ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Αλγεβρα I

6 Σεπτεμβρίου 2003

1. Θεωρούμε το κύριο ιδεώδες $I = \langle x^2 + 1 \rangle$ στο $\mathbb{Z}_2[x]$. Δείξτε ότι το πηλίκο $\mathbb{Z}_2[x]/I$ δεν είναι ακέραια περιοχή.

2. Εξετάστε αν το $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι σώμα.

3. Έστω $\sigma = (123)(234)(345)(567)(678)(789)$ στο S_9.

   (i) Γράψτε την σ σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.

   (ii) Ποια σύμβολα μένουν σταθερά από την σ.

   (iii) Γράψτε την σ^{-1} σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.

4. Ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις από την $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ στον εαυτό της είναι ομομορφισμοί;

   (i) $x \to -x$

   (ii) $x \to x^{-1}$

   (iii) $x \to -\frac{1}{x}$

   (iv) $x \to 10^x$

   (v) $x \to \sqrt{|x|}$

5. (i) Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 5^{2003} με το 7.

   (ii) Υπολογίστε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 2x + 4 = 0$ στο $\mathbb{Z}_6$.

6. Δείξτε ότι αν H και N είναι δύο υποομάδες μιας ομάδας G και η N είναι κανονική στην G τότε η $H \cap N$ είναι κανονική υποομάδα της H. Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο η $H \cap N$ δεν είναι κανονική στην G.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής