ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΑΝΑΛΥΣΗ Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Εισ. Κατευθυνση Σ.Α.Χ.Μ.

6 Φεβρουαριου 2017, 15:00–18:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. Έστω ότι το A είναι ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d).

(α) Δείξτε ότι $x \in \bar{A}$ αν και μόνο αν $d(x, A) = 0$.

(β) $\mathring{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

ΘΕΜΑ 2. Να αποδείξετε ότι οι χώροι $(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$ και (X, d), όπου X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και d είναι η διακριτή μετρική επί του X, δεν είναι διαχωρίσιμοι.

ΘΕΜΑ 3. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής επί του X αν και μόνο αν $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε υποσύνολο A του X.

(β) Να αποδείξετε ότι αν ο X είναι συμπαγής και η f είναι συνεχής επί του X, τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

ΘΕΜΑ 4. Να διατυπώσετε το θεώρημα κατηγορίας του Baire. Επίσης, να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών δεν είναι G_δ υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω A ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Δείξτε ότι για κάθε $B \subseteq X$, υπάρχει ένα σημείο $a \in A$ τέτοιο ώστε $d(a, B) = d(A, B)$.

(β) Δείξτε ότι αν οποιαδήποτε δύο σημεία σε ένα μετρικό χώρο X περιέχονται σε κάποιο συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε ο X είναι συνεκτικός.

(γ) Με κατάλληλο παράδειγμα, δείξτε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες μπορεί να μην είναι ανοικτά σύνολα σε ένα μετρικό χώρο (X, d).

Βαθμος Καθε Θεματος = 2 Μοναδες | Αριστα = 10 Μοναδες

Καλή Επιτυχία