

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ II
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Σ.Α.Χ.Μ
4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014 – 09:00-12:00
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ, ΕΥΤΥΧΙΑ ΜΑΜΖΕΡΙΔΟΥ

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δοθεί ο ορισμός της έννοιας “σειρά πραγματικών αριθμών”.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ δεν συγκλίνει. Γιατί το αποτέλεσμα αυτό δεν αντιβαίνει στο κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy;

(β) Να εξετάσετε αν ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n^2} \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει, να εξετάσετε επιπλέον αν $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n^2} \in \mathbb{Q}$ ή όχι.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι (1) $f(0) = 0$, (2) $f'(x) = f'(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, να βρείτε τον τύπο της f .

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \frac{|x-1|}{|x-2|+1} dx$.

ΘΕΜΑ 4. Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Να αποδείξετε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sin x$ με όποιο βαθμό ακρίβειας θέλουμε (δηλαδή, $\forall \varepsilon > 0, \forall x$, μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\sin x$ με σφάλμα $< \varepsilon$).

(β) Να βρεθεί το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2

ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ