ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Αλγεβρα

6 Σεπτεμβρίου 2018

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί.

   (i) $f_1 : G \times H \to G$ με $f_1(g,h) = g$, όπου G, H ομάδες.

   (ii) $f_2 : G \to G \times G$ με $f_2(g) = (g,g)$ όπου G ομάδα.

   (iii) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $f_3(x) = x+1$.

   (iv) $f_4 : S_4 \to S_4$ με $f_4(\sigma) = \sigma^{-1}$.

   (v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_5(x) = 2x$.

2. (i) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $2^{10.001} : 31$.

   (ii) Να γράψετε τις μεταθέσεις σ, τ σαν γινόμενα κύκλων ξένων μεταξύ τους και να υπολογίσετε την τάξη τους.

$$\sigma = (12356)^{1204}(21345)^{-1453}(1362)^{-1977}(56142)^{316}$$

$$\tau = (12456)\sigma^{256}(123456)^{-1}$$

3. Έστω G ομάδα και $\Delta = \{(g,g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$ η διαγώνια υποομάδα της $G \times G$. Δείξτε ότι η Δ είναι κανονική στην $G \times G$ αν και μόνο αν η G είναι αβελιανή.

4. Έστω ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x+y\sqrt{2} \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$ και I το ιδεώδες που παράγεται από το 2. Να περιγράψετε τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/I$.

5. Να κατασκευάσετε ένα σώμα F_8 με 8 στοιχεία. Στην συνέχεια να προσδιορίσετε τις ρίζες του πολυωνύμου x^2+1 στο F_8.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής