

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ “ΑΝΑΛΥΣΗ Ι”

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΕΙΣ. ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ Σ.Α.Χ.Μ.

9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016, 12:00MM–15:00

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ανοικτό σύνολο στον X . Ισχύει η αντίστοιχη πρόταση με “τομή” αντί για “ένωση”; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και έστω Y ένα μη κενό υποσύνολο του X . Να αποδείξετε ότι τα ανοικτά υποσύνολα του υπόχωρου (Y, d_Y) είναι όλα ανοικτά στον X και τα κλειστά υποσύνολα του Y είναι όλα κλειστά στον X , αν και μόνο αν, $\partial_X Y = \emptyset$, όπου $\partial_X Y$ είναι το σύνορο του Y στον X .

(γ) Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός μετρικού υπόχωρου του $\mathbb{R}$ (με την συνήθη μετρική) του οποίου όλα τα ανοικτά υποσύνολα είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι όλα τα κλειστά υποσύνολά του κλειστά στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. Να αποδείξετε ότι ο χώρος $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος.

ΘΕΜΑ 3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής μόνο στους ρητούς αριθμούς.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

(β) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση από έναν συμπαγή μετρικό χώρο (X, d) σε έναν μετρικό χώρο (Y, ρ) . Να αποδείξετε ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ για όλα τα υποσύνολα A του X .

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική και έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 4\}$. Να αποδείξετε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.

(β) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε ότι, αν κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (δηλαδή, αν $y_1, y_2 \in f(X)$ και y είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ των y_1 και y_2 , τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$), τότε ο (X, d) είναι συνεκτικός.

ΘΕΜΑ 6. Έστω (X, d) ένας ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και έστω ότι $\tilde{X}$ είναι μια πλήρωση του X . Είναι ο $\tilde{X}$ συμπαγής;

ΝΑ ΕΠΛΕΞΕΤΕ 5 ΑΠΟ ΤΑ 6 ΘΕΜΑΤΑ

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2 ΜΟΝΑΔΕΣ | ΑΡΙΣΤΑ = 10 ΜΟΝΑΔΕΣ

Καλή Επιτυχία!