5]

   (v) Είναι το F υπόσωμα του $\mathbb{C}$; [0.5]

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

   (i) Κάθε απλός, μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα είναι σώμα. [1]

   (ii) Υπάρχει επιμορφισμός ομάδων $\phi : (\mathbb{Z}_{m+2}, +) \to (\mathbb{Z}_m, +)$ αν και μόνο αν $m = 1, 2$. [1]

   (iii) Η πολλαπλασιαστική ομάδα $U(\mathbb{Z}_{11})$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{11}$ είναι κυκλική. [1]

3. Δίνονται οι μεταθέσεις $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Να εξετάσετε αν η υποομάδα H που παράγεται από τα $\langle \sigma, \tau \rangle$ είναι κανονική στην S_4. [1.5]

4. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $x^2 + 5x - 1$ στο $\mathbb{Z}_8$. [1]

5. Αν τα A και B είναι ιδεώδη ενός δακτυλίου R με $|A \cap B| = 1$, δείξτε ότι $\alpha\beta = 0$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. [1]

6. (i) Να διατυπώσετε το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών. [0.5]

   (ii) Να διατυπώσετε τα Θεωρήματα του Lagrange και του Cayley. [0.5]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής