

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ - Τ. Σ. Α. Χ. Μ.

11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - 09:00-12:00

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΤΑΧΤΗΣ

ΘΕΜΑ 1. Να δώσετε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθένα από τα παρακάτω:

(α) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(β) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(δ) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει.

(ε) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε το γ.ο. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $a \in \mathbb{R}$, αποκλίνει.

(στ) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ των θετικών και αρνητικών όρων, αντίστοιχα, της σειράς, αποκλίνουν.

ΘΕΜΑ 2. (α) Να βρεθεί το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $U(t) = \int_1^t (x-2) \ln x \, dx$ για κάθε $t > 1$. Επίσης, να βρεθεί το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U'(t)}{t \ln t}$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να εξετασθεί ως προς την απόλυτη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n-1)}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

(β) Να διατυπωθεί το κριτήριο συμπίκνωσης του Cauchy. Με βάση το κριτήριο αυτό, να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p > 0$.

(γ) Έστω $0 < a < 1$ και έστω η σειρά $a^2 + a + a^4 + a^3 + \dots + a^{2n} + a^{2n-1} + \dots$. Να αποδειχθεί ότι το κριτήριο ρίζας εφαρμόζεται αλλά δεν εφαρμόζεται το κριτήριο λόγου. Ποιό είναι το άθροισμα της παραπάνω σειράς (αν υπάρχει) **και γιατί**;

(δ) Να επιλέξετε **μόνο ένα** από τα παρακάτω:

(δ1) Να εκφράσετε την δεκαδική παράσταση $5, \overline{23}$ ως λόγο δύο ακεραίων.

(δ2) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα $\int \frac{x^2}{2x^2 - 3x + 1} dx$, $\int \frac{\sin x}{4 \cos^2 x - 1} dx$, $\int \int_0^1 f(t) dt \, dx$, όπου f ολοκληρώσιμη συνάρτηση επί του $[0, 1]$.

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ορισμένα ολοκληρώματα, να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x) = 4 - x$, $x \in [0, 3]$. Επίσης, να βρεθεί σε ποιό σημείο του πεδίου ορισμού της παίρνει η f την τιμή αυτή.

ΘΕΜΑ 5. (α) Επιβεβαιώσατε ότι η $f(x) = \cos(x^2)$, $x \geq 1$, είναι ένα αντιπαράδειγμα για την συνεπαγωγή: “ $\int_1^{+\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ”.

(β) Να μελετηθούν ως προς την σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx, \int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx.$$

ΒΑΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΘΕΜΑΤΟΣ = 2

ΑΡΙΣΤΑ = 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ