ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ''ΑΝΑΛΥΣΗ Ι''

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

10 Ιουνιου 2016, 12:00μμ–15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να αποδείξετε ότι ο (l_∞, d_∞) δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

ΘΕΜΑ 2. (α) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική. Να αποδείξετε ότι $\overline{B(x,r)} = S(x,r)$, όπου $B(x,r)$ (αντίστοιχα, $S(x,r)$) η ανοικτή (αντίστοιχα, κλειστή) μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r. Ισχύει η παραπάνω ισότητα σε κάθε μετρικό χώρο;

(β) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα U και V στον X με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Cantor, το οποίο δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι ένας μετρικός χώρος (X,d) πλήρης. Επίσης, να διατυπώσετε ένα θεώρημα του μαθήματος, του οποίου η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα του Cantor.

(β) Να δώσετε παραδείγματα (1) ενός μετρικού χώρου (X,d) και μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ και $\bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ (2) ενός πλήρους μετρικού χώρου (Y,ρ) και μιας φθίνουσας ακολουθίας $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών υποσυνόλων του Y ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(G_n) = 0$ και $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών (1) δεν είναι G_δ σύνολο (2) δεν είναι συμπαγές. Επίσης, να αποδείξετε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Q}$ είναι μονοσύνολο.

(β) Να αποδείξετε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του c_0 δεν είναι συμπαγές σύνολο.

(γ) Θεωρούμε το $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Είναι ο X συμπαγής; Ποιά είναι τα συμπαγή υποσύνολα του X; Τα συνεκτικά;

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω (X,d_X) και (Y,d_Y) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε να αποδείξετε ότι ο υπόχωρος $f(X)$ του Y είναι διαχωρίσιμος. Ισχύει το συμπέρασμα αν υποθέσουμε ότι ο X είναι συμπαγής;

(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία!