ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΑΝΑΛΥΣΗ Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

18 Σεπτεμβριου 2017, 15:00–18:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής επί του X αν και μόνο αν $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε υποσύνολο A του X.

(β) Να αποδείξετε ότι αν ο X είναι συμπαγής και η f είναι συνεχής επί του X, τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Cantor, το οποίο δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι ένας μετρικός χώρος (X, d) πλήρης. Επίσης, να διατυπώσετε ένα θεώρημα του μαθήματος, του οποίου η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα του Cantor.

(β) Να δώσετε παραδείγματα (1) ενός μετρικού χώρου (X, d) και μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ και $\bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, (2) ενός πλήρους μετρικού χώρου (Y, ρ) και μιας φθίνουσας ακολουθίας $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών υποσυνόλων του Y ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$ και $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $X = \mathbb{R}^n$ και $d(x, y) = \max\{|x_k - y_k| : 1 \leq k \leq n\}$. Να αποδείξετε ότι (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

ΘΕΜΑ 4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω A συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Να αποδείξετε ότι το παράγωγο σύνολο A' του A είναι συμπαγές.

(β) Έστω f μια συνάρτηση από ένα μετρικό χώρο X σε έναν μετρικό χώρο Y. Να αποδείξετε ότι αν ο περιορισμός $f|_A$ είναι συνεχής επί του A για όλα τα συμπαγή υποσύνολα A του X, τότε η f είναι συνεχής επί του X.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία