ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Σεπτέμβριος 2012

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΡΚΩΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

1. (i) Να δώσετε τον ορισμό της υποομάδας μιας ομάδας.
   (ii) Έστω $H \subseteq G$ όπου G ομάδα και $H \neq \emptyset$ ώστε $a, b \in H \Rightarrow ab' \in H$. Να δείξετε ότι το H είναι υποομάδα της G.
2. Εστω $f : G \to H$ ένας επιμορφισμός ομάδων. Αν η G είναι αβελιανή, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει για την H.
3. Δώστε όλα τα στοιχεία της A_4. Να δείξετε ότι η A_4 δεν είναι αβελιανή και ότι έχει μια υποομάδα ισόμορφη με την ομάδα του Klein.
4. Να βρείτε το αντίστροφο του 95 στην ομάδα $\mathbb{Z}_{206}^*$.
5. Γράψτε την μετάθεση

$$\sigma = (3\ 2\ 1)^{92}(1\ 3\ 5\ 7)^{-2001}(1\ 2\ 3\ 4)^{2011}(5\ 6\ 7)^{17}(6\ 7\ 8\ 5\ 4\ 3)^{2010}$$

   ως γινόμενο ξένων κύκλων και και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
6. Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς, να δείξετε ότι $x^6 = 1$ για κάθε $x \in U(\mathbb{Z}_{18})$. Στη συνέχεια να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 275^{525} με το 18.
7. Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζονται με $f(x) = 2x$ και $g(x) = 3^x$. Να εξετάσετε αν είναι ομομορφισμοί δακτυλίων.
8. Έστω $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, $H = \langle f(x) \rangle$ και $S = \mathbb{Z}_{11}[x]/H$.
   (i) Να εξετάσετε κατά πόσο το S είναι σώμα, και
   (ii) να βρείτε όλες τις ρίζες του $f(x)$ στο S.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ