ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ''ΑΝΑΛΥΣΗ Ι''

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

21 Ιουνιου 2017, 15:00–18:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κατηγορίας του Baire, να δώσετε μια απόδειξη ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(β) Να αποδείξετε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι χώρος του Baire.

ΘΕΜΑ 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση από τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *επί* του $(\{0,1\}, \rho_\delta)$, όπου ρ_δ η διακριτή μετρική επί του $\{0,1\}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Στον χώρο (l_2, d_2) θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου για $n, m \in \mathbb{N}$, $a_n(m) = 1$ αν $n = m$ και $a_n(m) = 0$ αν $n \neq m$. Να εξετάσετε αν το σύνολο A είναι συμπαγές.

(β) Να δώσετε ένα παράδειγμα ολικά φραγμένου μετρικού χώρου ο οποίος δεν είναι συμπαγής.

(γ) Έστω $X = \mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ως εξής: $d(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}|$ και $d(n, \sqrt{2}) = d(\sqrt{2}, n) = n^{-1}$ για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$, και $d(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0$. Να αποδείξετε ότι η d είναι μια μετρική επί του X και ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να δώσετε ένα παράδειγμα υποχώρου του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ του οποίου όλα τα ανοικτά υποσύνολα είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι όλα τα κλειστά υποσύνολά του κλειστά στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $\mathcal{C}$ μια αριθμήσιμη οικογένεια διαχωρίσιμων υποχώρων του X. Να αποδείξετε ότι $\bigcup \mathcal{C}$ είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του X.

ΘΕΜΑ 5. Να αποδείξετε ότι ο διανυσματικός χώρος c_0 επί του $\mathbb{R}$ με την νόρμα $||\cdot||_\infty$ είναι χώρος του Banach.

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία