



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΑΛΓΕΒΡΑ

20 Σεπτεμβρίου 2010

1. Δείξτε ότι ο πυρήνας ενός ομομορφισμού δακτυλίων είναι ιδεώδες.
2. Έστω  $I = \langle 5, 12 \rangle$  το ιδεώδες του  $\mathbb{Z}$  που παράγεται από τα 5 και 12. Ποιους πρώτους αριθμούς περιέχει το  $I$ ;
3. Να αναγνωρίσετε την ομάδα πηλίκου  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 / \langle (3, 2) \rangle$ .
4. Να βρεθεί η ομάδα αυτομορφισμών της  $(\mathbb{Z}_6, +)$  καθώς και οι κανονικές υποομάδες της.
5. Δίνονται οι μεταθέσεις  $\sigma = (1234)(56213)$  και  $\tau = (123)^{-1}(567)(123)(12)$ . Να γραφεί η μετάθεση  $\sigma^{17233} \tau^6 \sigma^{-17233} \tau^{12} \sigma$  σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους.
6. Δείξτε ότι  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$  για κάθε πρώτο  $p$ .
7. Σωστό ή λάθος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
  - (i) Κάθε  $k$ -κύκλος είναι μια μετάθεση.
  - (ii) Κάθε μετάθεση είναι ένας  $k$ -κύκλος.
  - (iii) Η  $A_3$  είναι αβελιανή ομάδα.
  - (iv) Η  $S_7$  είναι ισόμορφη με την υποομάδα των στοιχείων της  $S_8$  που αφήνουν το 3 σταθερό.
  - (v) Οι περιττές μεταθέσεις της  $S_9$  αποτελούν υποομάδα της  $S_9$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

B. Μεταφυσής