ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Αλγεβρα

14 Σεπτεμβρίου 2022

1. Έστω $a = (1234)(345)$, $b = (234)(415)$ και
$$c = (a^{-2}b)^{-490}(ab)^{1571}(ba)^{-480}(a^2ba)^{2023}$$
μεταθέσεις του S_9. Να τις γράψετε σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους, σαν γινόμενο 2-κύκλων, να βρείτε την τάξη τους και να βρείτε αν είναι άρτιες ή περιττές.

2. (i) Να βρεθούν οι λύσεις, αν υπάρχουν, του παρακάτω συστήματος στο $\mathbb{Z}_8$.
$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ 6x + 5y &= 4 \end{aligned}$$
(ii) Να βρεθεί ο αντίστροφος του 12 στο $\mathbb{Z}_{101}^*$

3. (i) Να δώσετε τον ορισμό του ιδεώδους ενός δακτυλίου.
(ii) Να δώσετε τον ορισμό της κανονικής υποομάδας μιας ομάδας.
(iii) Έστω G ομάδα και H κανονική υποομάδα της G. Να ορισθεί το σύνολο πηλίκο G/H και να δειχθεί ότι επιδέχεται τη δομή μιας ομάδας.

4. Εξετάστε αν η ομάδα $U(\mathbb{Z}_8)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathbb{Z}_8$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}_4$.

5. (i) Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών και I το ιδεώδες του $\mathbb{R}[x]$ που παράγεται από το $x^2 + x + 1$. Να εξετάσετε αν ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/I$ είναι σώμα και να περιγράψετε τα στοιχεία του. Πόσα στοιχεία έχει ο $\mathbb{R}[x]/I$;
(ii) Έστω F σώμα και $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ο φ δεν είναι ένα προς ένα, να δείξετε ότι $\varphi(a) = 0$ για κάθε $a \in F$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Μεταφτσής

Διαρκεια Εξετασης 2 Ωρες και 30 Λεπτα

Ενδεικτικές Λύσεις

1. $a = (123)(45), b = (15234)$.

   $(a^{-2}b) = (15342)$, $490 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow (a^{-2}b)^{-490} = 1$.

   $ab = (142)(35)$, $1571 \equiv 5 \equiv -1 \pmod 6 \Rightarrow (ab)^{1571} = (ab)^{-1} = (241)(35)$.

   $ba = (1350(24)$, $480 \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow (ba)^{-480} = 1$.

   $a^2ba = (124)(35)$, $2023 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow (a^2ba)^{2023} = (124)(35)$.

   ΄Αρα $c = (241)(35)(124)(35) = (142)$. Συνεπώς οι a έχει τάξη 6 είναι περιττή, η b έχει τάξη 5 είναι άρτια και η c έχει τάξη 3 και είναι άρτια.

2. (i) Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς y: $3y = 2 - 4x \Rightarrow y = 6 - 12x$ εφόσον ο αντίστροφος του 3 στο $\mathbb{Z}_8$ είναι ο 3. Αντικαθιστώ στην δεύτερη και έχω $6x + 5(6 - 12x) = 4 \Rightarrow 6x + 30 - 60x = 4 \Rightarrow 6x + 6 - 4x = 4 \Rightarrow 2x = 6$. Αυτή η εξίσωση στο $\mathbb{Z}_8$ έχει 2 λύσεις τις $x = 3$ και $x = 7$. Για $x = 3$ η πρώτη εξίσωση γίνεται $3y = 2 - 12 = 6$ που έχει μοναδική λύση την $y = 2$. Για $x = 7$ η πρώτη εξίσωση γίνεται $3y = 2 - 28 = 6$ που έχει μοναδική λύση την $y = 2$. ΄Αρα το σύστημα έχει δύο λύσεις, τις $(3, 2)$ και $(7, 2)$.

   (ii) $101 = (8) \cdot 12 + 5$, $12 = (2) \cdot 5 + 2$, $5 = (2) \cdot 2 + 1$ και με προς τα πίσω αντικατάσταση έχω $1 = 5 - (20) \cdot 2 = (5) \cdot 5 - (2) \cdot 12 = (5) \cdot 101 - (42) \cdot 12$. ΄Αρα ο αντίστροφος είναι ο -42, δηλαδή ο 59.

3. Οι ορισμοί έχουν δοθεί στο μάθημα.

4. Τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_8$ είναι όλα τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_8$ που είναι πρώτα με το 8. ΄Αρα $U(\mathbb{Z}_8) = \{1, 3, 5, 7\}$. Μένει να ελέγξω αν είναι κυκλική. Έχω $3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \pmod 8$, $5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \pmod 8$ και $7 \cdot 7 = 49 \equiv 1 \pmod 8$ άρα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. (i) Το $x^2 + x + 1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}$ διότι η διακρίνουσα του πολυωνύμου είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3$. Επομένως το $\mathbb{R}[x]/I$ είναι σώμα και από την θεωρία ξέρω ότι $\mathbb{R}[x]/I = \{a_0 + a_1x + I \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$.

   (ii) Ο $\ker(\varphi)$ είναι ιδεώδες του σώματος F άρα από θεωρία, είτε είναι 0 είτε είναι όλο το F. Εφόσον η φ δεν είναι 1-1, $\ker(\varphi) = F$.