Τελικη Εξεταση στο μαθημα ''Απειροστικος Λογισμος ΙΙ''

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Μαθηματικων – Κατευθυνση Σ.α.χ.μ

17 Ιουνιου 2015 – 12:00μμ-15:00

Διδασκων: Ελευθεριος Ταχτσης

ΘΕΜΑ 1. (α) Να αποδείξετε ότι αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$.

(γ) Να δώσετε τον ορισμό της εναλλάσσουσας σειράς και να διατυπώσετε το κριτήριο Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές.

ΘΕΜΑ 2. (A) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές: (α) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n=\frac{n}{2^n}$ αν n περιττός και $a_n=\frac{1}{2^n}$ αν n άρτιος, (δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$, (ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n b_n}$, δοθέντος ότι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν.

(B) Να αποδειχθεί ότι $0.\bar{3}=\frac{1}{3}$.

(Γ) Ισχύει ότι οποιαδήποτε αναδιάταξη συγκλίνουσας σειράς είναι συγκλίνουσα σειρά;

ΘΕΜΑ 3. (α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, να αποδείξετε ότι αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση συνεχής επί του $[0,1]$, τότε $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0$.

(β) Έστω $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$. Ισχύει ότι $f(x)=\int_0^x f'(z)dz$ για κάθε $x>0$;

(γ) Έστω $a>0$ και έστω $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής και περιττή συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+2}\,dx, \quad \int \frac{1}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}\,dx.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Με κατάλληλο παράδειγμα να δείξετε ότι γενικά δεν ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$.

(β) Να μελετηθούν ως προς την σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα: $\int_0^1\frac{1}{1-x^2}\,dx$, $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x\,dx$, όπου $a>0$.

Βαθμος καθε θεματος = 2

Αριστα = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ